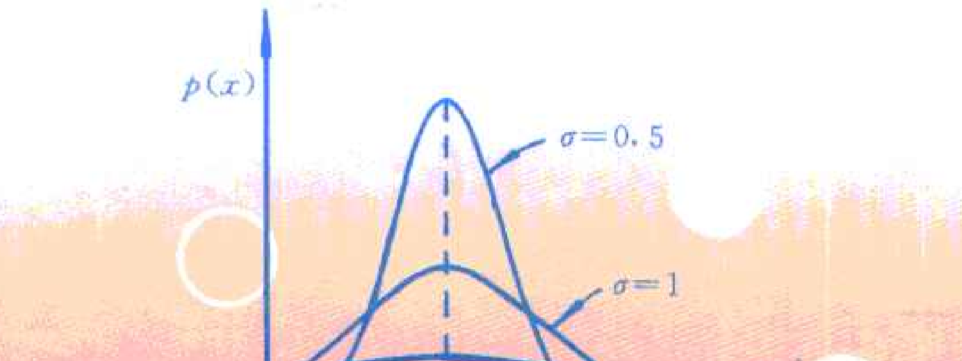
工程技术中常用的数学方法

（概率论与数理统计）

关颖男　王永葆　编



NEUPRESS
东北大学出版社

工程技术中常用的数学方法

（概率论与数理统计）

关颖男　王永葆　编

东 北 大 学 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

工程技术中常用的数学方法：概率论与数理统计/关颖男，王永葆编．—沈阳：东北大学出版社，2000.9

ISBN 7-81006-542-4

Ⅰ．工…　Ⅱ．①关…　②王…　Ⅲ．工程数学-概率论-数理统计　Ⅳ．O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（96）第 13725 号

（沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号　　邮政编码：110006）

电话：（024）23890881　　传真：（024）23892538

网址：http：//www.neupress.com　e-mail：neuph@neupress.com

铁岭新华印刷厂印刷　　东北大学出版社发行

开本：787×1092　1/32　　字数：258 千字　　印张：11.5

印数：14201～15200 册

2000 年 9 月第 2 版　　2000 年 9 月第 5 次印刷

责任编辑：刘　莹　　责任校对：米　戎

封面设计：唐敏智　　责任出版：秦　力

定价：15.00 元

前　言

随着科学技术的发展，概率统计、线性代数等工程数学方法广泛地应用于工程技术各个领域，成为工程技术人员必须掌握的数学工具。但是，由于种种原因，有些工程技术人员因未能较好地掌握它们，而满足不了工作的需要。另外，概率统计、线性代数等工程数学课程，又是工科大专院校学生的必修课。如何使学生在较短的学时内能灵活掌握工程技术中常用的数学方法，这是工科大学教育的一个重要问题。

编写本书的目的就是为了满足上述两种需要。在内容选取上，力求贯彻“少而精”和理论联系实际的原则，多列举一些较典型的解决实际问题的例子，尽量避免不必要的数学推导；编写方法上力求从实例出发，深入浅出，纲目清晰，突出基本概念、基本方法和基本计算。并且每节都配备了难易适中的例题和习题，有助于读者消化、理解和掌握。

参加《工程技术中常用的数学方法——概率论与数理统计》编写的有：关颖男（第 1，2，3 章和综合测试题及解答）、王永葆（第 4，5，6 章），由关颖男主编。

在编写过程中，得到了东北大学数学系领导和东北大学出版社有关同志的大力支持和鼓励，有许多教师提出了很宝贵的意见和建议，在此一并表示感谢。

自本书 1992 年出版以来，很多读者对本书予以热情的关注，提出了很好的建议和意见，对此我们深表谢意。我们吸取

了有益的建议，对本书第一版进行了一些修改，同时也订正了个别的错误，这些修改由关颖男完成。

由于水平有限，加之时间仓促，书中一定存在不少缺点和错误，恳请广大读者不吝指出。

编　者

2000年5月

1 随机事件及其概率

1.1 随机事件

1. 随机事件

(1) 随机现象与概率统计

在现实世界中,经常遇到两种现象,即确定性现象和随机性现象。在一定条件下,某种现象必然发生或必然不发生,则称此种现象为确定性现象。例如,在一个标准大气压下,水加热到100℃,“水沸腾”就是必然发生的现象,而“水结冰”就是必然不发生的现象,所以“水沸腾”和“水结冰”都是确定性现象。

在一定条件下,可能出现这样的结果,也可能出现那样的结果,而且在事前不能准确预言哪一个结果一定会出现,则称此现象为随机性现象。例如,掷一颗骰子观察它出现的点数。骰子可以重复掷,掷骰子之前虽然知道所有可能出现的结果是“1 点”、“2 点”、“3 点”、“4 点”、“5 点”、“6 点”,但是,每掷一次之前究竟会出现哪一点数事先不能确定。此种现象即是随机性现象。

对于随机性现象,人们经过长期实践并深入研究之后发现,这类现象虽然就每次试验或观察结果来说具有不确定性,但在大量重复试验或观察下,它的结果却呈现出某种规律性,即所谓统计规律性。例如,在上面例子中,经过多次重复掷骰子会发现,

出现“1 点”的次数约占总次数的 1/6 左右。再如，向桌面上抛掷一枚均质的硬币，抛掷之前虽然不能准确预言哪一面朝上，但多次重复抛掷会发现正面朝上的次数大致有一半。历史上，曾有许多人作过千万次抛掷硬币的试验，结论都是相同的。表 1.1.1 列出了 DeMorgan 等人的试验记录。概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科。

表 1.1.1

实验者	抛掷次数 n	出现“正面朝上”的次数 μ(频数)	频率$=\mu/n$
DeMorgan	2048	1061	0.518
Buffon	4040	2048	0.5069
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

（2）随机试验与随机事件

随机现象总是同随机试验相联系的，随机试验有下述特点：①在相同条件下试验可以重复进行；②试验的所有结果事先是已知的；③进行一次试验时，究竟哪一个结果会出现，事先不能确定。在概率论中，具有上述三个特点的试验或观察都称为随机试验，简称试验。

研究一个随机试验，首先关心的是试验的可能结果是什么。把试验的结果称为随机事件，简称事件。例如，在掷骰子这个随机试验中，“出现 1 点”，“出现奇数点”，“出现点数$\leqslant 4$”等结果都是事件。通常用大写拉丁字母 A,B,C 等表示事件。

（3）样本点与样本空间

随机试验中，每一次试验的结果称为一个基本事件或样本点。所有样本点的集合称为样本空间。常用希腊小写字母 ω 表示样本点，大写字母 Ω 表示样本空间。在具体讨论某随机试验时，首先要根据此随机试验的具体内容来确定进行一次试验可能出现的所有结果，以确定样本空间是由哪些基本事件构成的。

例 1.1.1 抛一枚硬币，观察正面 H(有花的一面)、反面 T 出现的情况。

“出现 H”、“出现 T”是此试验中进行一次试验可能出现的所有结果，所以

$$\Omega=\{\text{“出现 }H\text{”},\text{“出现 }T\text{”}\}$$

例 1.1.2 将一枚均质硬币抛两次，将两次结果作为一个考察单元，则此抛两次硬币的随机试验的样本空间是

$$\Omega=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$$

例 1.1.3 记录某电话交换台在一天中接到的呼唤次数，样本点是非负整数，由于不好确定呼唤次数的上界，故可以认为每个非负整数都是一个可能的结果，即

$$\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$$

例 1.1.4 向某一目标射击一发炮弹，观察着弹点的分布情况，每次试验的结果是“炮弹落在某平面区域 G 的某一点上”。在平面直角坐标系中，若着弹点的坐标为 (x,y)，则每一个 $(x,y)\in G$ 都是样本点，所以样本空间是 $\Omega=G$。

从上述例子可看出，随试验内容和观察目的的不同，相应的样本点和由样本点所构成的样本空间是不同的。

基本事件是不可分解的事件。某些事件是由基本事件复合而成的，叫做复合事件。例如，上面的掷骰子试验中，$\{1\}$，$\{2\}$，$\cdots$，$\{6\}$ 这 6 个事件都是基本事件。样本空间是 $\Omega=\{1,2,3,4,5,$

6}。而“出现偶数点”$=\{2,4,6\}$和“出现点$\leqslant 3$”$=\{1,2,3\}$都是复合事件，它们都是由 Ω 的某些基本事件复合而成的。由于每个随机事件都是由某些样本点组成的，所以，可以说每个随机事件都是样本空间的一个子集。因此，当且仅当该子集中一个样本点出现时，这一事件才发生。如设事件 A 表示“出现偶数点”，即 $A=\{2,4,6\}$，则在一次掷骰子试验中，当且仅当样本点 2,4,6 中的一个出现时，事件 A 才发生。

(4) 必然事件与不可能事件

在每次试验中必然发生的事件称为必然事件，在每次试验中必然不发生的事件称为不可能事件。必然事件和不可能事件本来没有不确定性，它们都不是随机事件，但为了讨论方便，而把它们当成一种特殊的随机事件。显然，必然事件就是样本空间 Ω。不可能事件通常记为 Φ。

2. 事件间的关系及运算

在一个随机试验中，有许多随机事件，有的随机事件本身就是一个基本事件，有的随机事件是由多个基本事件复合而成的复合事件。为了便于研究复合事件，有必要考察事件之间的关系及运算。

(1) 事件的包含和相等

若事件 A 发生，必然导致 B 发生，则称事件 B 包含事件 A（或称 A 被 B 包含），记作

$$A \subset B \text{ 或 } B \supset A$$

如在掷骰子试验中，令 $A=$“出现 2 点”，$B=$“出现偶数点”，则显然有 $A \subset B$（或 $B \supset A$）。

如果 $B \supset A$ 和 $A \supset B$ 同时成立，则称事件 A 与 B 相等，记

作 $A=B$。

(2) 事件的和(并)

事件 A 与事件 B 的和(并)是一个事件 C,它表示事件 A 与事件 B 中至少有一个发生,记作

$$C=A+B \text{ 或 } C=A\cup B$$

例 1.1.5 电路由两元件并联而成。如图 1.1.1 所示。

设 A="元件 I 导通"

B="元件 II 导通"

C="电路由 L 到 R 导通"。则易知

$$C=A+B$$

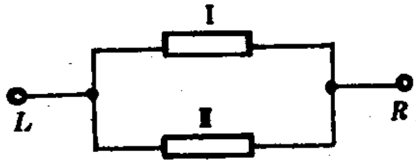


图 1.1.1

(3) 事件的积(交)

事件 A 与事件 B 的积(交)是一个事件 C,它表示事件 A 与 B 同时发生,记作

$$C=AB \text{ 或 } C=A\cap B$$

例 1.1.6 电路由两元件串联而成,如图 1.1.2 所示。

设 A="元件 I 导通"

B="元件 II 导通"

C="电路由 L 到 R 导通"。则易知

$$C=AB \text{ 或 } C=A\cap B$$

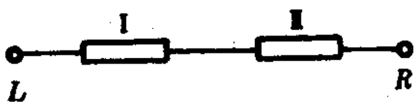


图 1.1.2

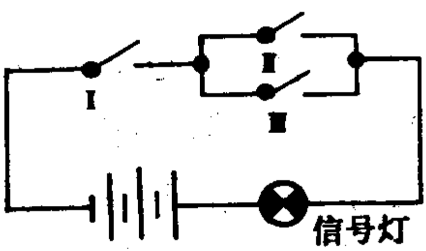


图 1.1.3

例 1.1.7 在图 1.1.3 的电路中,以 B 表示"信号灯亮"这一事件,以 A_1,A_2 和 A_3 分别表示继电器 I,II 和 III 闭合,则有

$$B=A_1A_2+A_1A_3$$

事件的和与事件的积的概念，可以推广到事件为有限个乃至无穷多个的情况。例如，$A=\sum_{i=1}^{\infty}A_i$，表示“$A_1,A_2,\cdots A_n,\cdots$中至少有一个事件发生”的事件。$B=\prod_{i=1}^{\infty}B_i$，表示“$B_1,B_2,\cdots B_n,\cdots$同时发生”的事件。

（4）事件的差

事件 A 与事件 B 的差是一个事件 C，它表示事件 A 发生而事件 B 不发生，记作 $C=A-B$。如在掷骰子试验中，令 $B=$“出现 2 点”，$A=$“出现偶数点”，则有

$$C=A-B=\text{“出现 4 点或 6 点”}$$

（5）互不相容事件（互斥事件）

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\Phi$，则称事件 A 与事件 B 是互不相容事件，或称为互斥事件。显然，基本事件是互不相容的。如果一组事件 $A_1,A_2,\cdots$中任意两个互斥，则称这一组事件互斥。例如，成品库中的零件是由甲、乙、丙三厂生产的，从中任取一个零件，若 $A=$“取到的零件是甲厂生产的”，$B=$“取到的零件是乙厂生产的”，$C=$“取到的零件是丙厂生产的”，则事件 A,B,C 互斥，这是因为取出一个零件不可能既是甲厂生产的，又是乙厂或丙厂生产的。

（6）对立事件（互逆事件）

若事件 A 与事件 B 同时满足：①$A+B=\Omega$；②$AB=\Phi$，则称事件 A 与事件 B 为对立事件，或称为互逆事件，记作 $B=\overline{A}$（读作非 A）。事件 $\overline{A}$ 是事件 A 的对立事件，$A+\overline{A}=\Omega$，也就是说，在一次试验中 A 与 $\overline{A}$ 相互排斥（即不能同时发生），而且 A 与 $\overline{A}$ 至少有一个发生。显然有 $A-B=A\overline{B}$。假定三人向同一目

标射击，A＝“至少有一人击中目标”，则其对立事件是 $\overline{A}$＝“三人都未击中目标”，这是因为“至少有一人击中目标”包含击中目标的人数是 1 人或 2 人或 3 人，这三种情况与“三人都未击中目标”不能同时发生，而且三人射击的结果，不是“至少一人击中目标”，就是“三人都未击中目标”，两都必居其一。

为了直观起见，经常用图形表示事件及事件之间的关系。一般地，用一个矩形来表示必然事件 Ω，而用该矩形内的一个小区域表示一个事件。这样，事件 A 与事件 B 的包含关系、和、积、差以及互斥事件、对立事件分别如图 1.1.4 所示。

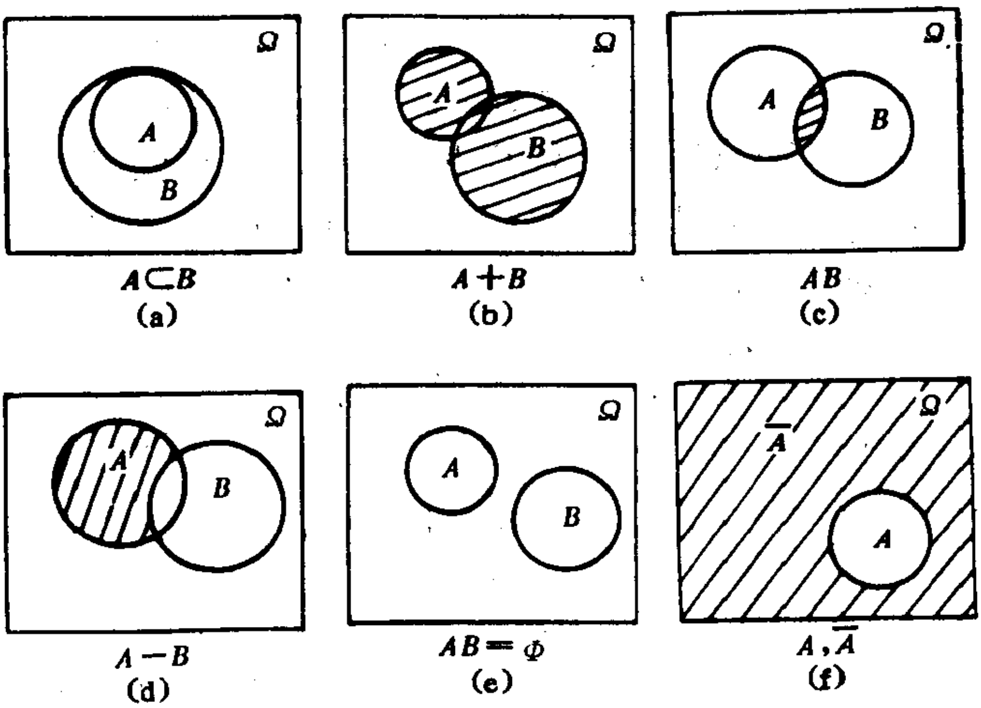


图 1.1.4

关于事件的运算性质，除了事件的加法和乘法具有交换律、结合律及分配律之外，还有下述运算性质：

$$A+\Omega=\Omega,\quad A\Omega=A,\quad A+\Phi=A,\quad A\Phi=\Phi \tag{1.1.1}$$

$$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B},\qquad \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B} \tag{1.1.2}$$

式(1.1.2)称为德·摩尔根定律,它说明:在对立运算中,加法与乘法可以互相转化(可利用图 1.1.4 直观说明其正确性)。

例 1.1.8 设 A,B,C 是三个事件,试用它们表示下列事件:

$D=$"A,B,C 中恰好有一个发生";

$E=$"A,B,C 中至少有一个发生";

$F=$"A,B,C 中至多有一个发生"。

解 $D=\{$恰好 A 发生或恰好 B 发生或恰好 C 发生$\}$,而"恰好 A 发生"="A 发生而 B 和 C 都不发生"$=A\overline{B}\overline{C}$。同理,"恰好 B 发生"$=\overline{A}B\overline{C}$,"恰好 C 发生"$=\overline{A}\overline{B}C$,所以,$D=A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$。根据事件和的定义有,$E=A+B+C$,$F$ 应是"A,B,C 都不发生"与"A,B,C 中恰有一个发生"之和,所以

$$F=\overline{A}\overline{B}\overline{C}+D=\overline{A}\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$$

习 题 一

1. 从含有三个正品 a_1,a_2,a_3 和两个次品 b_1,b_2 的产品中依次取出两个。

(1) 试写出此随机试验的样本空间;

(2) 写出下列事件的集合:$A_0=$"没取到次品";$A_1=$"恰好取到一个次品";$A_2=$"恰好取到两个次品";$B=$"第一次取到次品"。

2. 设 A,B,C 是三个随机事件,试用 A,B,C 表示下列各事件:

(1) 恰有 A 发生;

(2) A 和 B 都发生而 C 不发生;

(3) A,B,C 都发生;

(4) A,B,C 至少有一个发生；

(5) 至少有两个事件发生；

(6) 恰有一个事件发生；

(7) 恰有两个事件发生；

(8) 不多于一个事件发生；

(9) 不多于两个事件发生；

(10) 三个事件都不发生。

3. 将一枚硬币连掷三次，观察其出现正反面的情况，若以 A_1,A_2 和 A_3 分别表示“第一次出现正面”，“第二次出现正面”和“第三次出现正面”，试用 A_1,A_2 和 A_3 表示下列各事件：

(1) 只在第一次出现正面；

(2) 只出现一次正面；

(3) 至少出现一次正面；

(4) 至多出现一次正面。

4. 指出下列各式中哪些成立，哪些不成立：

(1) $A+B=A\overline{B}+B$；

(2) $\overline{A}B=A+B$；

(3) $\overline{A+BC}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

(4) $(AB)(A\overline{B})=\Phi$；

(5) 若 $A\subset B$，则 $A=AB$；

(6) 若 $AB=\Phi$ 且 $C\subset A$，则 $BC=\Phi$；

(7) 若 $B\subset A$，则 $A+B=A$。

5. 设实数集合表示的事件 $A=\{x|1\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x|3<x\leqslant 7\}$，$C=\{x|x\leqslant 0\}$，试用 x 的集合表示下列事件：

(1) $\overline{A}$；

(2) $A+B$；

(3) $B\overline{C}$

(4) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

(5) $(A+B)C$

6. 试用作图法说明德·摩尔根定律(公式(1.1.2))的正确性。

1.2 事件的概率

对于随机试验来说，虽然试验前不能确定究竟将会出现哪一个事件，但却可以确定所有可能出现的结果，以及事件出现的可能性的大小。研究随机现象，不仅要知道可能出现哪些事件，而且更重要的是要知道各种事件出现可能性的大小。人们希望用一个数来刻画某个事件出现可能性的大小，这种表示一个事件发生可能性大小的数值叫做该事件的概率，它是[0,1]区间的一个数。事件 A 的概率用 $P(A)$ 来表示(P 是英文 Probability 的字头)。

人们曾针对不同的问题给出了多种关于概率的定义。这里，首先给出简单而直观的关于概率的统计定义，然后介绍所谓的古典概型和几何概率。

1. 概率的定义

假定在一组不变的条件下进行某随机试验，共试验了 n 次，事件 A 出现 μ 次，称 μ 为事件 A 的频数，称 A 的频数 μ 与试验次数 n 之比 μ/n 为 A 的出现频率。实践经验表明，随机事件的频率具有"稳定性"。如表 1.1.1 所示，在抛硬币这个随机试验中，硬币"正面朝上"的频率接近 0.5，而且抛掷次数越多，频率越接近 0.5。因此，可按照频率的稳定性，给出关于概率的统计定义。

定义 在不变的一组条件 S 下，重复作 n 次试验。当试验

次数 n 较大时，如果事件 A 的频率 μ/n 稳定地在某一数值 p 的附近摆动，而且一般说来随着试验次数的增多，这种摆动的幅度愈变愈小，则称 A 为随机事件，并称数值 p 为随机事件 A 在条件组 S 下发生的概率，记作

$$P(A)=p$$

上述的定义，也可以简单地说成："频率具有稳定性的事件叫做随机事件，频率的稳定值叫做该随机事件的概率。"

2. 概率的性质

随机事件的概率，具有下列基本性质：

(1) 对任意事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) $P(\Omega)=1, P(\Phi)=0$；

(3) 若事件 A 与事件 B 互斥，则有

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \qquad (1.2.1)$$

由于频率 μ/n 总介于 0,1 之间，而根据概率的定义知，随机事件 A 的概率 $P(A)$ 是频率的稳定值，所以对任意随机事件 A，有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1$$

而对必然事件 Ω 和不可能事件 Φ，显然有

$$P(\Omega)=1, \qquad P(\Phi)=0$$

公式 1.2.1 表达了概率的最重要的特性：可加性。它是从大量的实践中概括出来的，成为研究概率的基础与出发点，可用概率的定义予以说明。设想在不变的条件组 S 下，重复进行 n 次试验(n 很大)，其中，事件 A 出现 μ_1 次，事件 B 出现 μ_2 次。由于事件 A 与事件 B 互斥，故事件 $A+B$ 出现了 $\mu_1+\mu_2$ 次。但根据概率的定义，μ_1/n 应该与 $P(A)$ 很接近，μ_2/n 应该与 $P(B)$ 很接

近。而 $\mu_1/n+\mu_2/n=(\mu_1+\mu_2)/n$，所以，$(\mu_1+\mu_2)/n$ 应该与数值 $P(A)+P(B)$ 很接近。然而，$(\mu_1+\mu_2)/n$ 恰好是 $A+B$ 的频率，既然 n 很大，所以，$(\mu_1+\mu_2)/n$ 与 $P(A+B)$ 很接近。从而，$P(A+B)$ 应该等于 $P(A)+P(B)$。

对于式(1.2.1)有如下推论：

推论 1 若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互斥，则有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n) \tag{1.2.2}$$

推论 2 对于任意事件 A，有

$$P(A)+P(\overline{A})=1 \tag{1.2.3}$$

证明 由于 $A+\overline{A}=\Omega$，$A\overline{A}=\Phi$，所以

$$P(\Omega)=P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1$$

推论 3 （加法公式）对任意两个事件 A,B，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.2.4}$$

证明 因为 $A+B=A+(B-A)$，且 $(B-A)A=\Phi$，所以，由式(1.2.1)可得

$$P(A+B)=P(A)+P(B-A)$$

又因为 $B=(B-A)+AB$，且 $(B-A)(AB)=\Phi$，所以再由式(1.2.1)得

$$P(B)=P(B-A)+P(AB)$$

将此式代入前式便得

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

将式(1.2.4)推广到任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，即为推论 4。

推论 4 对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有