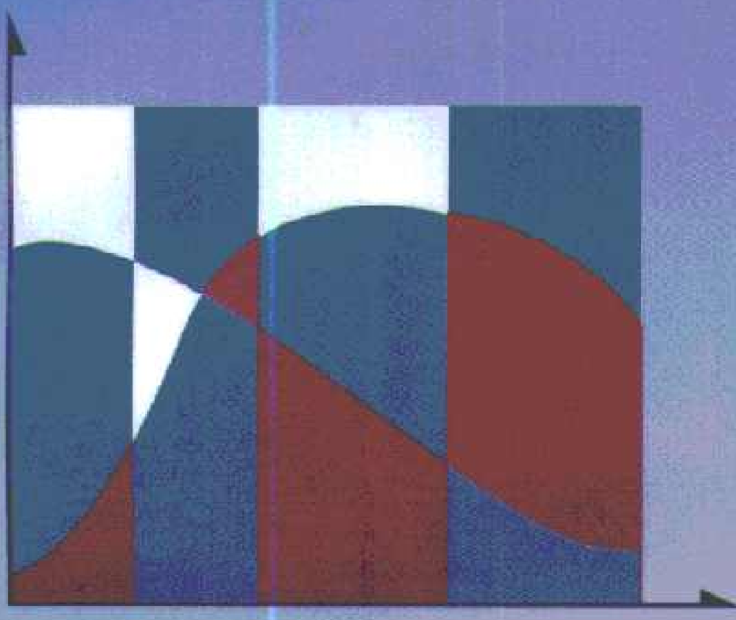
统计学专业教材系列

王学民 编著

应用多元分析

YINGYONG DUOYUAN FENXI



上海财经大学出版社

611

本项目获上海财经大学资助出版

应用多元分析

YINGYONG DUOYUAN FENXI

王学民　编著

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用多元分析/王学民编著 —上海:上海财经大学出版社,1999.8

ISBN 7-81049-340-x/F·288

Ⅰ.应… Ⅱ.王… Ⅲ.多元分析 Ⅳ.0212.4

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第26429号

YINGYONG DUOYUAN FENXI

应 用 多 元 分 析

王学民 编著

责任编辑 王联合 封面设计 甘晓培

上海财经大学出版社出版发行
(上海市中山北一路369号 邮编200083)
上海印刷十厂印刷
上海浦江装订厂装订
1999年9月第1版 1999年9月第1次印刷

850mm×1168mm 1/32 10.5印张 272千字
印数1—3 000 定价:23.00元

前　言

多元分析是数理统计学的一个重要分支，具有很强的应用性，它在自然科学、社会科学和经济学等各领域中得到了越来越广泛的应用，是一种非常有用的数据处理方法。

目前国内已出版的多元分析书籍中适合于财经类院校学生使用的较少。本书的编写目标是提供一本适合于财经类院校的本科生和研究生使用的教材。书中的绝大部分内容曾向上海财经大学统计系的本科生和研究生讲授过。

本教材的主要特点：(1)本书对数学基础知识的要求较低，只需读者掌握初步的微积分、线性代数和概率统计知识。为便于非统计专业的读者能顺利地阅读本书，书中前几个章节对矩阵代数和一元统计知识作了简单的回顾。(2)书中提供的许多例题和习题为读者展示了多元分析在社会科学和经济学领域中的应用。(3)多元分析中遇到的计算量一般是非常大的，不借助于计算机往往难以实现。书中给出了许多例题的 SAS 程序及输出，使读者对多元分析的意义能够有贴切的体会，便于读者进入应用的领域。(4)本书尽可能地简化数学理论，避开较难的数学内容和工具，深入浅出，使多元分析的基础理论通俗易懂。全书着重阐述多元分析的统计思想和方法。

全书共分九章。第一章介绍了多元分析中常用的矩阵代数知识，这是全书的基础。第二章至第四章介绍的是一元统计推广到多元统计的内容，主要阐述了多元正态分布及其统计推断。第五章至第九章是多元统计独有的内容，这部分内容具有很强的实用性，特别是介绍了各种降维技术，将原始的多个指标约化为少数几个综合指标，便于对数据进行分析。书中的一些数学证明和理论性较强的内容被安排在打“＊”号的章节或段落里，非统计专业的读者可

将其作为选读内容。

本书能顺利完成，得到了徐国祥教授的大力支持，在此表示衷心的感谢。此外，还要感谢吴泽智、刘霓、董欣和喻世红四位同学为本书的书稿誊写付出的辛勤劳动。

由于编者水平有限，书中错误、不足之处在所难免，恳请读者批评指正。

王学民

1998年11月

第一章　矩阵代数

本章我们对书中需要用到的有关矩阵代数知识作一简单的回顾和介绍，熟悉这些内容将为以后各章的阅读带来很大方便。如果读者希望对这方面知识有更多、更详细的了解，可参考有关的教科书。

§1.1　定义

将 $p\times q$ 个实数 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{pq}$ 排列成的一个有 p 行、q 列的矩阵列

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

称为 $p\times q$ 矩阵，常记作 $A=(a_{ij}):p\times q$，其中 a_{ij} 是第 i 行、第 j 列的元素。例如，矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

是一个 2×3 矩阵，其中 $a_{11}=5,a_{12}=2,a_{13}=9,a_{21}=3,a_{22}=7,a_{23}=1$。

若 $q=1$，则称 A 为 p 维列向量，记作

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$$

例如，带有元素 6,9 和 3 的 3 维列向量可写为

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}6\\9\\3\end{pmatrix}$$

若 $p=1$，则称 A 为 q 维行向量，记作

$$\boldsymbol{a}'=(a_1,a_2,\cdots,a_q)$$

例如，带有元素 2,7,3,4,3 的 5 维行向量可写为

$$\boldsymbol{a}'=(2,7,3,4,3)$$

若 A 的所有元素全为零，则称 A 为零矩阵，记作 $A=0_{pq}$ 或 $A=0$。例如，

$$0_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

若 $p=q$，则称 A 为 p 阶方阵，$a_{11},a_{22},\cdots,a_{pp}$ 称为它的对角线元素，其它元素 $\{a_{ij},i\neq j\}$ 称为非对角线元素。

若方阵 A 的对角线下方的元素全为零，则称 A 为上三角矩阵。显然，$a_{ij}=0,i>j$。例如，

$$\begin{pmatrix}4&1&3\\0&8&9\\0&0&7\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}3&1\\0&4\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}2&5&0\\0&4&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

若方阵 A 的对角线上方的元素全为零，则称 A 为下三角矩阵。显然，$a_{ij}=0,i<j$。

若方阵 A 的所有非对角线元素均为零，则称 A 为对角矩阵，简记为 $A=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{pp})$。例如，

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

若 p 阶对角矩阵 A 的所有 p 个对角线元素均为 1，则称 A 为 p 阶单位矩阵，记作 $A=I_p$ 或 $A=I$。例如，

$$I_1=(1),\quad I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

若将矩阵 A 的行与列互换，则得到的矩阵称为 A 的转置，记作 A'，即

$$A'=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{p1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{p2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1q}&a_{2q}&\cdots&a_{pq}\end{pmatrix}$$

例如，若

$$A=\begin{pmatrix}1&3&1\\2&4&6\end{pmatrix}$$

则

$$A'=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\1&6\end{pmatrix}$$

若 A 是方阵，且 $A'=A$，则称 A 为对称矩阵。显然，$a_{ij}=a_{ji}$。例如，

$$\begin{pmatrix}1&3\\3&4\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}9&0&0\\0&7&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}2&3&5\\3&0&1\\5&1&1\end{pmatrix}$$

若 A 是方阵，且 $A'=-A$，则称 A 为斜对称矩阵。显然，$a_{ii}=0$，$a_{ij}=-a_{ji}$。例如，

$$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&1\\-2&-1&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&-3&-1\\3&0&4\\1&-4&0\end{pmatrix}$$

§1.2 矩阵的运算

若 $A=(a_{ij}):p\times q$，$B=(b_{ij}):p\times q$，则 A 与 B 的和定义为

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij}):p\times q$$

若 c 为一常数，则它和 A 的积定义为

$$cA=(ca_{ij}):p\times q$$

若 $A=(a_{ij}):p\times q$，$B=(b_{ij}):q\times r$，则 A 与 B 的积定义为

$$AB=\left(\sum_{k=1}^{q} a_{ik}b_{kj}\right):p\times r$$

从上述定义中容易得出如下的规律：

(1) $(A+B)'=A'+B'$。

(2) $(AB)'=B'A'$。

(3) $A(B_1+B_2)=AB_1+AB_2$。

(4) $A\left(\sum_{\alpha=1}^{k} B_\alpha\right)=\sum_{\alpha=1}^{k} AB_\alpha$。

(5) $c(A+B)=cA+cB$。

例 1.2.1

设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}6 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

则

(1) $A'=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix}$，$B'=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 0 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$；

(2) $A+B=\begin{pmatrix}7 & 4 & 4\\ 6 & 2 & 9\end{pmatrix}$；

(3) $(A+B)'=A'+B'=\begin{pmatrix}7 & 6\\ 4 & 2\\ 4 & 9\end{pmatrix}$；

(4) $CA=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5 & 7\\ 11 & 11 & 19\end{pmatrix}$。

注意:AC 是没有定义的。

若方阵 A 满足 $AA'=I$,则称 A 为正交矩阵。显然,$\sum_{j=1}^{p} a_{ij}^2=1$, $i=1,2,\cdots,p$,称 A 的 p 个行向量为单位向量;$\sum_{j=1}^{p} a_{ij}a_{kj}=0$, $i\neq k$,称 A 的 p 个行向量相互正交。又从 $A'A=I$ 得:$\sum_{i=1}^{p} a_{ij}^2=1$, $\sum_{i=1}^{p} a_{ij}a_{ik}=0(j\neq k)$,即 A 的 p 个列向量也是一组正交单位向量。例如,

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2\cdot 1}} & \frac{-1}{\sqrt{2\cdot 1}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3\cdot 2}} & \frac{1}{\sqrt{3\cdot 2}} & \frac{-2}{\sqrt{3\cdot 2}}\end{pmatrix}$$

若方阵 A 满足 $A^2=A$,则称 A 为幂等矩阵。例如,

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

对称的幂等矩阵称为投影矩阵。

矩阵的分块是在处理阶数较高的矩阵时常用的方法。有时,我们把一个大矩阵看成是由一些小矩阵组成的,就像矩阵是由数组成的一样。设 $A=(a_{ij}):p\times q$,将它分成四块,表示成

$$A=\left(\begin{array}{c:c}A_{11} & A_{12}\\ \hdashline A_{21} & A_{22}\end{array}\right)$$

其中 $A_{11}:k\times l$, $A_{12}:k\times(q-l)$, $A_{21}:(p-k)\times l$, $A_{22}:(p-k)\times(q-$

l)。例如，若

$$A_{11}=\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix},\quad A_{12}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\quad A_{21}=(5,4),\quad A_{22}=(6)$$

则

$$A=\left(\begin{array}{cc:c}1 & 3 & 3\\2 & 4 & 1\\ \hdashline 5 & 4 & 6\end{array}\right)$$

若 A 和 B 有相同的分块，则

$$A+B=\begin{pmatrix}A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12}\\A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22}\end{pmatrix}$$

若 C 为 $q\times r$ 矩阵，分成

$$C=\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12}\\C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}$$

其中 $C_{11}:l\times m, C_{12}:l\times(r-m), C_{21}:(q-l)\times m, C_{22}:(q-l)\times(r-m)$，则有

$$\begin{aligned}AC&=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12}\\C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}A_{11}C_{11}+A_{12}C_{21} & A_{11}C_{12}+A_{12}C_{22}\\A_{21}C_{11}+A_{22}C_{21} & A_{21}C_{12}+A_{22}C_{22}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

§1.3 行列式

p 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的行列式定义为

$$|A|=\sum_{j_1j_2\cdots j_p}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_p)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{pj_p} \tag{1.3.1}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_p}$ 表示对 $1,2,\cdots,p$ 的所有排列求和，$\tau(j_1j_2\cdots j_p)$ 是排列 $j_1,j_2,\cdots,j_p$ 中逆序的总数，称它为这个排列的逆序数，一个逆序是指在一个排列中一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数。例如，$\tau(3,1,4,2)=1+\tau(1,3,4,2)=3+\tau(1,2,$

3,4)=3。

例 1.3.1

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3\times 6 - 2\times 1 = 16$;

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

是一个四阶行列式,在展开式中应该有 4! =24 项,但不为零的项只有 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 这一项,而 $\tau(4321)=6$,所以,该行列式为 $(-1)^6\times 1\times 2\times 3\times 4=24$。

由行列式的定义可以得到如下的一些基本性质:

(1) 若 A 的某行(或列)为零,则 $|A|=0$。

(2) $|A'|=|A|$。

(3) 若将 A 的某一行(或列)乘以常数 c,则所得矩阵的行列式为 $c|A|$。

(4) 若 A 是一个 p 阶方阵,c 为一常数,则 $|cA|=c^p|A|$。

(5) 若互换 A 的任意两行(或列),则行列式符号改变。

(6) 若 A 的某两行(或列)相同,则行列式为零。

(7) 若将 A 的某一行(或列)的倍数加到另一行(或列),则所得行列式不变。

(8) 若 A 的某一行(或列)是其它一些行(或列)的线性组合,则行列式为零。

(9) 若 A 为上三角矩阵或下三角矩阵或对角矩阵,则 $|A| = \sum_{i=1}^{p} a_{ii}$。

(10) 若 A 和 B 均为 p 阶方阵,则 $|AB|=|A||B|$。

(11) $|AA'|\geqslant 0$。

证明　由本章 §1.7 中的性质(4)知,AA'为非负定矩阵,故

有$|AA'|\geqslant 0$。

(12) 若 A 与 B 都是方阵，则

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B| \tag{1.3.2}$$

证明 设 $A=(a_{ij}):p\times p, B=(b_{kl}):q\times q$，则由行列式的定义(1.3.1)式可得

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} &= \sum_{\substack{j_1\cdots j_p \\ l_1\cdots l_q}} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_p(p+l_1)\cdots(p+l_q))} a_{1j_1}\cdots a_{pj_p} b_{1l_1}\cdots b_{ql_q} \\ &= \sum_{\substack{j_1\cdots j_p \\ l_1\cdots l_q}} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_p)} a_{1j_1}\cdots a_{pj_p} \cdot (-1)^{\tau(l_1\cdots l_q)} b_{1l_1}\cdots b_{ql_q} \\ &= \sum_{j_1\cdots j_p} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_p)} a_{1j_1}\cdots a_{pj_p} \\ &\quad \cdot \sum_{l_1\cdots l_q} (-1)^{\tau(l_1\cdots l_q)} b_{1l_1}\cdots b_{ql_q} \\ &= |A||B|\end{aligned}$$

(13) 若 $A:p\times q, B:q\times p$，则

$$|I_p+AB| = |I_q+BA| \tag{1.3.3}$$

证明 因为

$$\begin{pmatrix} I_p & A \\ 0 & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_p & -A \\ B & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p+AB & 0 \\ B & I_q \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -B & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_p & -A \\ B & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & -A \\ 0 & I_q+BA \end{pmatrix}$$

上述两个等式两边各取行列式，故得

$$|I_p+AB| = |I_q+BA|$$

例 1.3.2 设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 为两个 p 维向量，则

$$|I_p+\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}'| = 1+\boldsymbol{y}'\boldsymbol{x}$$

设 A 为 p 阶方阵，将其元素 a_{ij}所在的第 i 行与第 j 列划去所得$(p-1)$阶矩阵的行列式，称为元素 a_{ij}的子式，记为 M_{ij}。$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$称为元素 a_{ij}的代数余子式。有以下公式成立

$$|A| = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{p} a_{ij}A_{ij} \tag{1.3.4}$$

$$\sum_{j=1}^{p} a_{kj}A_{ij} = 0 \quad (k \neq i), \qquad \sum_{i=1}^{p} a_{ik}A_{ij} = 0 \quad (k \neq j)$$

例 1.3.3 设

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 10 & 1 \\ 7 & 10 & 7 & 6 \\ 9 & 8 & 12 & 2 \\ 4 & 9 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

a_{32}的子式为

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 6 & 10 & 1 \\ 7 & 7 & 6 \\ 4 & 11 & 3 \end{vmatrix}$$

其代数余子式为

$$A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -M_{32}$$

§1.4 矩阵的逆

若方阵 A 满足 $|A| \neq 0$,则称 A 为非退化方阵;若 $|A| = 0$,则称 A 为退化方阵。若 $A = (a_{ij})$是一非退化方阵,令

$$B' = (A_{ij})/|A| \tag{1.4.1}$$

其中 A_{ij}是 a_{ij}的代数余子式,则有 $AB = BA = I$,称 B 为 A 的逆,记作 $B = A^{-1}$。由于 $|B| = 1/|A| \neq 0$,所以 B 也是一个非退化方阵。若方阵 C 满足 $AC = I$,则 $C = BAC = B$;同样,若方阵 D 满足 $DA = I$,则 $D = DAB = B$。因此,A^{-1}是唯一的,且$(A^{-1})^{-1} = A$。

逆矩阵具有如下的基本性质:

(1) $AA^{-1} = A^{-1}A = I$。

(2) $(A')^{-1} = (A^{-1})'$。

(3) 若 A 和 C 均为 p 阶非退化方阵,则

$$(AC)^{-1}=C^{-1}A^{-1}$$

（4） $|A^{-1}|=|A|^{-1}$。

（5） 若 A 是正交矩阵，则 $A^{-1}=A'$。

（6） 若 $A=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{pp})$ 非退化（即 $a_{ii}\neq 0$， $i=1,2,\cdots,p$），则 $A^{-1}=\mathrm{diag}(a_{11}^{-1},a_{22}^{-1},\cdots,a_{pp}^{-1})$。

（7） 若 A 和 B 为非退化方阵，则

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \tag{1.4.2}$$

例 1.4.1 设

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

于是 $|A|=15$，$A_{11}=(-1)^{1+1}\times 6=6$，$A_{12}=(-1)^{1+2}\times 3=-3$，$A_{21}=(-1)^{2+1}\times(-1)=1$，$A_{22}=(-1)^{2+2}\times 2=2$，故 A 的逆矩阵为

$$A^{-1}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$$

例 1.4.2 设

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

则

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}^{-1} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \quad 0 \end{matrix} & (-4)^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{15} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{15} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

§1.5 矩阵的秩

设 A 为 $p\times q$ 矩阵，若存在 A 的一个 r 阶子方阵的行列式不为零，而 A 的一切$(r+1)$阶子方阵的行列式均为零，则称 A 的秩为 r，记作 $\operatorname{rank}(A)=r$。

矩阵的秩具有下述基本性质：

(1) $\operatorname{rank}(A)=0$，当且仅当 $A=0$。

(2) 若 A 为 $p\times q$ 矩阵，且 $A\neq 0$，则 $1\leqslant\operatorname{rank}(A)\leqslant\min\{p,q\}$。

(3) $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A')$。

(4) 若A 为 $p\times q$ 矩阵，B 为 $p\times r$ 矩阵，则

$$\max\{\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)\}\leqslant\operatorname{rank}(A\,\vdots\,B)$$
$$\leqslant\min\{p,\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)\}$$

(5) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$。

(6) $\operatorname{rank}(AB)\leqslant\min\{\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)\}$。

(7) $\operatorname{rank}(A+B)\leqslant\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$。

(8) 若 A 和 C 为非退化方阵，则

$$\operatorname{rank}(ABC)=\operatorname{rank}(B)$$

(9) p 阶方阵 A 是非退化的，当且仅当 $\operatorname{rank}(A)=p$(称作 A 是满秩的)。

例 1.5.1 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

1 阶子方阵的行列式是 1 和-2，而$|A|=-2-(-2)=0$，故矩阵 A 的秩是 1。

例 1.5.2 设

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4\\1 & 2\end{pmatrix}$$

由于$|A|=6-4=2\neq 0$,所以 A 的秩是 2。

§1.6 特征值和特征向量

设 A 是 p 阶方阵,若对于一个数 λ,存在一个 p 维非零向量 $\boldsymbol{x}$,使得 $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$,则称 λ 为 A 的一个特征值或特征根,而称 $\boldsymbol{x}$ 为 A 的属于特征值 λ 的一个特征向量。由该定义有,$(A-\lambda I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,而 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,故必有

$$|A-\lambda I|=0 \tag{1.6.1}$$

$|A-\lambda I|$是 λ 的 p 次多项式,称为特征多项式。(1.6.1)式有 p 个根(可能有重根),记作 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$,它们可能为实数,也可能为复数(虽然 A 是实数矩阵)。反过来,若 λ_i 是(1.6.1)式的一个根,则 $A-\lambda_i I$ 为退化矩阵,故存在一个 p 维非零向量 $\boldsymbol{x}_i$,使得

$$(A-\lambda_i I)\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{0} \tag{1.6.2}$$

即 λ_i 是 A 的一个特征值,而 $\boldsymbol{x}_i$ 是相应的特征向量。今后,一般取 $\boldsymbol{x}_i$ 为单位向量,即满足 $\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i=1$。

例 1.6.1 设

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\2 & 6\end{pmatrix}$$

于是

$$|A-\lambda I|=(3-\lambda)(6-\lambda)-4=(\lambda-2)(\lambda-7)$$

故 A 的特征值是 $\lambda_1=2$ 和 $\lambda_2=7$,相应的单位特征向量为

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{\sqrt{5}}\\[2ex]-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{5}}\\[2ex]\dfrac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

特征值和特征向量具有下述基本性质: