HZ BOOKS
华章教育

2003年全国研究生入学考试数学复习指导丛书

高等数学

复习指导与典型例题分析

林源渠　李正元　周民强　刘西垣　编著

数学

机械工业出版社
China Machine Press

高等数学

复习指导与典型例题分析

2003年全国研究生入学考试数学复习指导丛书

林源渠　李正元　周民强　刘西垣　编著

机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：复习指导与典型例题分析/林源渠等编著. －北京：机械工业出版社，2002.4
(2003年全国研究生入学考试数学复习指导丛书)
ISBN 7-111-10138-3

Ⅰ.高…　Ⅱ.林…　Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第019126号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街22号　邮政编码100037)
责任编辑：谢小梅
北京昌平奔腾印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2002年4月第1版第1次印刷
787mm×1092mm　1/16·22.75印张

定　价：34.00元

出 版 前 言

由机械工业出版社华章教育会同北京大学数学学院等几所高校的名师策划、出版的考试数学系列丛书“考研题库”、“考研历年真题详解与考点分析”、“本科生题库”、“考研复习指导与典型例题分析”等共 16 本将陆续面世。这是为了帮助在校生和有志于攻读硕士研究生的广大考生全面、系统地复习有关课程的内容，了解考研的最新信息而编写的一套题量较大、题型齐全、覆盖面广、难度及认知层次分布合理的系列丛书。本书的总体设计是在北京大学著名的命题专家指导下，根据教育部最新制定的“全国硕士研究生入学考试数学大纲”的有关要求，并结合作者多年来参加有关考试的命题、阅卷及辅导的经验而进行的。

本套丛书作者阵容强大

作者皆为北京大学、中国人民大学、北京理工大学、北方交通大学等多年从事数学基础教学以及参加过全国各地考研辅导的名师，具有丰富的教学经验，多次被评为各级优秀教师。他们所编写的教材、辅导书和讲授的课程在各校及历年参加研究生入学考试的考生中都有相当大的影响。

本套丛书体系明晰、内容精练

在“考研题库”中，包括《高等数学习题集(提高篇)》、《微积分习题集(提高篇)》、《线性代数习题集(提高篇)》、《概率论与数理统计习题集(提高篇)》四本。该系列题型丰富、数量充足、解析精辟，体现了作者们的专业素质，您不妨看看、练练。

在“考研历年真题详解与考点分析”中，也分为高等数学、微积分、线性代数、概率论与数理统计四本。该系列汇集考研的历年真题并有考点分析，使考生看后能紧密结合实战，安排复习详略。特色之处是没有按年代顺序，而是分门别类娓娓道来。

“复习指导与典型例题分析”同样分为四本。该系列注重基本概念、基本技能，是考试大纲的教材而非教学大纲的教材，为考生节省了时间。

“本科生题库”包括《高等数学习题集(基础篇)》、《微积分习题集(基础篇)》、《线性代数习题集(基础篇)》、《概率论与数理统计习题集(基础篇)》。该系列紧密结合教材，是本科生掌握基础知识、提高应用技巧的最佳工具书。

为了使学生通过一定数量题目的练习，便掌握解题方法与精髓，本书所选的题目打破过去习题集的形式，将题目分为填空题、多项选择题、解答题和证明题。

本系列丛书适合文、理科各个专业，特别是参加全国硕士研究生入学考试、自学考试及其他各类考试的需要，也适合各高等院校及成人高等专科教育各个专业教学辅导的需要。

我们相信，本系列丛书的出版，必将有助于广大在校生和有志于攻读硕士研究生的考生开

拓思路，更好地理解和掌握有关的基本概念和基本的解题方法，培养逻辑推理能力及运用所学知识分析、解决实际问题的能力，并使得自己在这个过程中不断增强对考试的适应能力和通过考试的自信心，以便考出好成绩。

本系列丛书的出版要感谢为丛书提供资料的名师们，感谢他们付出的辛勤劳动。同时，欢迎广大师生就书中的问题提出不同见解。

机械工业出版社华章教育

2002 年 3 月

目 录

第一章　函数、极限、连续

一、考试大纲要求

按照考试大纲，本章的考试内容包括：函数的概念及表示法，函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，反函数、复合函数、分段函数和隐函数，基本初等函数的性质及其图形，初等函数以及简单应用问题中函数关系的建立等方面．考试要求是：理解函数的概念，掌握函数的表示方法，了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性，理解复合函数及分段函数的概念．了解反函数和隐函数的概念，掌握基本初等函数的性质及其图形，会建立简单应用问题中的函数关系式．

在历年的试题中，既有单纯考察函数有关知识的题目，也有许多把函数有关知识融汇于其他内容当中的综合性题目．

极限是微积分的理论基础，研究函数的性质是通过研究各种类型的极限来达到的，如连续、导数、定积分、级数等等．本章的重点内容是极限．这部分的考试内容是：数列极限与函数极限的定义及它们的性质，函数的左极限和右极限，无穷小和无穷大的概念及其关系，无穷小的性质及无穷小的比较，极限四则运算，极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则，两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

还有洛必达法则．考试大纲对极限的要求是：理解函数极限的概念，理解函数左极限和右极限的概念，以及极限存在与左、右极限的关系．掌握极限的性质及四则运算法则．掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法．理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限．掌握用洛必达法则求未定式极限的方法．

由于函数的连续性是通过极限定义的，所以按定义判断函数是否连续以及判断间断点的类型等问题，本质上是求极限的问题．因此这部分也是本章的重点．这部分考试内容包括：函数连续性概念，函数间断点的类型，初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质．考试要求是：理解连续函数的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型．了解连续函数的性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质．

二、基本内容与重要结论

1.1 函数的有关概念和几类常见的函数

(一) 函数的定义

函数 设 D 是一个给定的数集,如果对于每个数 $x \in D$,变量 y 按照一定法则总有一个确定的数值和它对应,则称变量 y 是变量 x 的**函数**,记做 $y = f(x)$,数集 D 叫做函数 $y = f(x)$ 的**定义域**,x 叫做**自变量**,y 叫做**因变量**.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的**函数值**,记做 $f(x_0)$,当 x 取遍 D 的每一个数值时,对应的函数值的全体组成的数集

$$Z = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y = f(x)$ 的**值域**.

(二) 几类常见的函数

有界函数 如果存在数 $M > 0$,使得

$$|f(x)| \leqslant M$$

对于任何 $x \in X$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**,数 M 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个界,否则称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**.

如果函数 $f(x)$ 在其定义域上有界,则称为**有界函数**;否则称为**无界函数**.

单调函数 设函数 $f(x)$ 的定义域是 D,区间 $I \in D$.如果对于任何 $x_1, x_2 \in I$,只要 $x_1 < x_2$,就有 $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**(**单调减少**).

如果对任何 $x_1, x_2 \in I$,只要 $x_1 < x_2$,就有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \geqslant f(x_2))$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上**单调不减**(**单调不增**).

奇函数与偶函数 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称.如果对于任何 $x \in D$,总有 $f(x) = f(-x)$ $(f(x) = -f(-x))$,则称 $f(x)$ 在 D 上为**偶函数**(**奇函数**).

偶函数的图形关于 y 轴对称;奇函数的图形关于原点对称.

周期函数 设函数 $f(x)$ 的定义域是 D.如果存在常数 $T \neq 0$,使得对于任何 $x \in D$,总有 $x \pm T \in D$,且 $f(x + T) = f(x)$,称 $f(x)$ 是以 T 为周期的**周期函数**.

显然,如果 T 是函数 $f(x)$ 的一个周期,则 T 的任何整数倍倍数也是函数 $f(x)$ 的周期,因而一个周期函数必有无穷多个周期;为了确定起见,我们所说的周期函数的周期都是指它的**最小正周期**.

设 T 是函数 $f(x)$ 的周期，则在定义域内每个长度为 T 的区间上，$f(x)$ 的图形有相同的形状.

（三）反函数、复合函数、初等函数与隐函数

反函数 设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D，值域是 Z. 如果对于每个 $y\in Z$，存在惟一的 $x\in D$ 满足 $f(x)=y$，把 y 看做自变量，把 x 看做因变量，则 x 是一个定义在 $y\in Z$ 上的函数，记此函数为

$$x=f^{-1}(y)\quad(y\in Z),$$

称之为 $y=f(x)\ (x\in D)$ 的**反函数**.

习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，所以通常把反函数表达式中的 x 和 y 对换，写成

$$y=f^{-1}(x)\quad(x\in Z)$$

的形式. 这样一来，在同一个直角坐标系中，函数 $y=f(x)\ (x\in D)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)\ (x\in Z)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

很明显，单调函数一定有反函数；若某个函数不是单调函数，但是它的定义域能够分为若干个单调区间，则在每个单调区间中该函数就有一个相应的反函数.

复合函数 设函数 $y=f(u)$ 的定义域是 D_f，值域是 Z_f，函数 $u=g(x)$ 的定义域是 D_g，值域是 Z_g. 如果 $Z_g\cap D_f\neq\varnothing$，则称函数

$$y=f[g(x)],\quad x\in D=\{x\mid g(x)\in D_f\}$$

是由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的**复合函数**. 变量 u 称为**中间变量**.

初等函数 常数函数、幂函数、对数函数、指数函数、三角函数和反三角函数等六种函数称为**基本初等函数**. 基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算所得到的函数称为**初等函数**.

初等函数有很多好的性质，它们是微积分的重要研究对象.

隐函数 设 $F(x,y)$ 是一个已知二元函数，I 是一个区间. 如果在区间 I 上存在函数 $y=y(x)$ 满足方程 $F(x,y)=0$，则称这个函数 $y=y(x)$ 为方程 $F(x,y)=0$ 在区间 I 上确定的**隐函数**.

（四）分段函数与积分上限的函数

在自变量的不同变化范围中，自变量与因变量的对应法则需用不同解析式来表示的函数称为**分段函数**. 绝对值函数 $y=|x|$，取整函数 $y=[x]$ 等都是分段函数.

若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，它在部分区间 $[a,x]$ 上的定积分在区间 $[a,b]$ 上定义了一个函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

称为**用变上限定积分定义的函数**或**积分上限的函数**.

在考研数学试题中经常出现这两类函数，因此有必要重视这两类函数的有关概念和运算.

1.2 极限的性质与两个重要极限

(一) 基本性质

(1) 极限的不等式性质

定理 1.1 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$，$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$. 若 $a > b \Rightarrow \exists N$，当 $n > N$ 时 $x_n > y_n$. 若 $n > N$ 时 $x_n \geqslant y_n \Rightarrow a \geqslant b$.

推论(保正性) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. 若 $a > 0 \Rightarrow \exists N$，当 $n > N$ 时 $x_n > 0$. 若 $n > N$ 时 $x_n \geqslant 0 \Rightarrow a \geqslant 0$.

定理 1.2 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$. 若 $A > B \Rightarrow \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) > g(x)$. 若 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) \geqslant g(x) \Rightarrow A \geqslant B$.

推论(保正性) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. 若 $A > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) > 0$. 若 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) \geqslant 0 \Rightarrow A \geqslant 0$. 其他极限过程也有类似的结论.

(2) 极限的惟一性.

(3) 有界性性质

定理 1.3 设 x_n 收敛 $\Rightarrow x_n$ 有界(即 $\exists$ 常数 $M > 0$ 使得 $|x_n| \leqslant M$ $(n = 1,2,3,\cdots)$).

定理 1.4 设存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Rightarrow f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域 $U_0(x_0,\delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 有界，即 $\exists \delta > 0, M > 0$，使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $|f(x)| \leqslant M$.

注 1：定理 1.4 中函数 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域有界，是函数的局部有界性.

注 2：其他的极限过程如 $x \to x_0 + 0, x \to x_0 - 0, x \to +\infty, x \to -\infty$ 等等也有类似的结论.

(二) 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

1.3 极限的存在与不存在问题

(一) 数列 x_n 敛散性的判别

1. 通过 x_n 与其他数列的关系

定理 1.5(夹逼定理)　若 $\exists N$，当 $n > N$ 时 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$，又 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$，则

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a.$$

还有其他一些极限运算法则，不仅证明了 x_n 收敛，还可求得极限值. 如 $x_n = y_n + z_n$ 或 $x_n = y_n \cdot z_n$，若 y_n, z_n 均收敛，则 x_n 收敛.

2. 通过 x_n 的自身性质

定理 1.6(单调有界数列必存在极限定理)

若数列 x_n 单调上升有上界，即 $x_{n+1} \geqslant x_n \quad (n = 1,2,3,\cdots)$ 并存在一个数 M 使得对任意的 n 有 $x_n \leqslant M$，则 x_n 收敛，即存在一个数 a 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ 并有 $x_n \leqslant a \quad (n = 1,2,\cdots)$.

若数列 x_n 单调下降有下界，即 $x_{n+1} \leqslant x_n \quad (n = 1,2,\cdots)$ 并存在一个数 m 使得对任意 n 有 $x_n \geqslant m$，则 x_n 收敛，即存在一个数 a 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ 且有 $x_n \geqslant a \quad (n = 1,2,\cdots)$.

3.（数二不要求）通过数列与级数的关系

x_n 的敛散性与级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x_{n+1} - x_n)$ 的敛散性是相同的. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x_{n+1} - x_n)$ 的部分和是 $\sum\limits_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_1$.

(二) 函数 $y = f(x)$ 的极限的存在与不存在问题

关于函数极限存在性的两个结论

定理 1.7(夹逼定理)　设 $\exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. 又

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = A$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

定理 1.8(单侧极限与双侧极限的关系)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A.$$

对于分段函数

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x_0 - \delta < x < x_0, \\ h(x), & x_0 < x < x_0 + \delta. \end{cases}$$

考察 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 是否存在时，就要分别求

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} h(x) \quad 与 \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} g(x).$$

1.4　无穷小量和它的阶

（一）无穷小量、极限、无穷大量

1. 无穷小量与无穷大量的定义

定义 1.1　在某一极限过程中以零为极限的变量称为**无穷小量**(或**无穷小**). 无穷小量记为 $o(1)$.

定义 1.2　称 x_n 为**无穷大量**($\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty$), 若 $\forall M > 0$, $\exists$ 自然数 N, 当 $n > N$ 时 $|x_n| > M$.

类似地定义 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 为无穷大量($\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$), $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 为无穷大量($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$).

也可类似定义**正无穷大量**和**负无穷大量**. 无穷大量也称为**无穷大**.

2. 无穷小量与极限, 无穷小量与无穷大量的关系

无穷小量与极限的关系：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x) = o(1)$ $(x \to x_0)$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

无穷小量与无穷大量的关系：在同一个极限过程中,

$$f(x) \text{ 为无穷小量}, f(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \text{ 为无穷大量}.$$

$$f(x) \text{ 为无穷大} \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \text{ 为无穷小}.$$

（二）无穷小的阶

1. 定义

定义 1.3　设在同一个极限过程中, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 为无穷小, 存在极限 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = l$. ① 若 $l \neq 0$, 称 $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 在该极限过程中为**同阶无穷小**; ② 若 $l = 1$, 称 $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 在该极限过程中为**等价无穷小**, 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$(极限过程); ③ 若 $l = 0$, 称在此极限过程中 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小, 记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$(极限过程). 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 不存在(不为 ∞), 称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 不可比较.

定义 1.4　设在同一个极限过程中, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 为无穷小. 以 $\alpha(x)$ 为基本无穷小, 若 $\exists \lim \frac{\beta(x)}{\alpha^k(x)} = l \neq 0$, 即 $\beta(x)$ 与 $\alpha^k(x)$ 为同阶无穷小, 称 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的 **k 阶无穷小**.

2. 常见的等价无穷小量

$x \to 0$ 时

$$\sin x \sim x,\ \arcsin x \sim x,\ \tan x \sim x,\ \arctan x \sim x,$$
$$\ln(1+x) \sim x,\ \mathrm{e}^x - 1 \sim x,\ a^x - 1 \sim x\ln a,$$
$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2,\ (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x.$$

(三) 无穷小量阶的运算性质

设 $x \to x_0$ 时 $\alpha(x),\beta(x)$ 分别是$(x - x_0)$ 的 n 阶与 m 阶无穷小，又 $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A \neq 0$，则

$\alpha(x) \cdot h(x)$ 是$(x - x_0)$ 的_______阶无穷小.　　答案　(n)

$\alpha(x) \cdot \beta(x)$ 是$(x - x_0)$ 的_______阶无穷小.　　$(n + m)$

$n > m$ 时 $\alpha(x) + \beta(x)$ 是$(x - x_0)$ 的_______阶无穷小.　　(m)

$n > m$ 时 $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 是$(x - x_0)$ 的_______阶无穷小.　　$(n - m)$

$\alpha(x) \geqslant 0\ (0 < |x - x_0| < \delta), k > 0$ 时 $\alpha^k(x)$ 是$(x - x_0)$ 的_______无穷小.　(kn)

注意：$n = m$ 时能否确定 $\alpha(x) + \beta(x)$ 是 $x - x_0$ 的几阶无穷小?不能.

$x \to 0$ 时 $x, \sin x, \tan x$ 均是 x 的一阶无穷小. $x + \sin x$ 是 x 的一阶无穷小.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \sin x}{x} = 2.$$

但 $\tan x - \sin x$ 是 x 的三阶无穷小：因为

$$\tan x - \sin x = \tan x(1 - \cos x),$$

$\tan x$ 是 x 的一阶无穷小，$1 - \cos x$ 是 x 的二阶无穷小.

(四) 等价无穷小的重要性质

等价无穷小有下面的性质

在同一个极限过程中

$$\alpha(x) \sim \alpha^*(x),\ \beta(x) \sim \beta^*(x) \Rightarrow \lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}.$$

该结论表明：在求极限过程中等价无穷小因子可以替换.

在求极限过程中，等价无穷小因子替换常常会简化计算.因此要很好地应用它.

(五) 确定无穷小阶的方法

设 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$，如何确定当 $x \to a$ 时 $f(x)$ 是$(x - a)$ 的几阶无穷小?

① 利用洛必达法则确定 $k > 0$ 使得 $\exists$ 极限

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x - a)^k} = l \neq 0.$$

则 $x \to a$ 时 $f(x)$ 是 $x-a$ 的 k 阶无穷小.

② 用泰勒公式

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n) \quad (x \to a).$$

若
$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0 \Rightarrow$$
$$f(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

$\Rightarrow f(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶无穷小.

不论用什么方法,若能求得

$$f(x) = A(x-a)^n + o((x-a)^n) \quad (x \to a),$$

其中 $A \neq 0 \Rightarrow x - a$ 时 $f(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶无穷小.

③ 用无穷小阶的运算性质

判断无穷小 $f(x), g(x)$ $(x \to a)$ 是否同阶,等价或谁比谁高阶的最基本方法是求 $\frac{0}{0}$ 型极限:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} l \neq 0, l \neq 1, & \text{同阶而不等价}, \\ 1, & \text{等价}, \\ 0, & f(x) \text{ 比 } g(x) \text{ 高阶}, \\ \infty, & f(x) \text{ 比 } g(x) \text{ 低阶}. \end{cases}$$

或分别写出泰勒展开式:

$$f(x) = A(x-a)^n + o((x-a)^n) \quad (x \to a), A \neq 0,$$
$$g(x) = B(x-a)^m + o((x-a)^m) \quad (x \to a), B \neq 0.$$

若 $n > m \Rightarrow f(x) = o(g(x))$ $(x \to a)$.

若 $n = m, A \neq B \Rightarrow f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶而不等价的无穷小 $(x \to a)$.

若 $n = m, A = B \Rightarrow f(x) \sim g(x)$ $(x \to a)$.

1.5 求极限的方法

本节综述求极限的各种方法.

(一) 极限的四则运算与幂指数运算法则

我们应掌握以下极限运算法则:

定理 1.9

① 设 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A, \lim\limits_{x \to a} g(x) = B$,则

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B,\quad \lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=AB,$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\ (B\neq 0),\quad \lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=A^B\ \ (A>0);$$

② 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$,当$0<|x-a|<\delta$时$g(x)$有界$\Rightarrow$

$$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=0;$$

③ 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty(+\infty)$,$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty(+\infty)$或$\lim\limits_{x\to a}g(x)=A\neq 0(A>0)\Rightarrow$

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=\infty(+\infty);$$

④ 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty(+\infty)$,当$0<|x-a|<\delta$时$g(x)$有界$\Rightarrow$

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\infty(+\infty);$$

⑤ 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$,则$\lim\limits_{x\to a}A^{f(x)}=\begin{cases}0 & (0<A<1)\\ +\infty & (A>1)\end{cases}$.

对以下未定式不能直接用上述运算法则:

$$\frac{0}{0}\text{型},\frac{\infty}{\infty}\text{型}\left(\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\right),0\cdot\infty\text{型}(\lim_{x\to a}f(x)g(x)),$$

$$\infty-\infty\text{型}(\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))),0^0,1^\infty,\infty^0\text{型}(\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}).$$

这些未定式中最基本的是$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型,其他的可转化为这种类型.

求$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型的极限的方法是:想办法转化为可以直接用四则运算法则的情形,其中一个方法是:设法消去分子与分母中极限为零或∞的因子,然后再用极限的四则运算法则(后面将介绍其他方法).

(二)用洛必达法则求未定式的极限

求$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式极限更常用的方法是用洛必达法则.

定理 1.10　设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0\ (\infty)$,$\lim\limits_{x\to a}g(x)=0\ (\infty)$;$f(x)$,$g(x)$在$x=a$的空心邻域可导,$g'(x)\neq 0$;$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$

$$\Rightarrow\qquad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

其中A可以是有限数,也可以是∞.

注:将$x\to a$换成$x\to a^+$或$x\to a^-$或$x\to\infty$也有相应的洛必达法则.

应用洛必达法则时应注意:

① 要验证应用洛必达法则的条件.若$\lim\frac{f(x)}{g(x)}$不是$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型的,或$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$不存在,不能用洛必达法则.

② 若$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$还是$\dfrac{0}{0}$型$\left(或\dfrac{\infty}{\infty}\right)$，可连续用洛必达法则，只要符合条件，一直可用到求出极限为止.

③ 其他类型的未定式($0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,1^\infty,\infty^0$等)，先化成$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型的，再用洛必达法则. 指数型的未定式$\lim f(x)^{g(x)}(1^\infty,0^0,\infty^0)$总可用公式

$$\lim f(x)^{g(x)}=\lim e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}$$

化成$0\cdot\infty$型的，因为$\lim(g(x)\ln f(x))$总是$0\cdot\infty$型的，因而总可化成$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型的.

④ 使用洛必达法则也要用到一些技巧. 如恒等变形，变量替换，等价无穷小因子的替换，有确定极限的因子应先求出等. 如果$\lim f(x)^{g(x)}$是1^∞型的，由于$\lim f(x)=1$，

$$\ln f(x)=\ln[f(x)-1+1]\sim f(x)-1,$$

于是

$$\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}=e^{\lim[g(x)(f(x)-1)]}.$$

这种等价无穷小因子替换有时可简化计算.

（三）利用函数的连续性求极限

设$f(x)$在$x=a$连续，按定义则有

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

因此，对连续函数求极限就是用代入法求函数值.

一切初等函数在它的定义域上连续. 因此，若$f(x)$是初等函数，a属于它的定义域，则

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

（四）利用变量替换法与两个重要极限求极限

通过变量替换，把求某个极限转化为求另一个极限，若后者是已知的，则问题就解决了.

变量替换法求极限就是复合函数求极限.

① 设$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，$f(u)$在$u_0$连续$\Rightarrow$

$$\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))\xlongequal[x\to x_0\text{时}\ u\to u_0]{u=\varphi(x)}\lim_{u\to u_0}f(u)=f(u_0);$$

② 设$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$，$\lim\limits_{u\to+\infty}f(u)=A\Rightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty}f(\varphi(x))\xlongequal[x\to+\infty\text{时}\ u\to+\infty]{u=\varphi(x)}\lim_{u\to+\infty}f(u)=A.$$

读者还可见到其他形式的变量替换：如①中$x\to x_0$可以换成$x\to+\infty$，②中$x\to+\infty$可以换成$x\to-\infty$或$x\to x_0$等等.

由重要极限