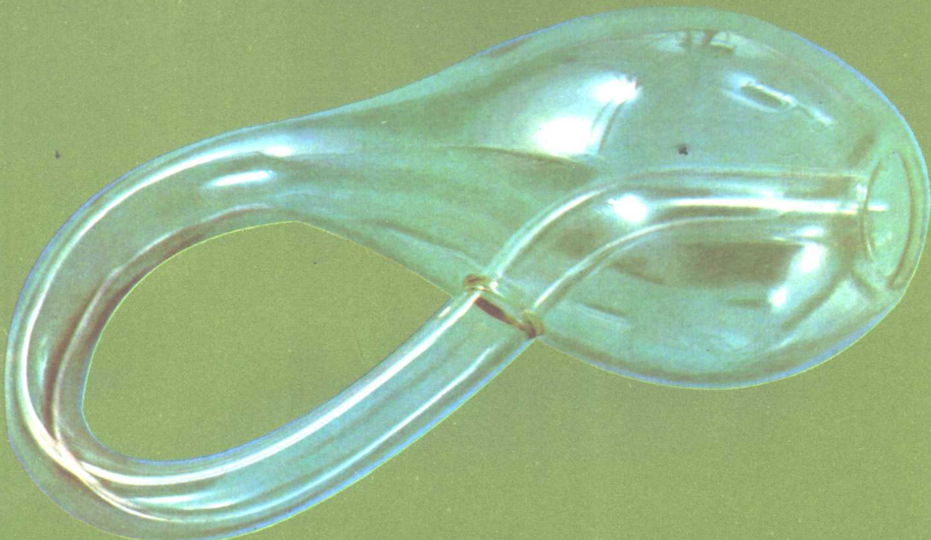
TONGSU SHUXUE MINGZHU YICONG



通俗数学名著译丛

TAPU SHIYAN

[美] 斯蒂芬·巴尔 著

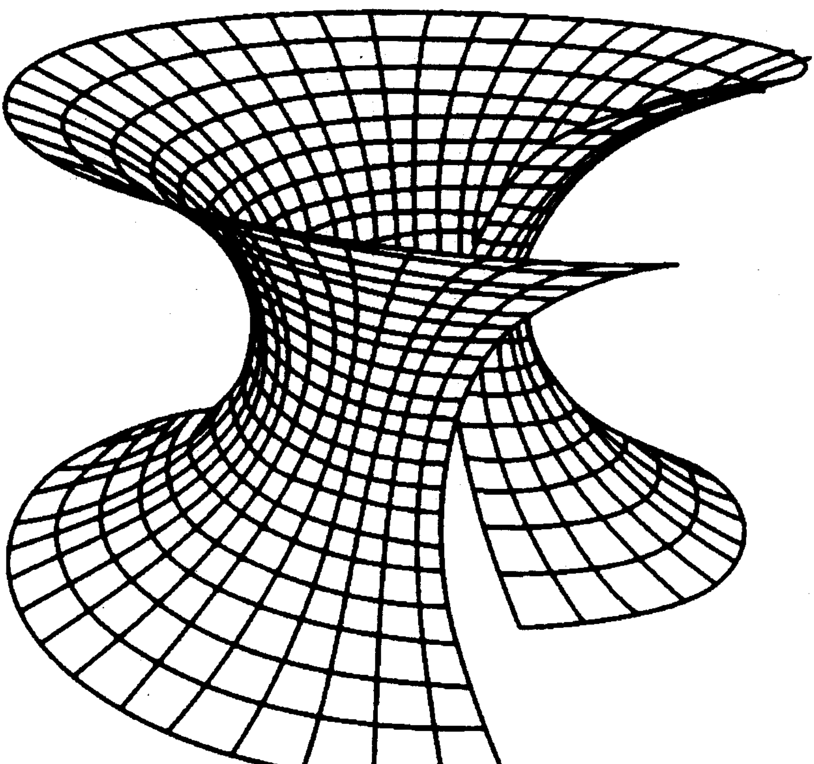
许 明译

上海教育出版社

拓扑实验

拓扑实验

[美] 斯蒂芬·巴　尔著　许　明译 ● 上海教育出版社



Stephen Barr

Experiments in Topology

Dover Publications, Inc.

根据多佛出版社 1989 年版译出

本书中文版权由上海市版权代理公司帮助取得

图书在版编目（CIP）数据

拓扑实验／（美）巴尔著；许明译．—上海：上海教育出版社，2002.1

（通俗数学名著译丛／史树中，李文林主编）

ISBN 7-5320-7862-0

Ⅰ.拓… Ⅱ.①巴…②许… Ⅲ.拓扑

Ⅳ.0189

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第005617号

通俗数学名著译丛

拓朴实验

［美国］斯蒂芬·巴尔著

许 明 译

上海世纪出版集团
上海教育出版社 出版发行

（上海永福路123号 邮政编码：200031）

易文网：www.ewen.cc

各地新华书店经销 上海书刊印刷有限公司印刷

开本 850×1156 1/32 印张 5.25 插页 4 字数 118,000

2002年2月第1版 2002年2月第1次印刷

印数 1—5,150本

ISBN 7-5320-7862-0/G·7959 定价：(软精)11.40元

开創新世紀的
数學文化

陳省身
二千年十一月

译丛序言

数学,这门古老而又常新的科学,已阔步迈进了21世纪.

回顾过去的一个世纪,数学科学的巨大发展,比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础的地位.数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透,并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献.同时,数学作为一种文化,已成为人类文明进步的标志.因此,对于当今社会每一个有文化的人士而言,不论他从事何种职业,都需要学习数学,了解数学和运用数学.现代社会对数学的这种需要,在未来的世纪中无疑将更加与日俱增.

另一方面,20世纪数学思想的深刻变革,已将这门科学的核心部分引向高度抽象化的道路.面对各种深奥的数学理论和复杂的数学方法,门外汉往往只好望而却步.这样,提高数学的可接受度,就成为一种当务之急.

一般说来,一个国家数学普及的程度与该国数学发展的水平相应并且是数学水平提高的基础.随着中国现代数学研究与教育的长足进步,数学普及工作在我国也受到重视.早在60年代,华罗庚、吴文俊等一批数学家亲自动手撰写的数学通俗读物,激发了一代青少年学习数学的兴趣,影响绵延至今.改革开放以来,我国数学界对传播现代数学又作出了新的努力.但总体来说,我国的数学普及工作与发达国家相比尚有差距.我国数学要率先赶超世界先进水平,数学普及与传播方面的赶超乃是一

个重要的环节和迫切的任务.为此,借鉴外国的先进经验是必不可少的.

《通俗数学名著译丛》的编辑出版,正是要通过翻译、引进国外优秀数学科普读物,推动国内的数学普及与传播工作,为我国数学赶超世界先进水平的宏伟工程贡献力量.丛书的选题计划,是出版社与编委会在对国外数学科普读物广泛调研的基础上讨论确定的.所选著述,基本上都是在国外已广为流传、受到公众好评的佳作.它们在内容上包括了不同的种类,有的深入浅出介绍当代数学的重大成就与应用;有的循循善诱启迪数学思维与发现技巧;有的富于哲理阐释数学与自然或其他科学的联系;等等,试图为人们提供全新的观察视角,以窥探现代数学的发展概貌,领略数学文化的丰富多采.

丛书的读者对象,力求定位于尽可能广泛的范围.为此丛书中适当纳入了不同层次的作品,以使包括大、中学生;大、中学教师;研究生;一般科技工作者等在内的广大读者都能开卷受益.即使是对于专业数学工作者,本丛书的部分作品也是值得一读的.现代数学是一株分支众多的大树,一个数学家对于他所研究的专业以外的领域,也往往深有隔行如隔山之感,也需要涉猎其他分支的进展,了解数学不同分支的联系.

需要指出的是,由于种种原因,近年来国内科技译著尤其是科普译著的出版并不景气.在这样的情况下,上海教育出版社按照国际版权公约,不惜耗资购买版权,组织翻译出版这套《通俗数学名著译丛》,这无疑是值得称道和支持的举措.参加本丛书翻译的专家学者们,自愿抽出宝贵的时间来进行这类通常不被算作成果但却能帮助公众了解和欣赏数学成果的有益工作,同样也是值得肯定与提倡的.

像这样集中地翻译、引进数学科普读物,在国内还不多见.值得高兴的是,这项工作从一开始就得到了数学界许多人士的赞同与支持,特别是数学大师陈省身先生两次为丛书题词,使我

们深受鼓舞.到目前为止,这套丛书已出版了13种,印数大多逾万,有的已经是第四次印刷,这对编译者来说确是令人欣慰的信息.我们热切希望广大读者继续关心、扶植这项工作,使《通俗数学名著译丛》的出版获得更大的成功.

让我们举手迎接数学科学的新的黄金时代,让公众了解、喜爱数学,让数学走进千家万户!

《通俗数学名著译丛》编委会

2001年8月

献　　词

数学家们不落俗套的风格
以美妙的托词避开了通用的言语:
读者一定要学会他们的语言,因为
它能迷倒崇尚比喻想法的人并带来因
这种思想引起的狂喜.
数字们紧密地站成一排
给出了拓扑空间,就像是
花园里一群雨燕的飞翔表达了
对逻辑的敬意.然而燕子知道
下不是上.拓扑学家却不知
东南西北也不管上还是下.
他们每个人都有独到之处,并非他们宁愿
傲慢和浮夸而把学习撇在一旁.

致 谢

插图由 A·摩根(Ava Morgan)所绘制.

我要感谢《趣味数学杂志》的编辑 J·玛达奇(Joseph Madachy),还有《科学美国人》的编辑们,他们允许复印了本书的一些难题.

特别要感谢 M·加德纳(Martin Gardner),是他建议我写这本书的,也要感谢 M·波依德(Milton Boyd),他教会了我这方面的知识.

还要感谢 J·麦克勒兰(John McClellan),H·S·M·考克斯特(H.S.M.Coxeter)教授,R·宾(R.Bing)教授,感谢他们给予我的帮助和支持.

目　录

第1章 什么是拓扑学?

拓扑学是相当新的一个数学分支,而要在数学中谈到实验似乎就有点古怪——除非,譬如说,你正站在学科的第一线并希望做出一些新贡献;但这里我们只假定读者们对这门学科一无所知.或许正因为它是相当新的分支,我们虽不能在顶上面——倒也可以从侧面做些添枝加叶的事.同时也可以做一些实验,尽管由此并不会添加什么新东西,却可以帮助你了解这门难以捉摸的学科.

要给拓扑学下个定义是出奇地难,相比较而言,对下面一些
学科则要容易得多.算术:"正实数的科学"(《韦氏新大学字
典》),或者,"处理数量间数值关系的一门艺术"(《不列颠大百科
全书》第11版).代数:"算术的推广与扩充"(《不列颠大百科全 【1】
书》第11版).马克·巴尔(Mark Barr)说,数学是"当我们冷静地
考察事物间关系时,设法将它们置于暂时待定状态",它特别可
用到代数上.几何:"对空间(数学)性质的研究"(《不列颠大百科
全书》第11版).拓扑学最初是以一种几何形式出现的,后来却
伸展到了许多其他的数学领域.人们几乎可以说它是一种精神
境界,有它自身目标的那种境界.(后文中我们会看到最后这短
语确有其拓扑意义.)

从某种意义上说,拓扑学是研究连续性的:开始是研究空间或形状的连续性,而后加以推广,然后以类比的方式引进其他各种连续性——我们通常所理解的空间则被远远地抛在后面了.

那些真正思想高度活跃的拓扑学家不仅避免像这些东西的图形之类的，也根本就不信任它们.部分原因是某些他们所谓的“空间”不但不可能作出在视觉上可以辨认的图形，而且这样做根本就毫无意义.但是，如果我们从一些我们可以看到和感觉到的空间或形状出发，以拓扑学家的观点来观察，并通过简单的步骤，就能够对我们的目标有所了解.

【2】 拓扑学家感到兴趣的事物的几何性质是那些最为持久不变的东西，即那些能在扭曲和拉伸后仍能保持的性质.

一个圆圈的圆度显然不属于此列：你可以把一段绳线两端结起来或粘起来做成一个圆，同时也可在不切开或断开的情形下把它变成一个方形.但是它没有端点这个事实仍然保持不变，如果我们事先在它上面穿好一串标有数字的珠子，则它们会保持顺序不变，哪怕我们把它打成纽结也行，这时只要我们像一只爬行的小虫，顺着线去数它们，便能得到证实(图 1).如果用松紧带去替代绳线，其结果仍然如此，因为改变的仅仅是珠子间的距离而不是它们的顺序.

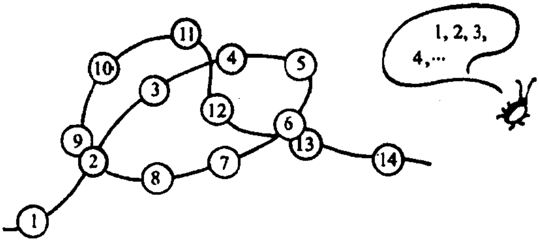


图 1

我们在射影几何中遇到相同的情形：直线的投影为直线，三角形的投射为三角形，但其角度可取任何值，甚至在它自身角度
【3】改变时也如此.虽然在拓扑学中直线不必保持为直线，但它保持了沿自身连续不断地连通这个性质，其两个端点或断开或相连，依情况而定.(如果线被画在球面上而且在沿它爬行的小虫看来

它是直的,它会报告说,此线不偏不倚,像是球面的赤道.这属于后一种可能性.)拓扑学紧紧抓住的就是这个连通性,这个连续性,正因为如此,扭曲只有在不断开原来连通的地方才被允许进行(像切开或戳洞),也不允许连接原来不连通的地方(像连接原来断开线的两端,或是填满一个洞).

依此规则,我们取一团圆形黏土;可以把它做成一只杯子但不能给它装一个把柄,这是因为把柄上有个洞.但是我们却能够从一块炸面圈形的黏土块做成一只带柄的杯子(图2).

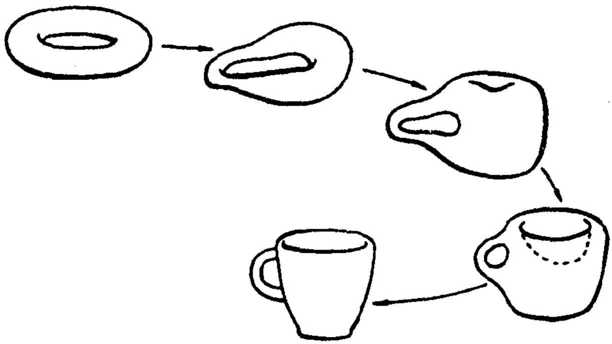


图 2

【4】

更明确地说:只要剖开之后又把它重新连接上,我们就允许剖开这种形变.例如,一些拓扑学家说,可以把图3中线圈的第一种布局在不改变其连通性的情形下,经过变化或扭曲转化为第二种布局.这两种布局确实都以相同的方式连通,但显然我们不能在不切断也不黏合的条件下做到这种转化——然而这种转化是允许进行的.有些人说,可以在4维空间中做到它,但是,或

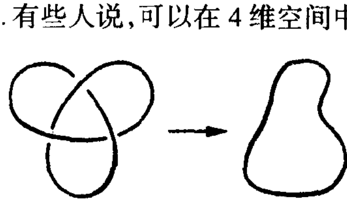


图 3

许在这个例子中,只要对不切不黏规则作点修订就更加清楚明白些:只要经形变的最后结果中的连通性与原来的连通方式一样,则任何形变都被允许.

这个规则的另一个例子是,你不能从一片炸面圈形的块状物做出一只不带空洞的碟子来.前者有时也称作*环体*.像具有或不具有空洞这些特性被称为*拓扑不变性*.有时会发现一个不变性原来只是另一个的推论,但是现在我们还无需强调它.

【5】 没有空洞的一块黏土称之为*单连通的*,我们发现它有如下结果,即如果我们在这黏土块上画一个圆圈或是任一条闭曲线(图 4),它将整个表面分成两块:内部和外部,这跟在纸上画圈是一样的.球面上的赤道线也有这个特性,只是很难说哪一个是“内部”,哪一个是“外部”;不管怎样,它至少把表面分成了两部分.

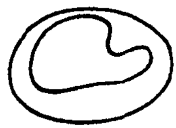


图 4

现在,如果我们画上另一个圆圈,则它与第一个圆要么完全不切割或相交,要么切割或相交于两处.这里切割的意思是完全穿过而不是像图 5 中的两个圆那样仅仅相接触.这是因为当我们从第一个圆外面的一点出发画第二个圆时,需要穿越到*内部*;除非我们再次穿越第一个圆,否则我们就不能返回外部来使新
【6】 画的线与出发点相连,从而画完新的圆.先从内部出发也是一样的情形.

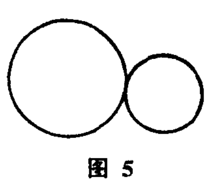


图 5

现在考察环体(炸面圈,图 6)的情形. 先画出 L 线. 可以看到,它并没有把整个表面分成两部分,从而,如果我们从任意点 P 出发画第二个圆,则点 P 既不在圆 L 的内部也不在外部. 因此,当我们跨过 L,我们所作的虚线并没有被 L 所阻挡,不让它回到 P 点. 正如图中所示,我们可以找到两个圆,它们只交于一个点. 这个事实对于没有空洞的单连通曲面不成立,但对任意一个具有一个空洞的曲面都对;它是拓扑不变的.

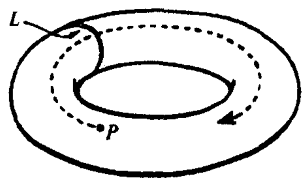


图 6

像前面所指出的,一个环体可形变为带有一个洞的各种形状;同时,一个圆除了它叠合到一条无限伸展的曲线外,它总可形变为任一条处处不自交的闭曲线. 后一种称之为约当(Jordan)曲线,因为是这位数学家证明了:如果这些曲线是在单连通 【7】 曲面上,例如在平面或球面上,则它们将曲面分成不同的两个区域,这两个区域没有公共点,但以此曲线作为它们的公共边界. 这个结论似乎很明显,但是证明起来却出乎意料地困难. 在环体表面上也可画出一条把曲面分成两部分的约当曲线来,这只要它不环绕那个空洞也不要像图 6 中那条曲线那样从头至尾地穿越就可以做到. 但是在平面或球面上所有的约当曲线都把曲面一分为二,而在环体表面并非一定如此. 当一个形状或曲线按我们的规则形变成另一个时,我们就说它们相互同胚.

如果在一块黏土上画一个三角形,可以相信,我们能够同胚地经过形变把它的三个角去掉,并把它变为一个圆;但是如果我们在线上已标出一些点或者就把顶点当作这些标出点,则这些点在形变中仍旧在曲线上并且保持同样的顺序(按逆时针数

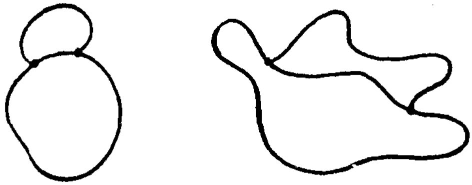


图 7

序).另外,如果我们画出图 7,它是一条闭曲线与另外一条曲线在两个不同的点相连接的图形;没有一个按我们规则进行的形
【8】变能改变对这个图形的描绘.不仅这两个连结点仍保持为连结点,而且不会有新的连结点出现,因为那意味着有一个新的连接.因此,一个球面及其赤道,加上另外一条与赤道在点 P 及 P' 相连的曲线的图形(图 8)不可能在形变下使这些曲线的布局在拓扑上有所改变(图 9 和 10).

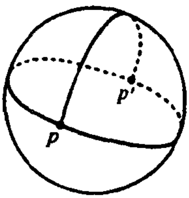


图 8

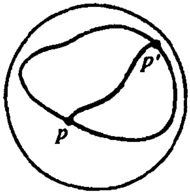


图 9

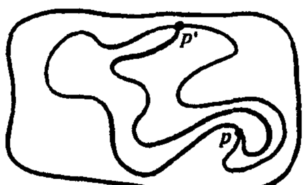


图 10

图 9 表示整个曲线的布局都拉到了一边并弯曲成随意的形状.(只要遵守规则,可以在曲面上进行形变.)我们看到,它仍旧把此曲面分成三块;它仍旧由三段曲线构成,而且它们仍旧交于
【9】两个不同的点.这些就是拓扑学家们所关心的事实.

欧拉定理

拓扑不变量的主要例子来自瑞士数学家伦纳德·欧拉(Leonhard Euler)在 1752 年所陈述的一个定理.它与多面体有