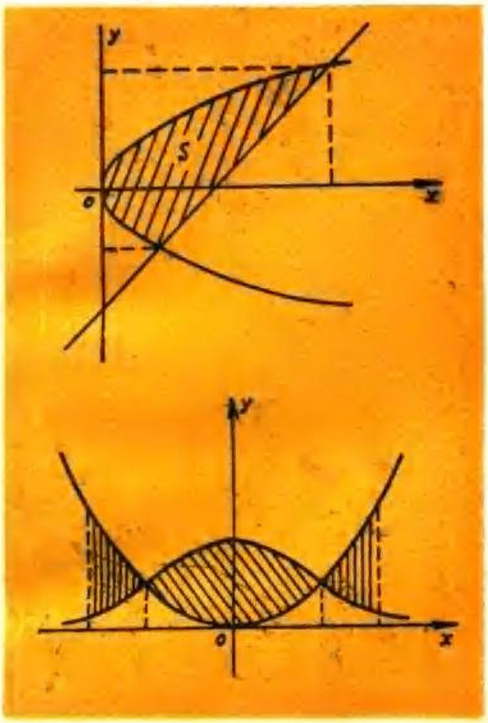

下册

JINGJIYINGYONGSHUXUE

经济应用数学

《经济应用数学》编写组编

武汉工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学/《经济应用数学》编写组编.-武汉：武汉工业大学出版社，1996.5

ISBN 7-5629-1086-3

Ⅰ.经… Ⅱ.经… Ⅲ.经济数学 Ⅳ.F224.0

武汉工业大学出版社出版发行

(武汉市珞狮路14号 邮政编号430070)

中南财经大学印刷厂印刷

开本:850×1168 1/32 印张:26.375 字数650千字

1996年5月第1版 1996年5月第1次印刷

印数:1—5000

(上、下两册)定价:29.60元

说　明

近年来，各文科类专科学校的基础课课时都有不同程度的减少，尤其是实行新的五天工时制后，各校基础课课时受到了进一步的压缩，作为基础课之一的高等数学课时也是如此，这样，原有的数学教材，无论从内容还是从篇幅上都很不适应这种课时变化后的教学需要。为此，我们武汉金融高等专科学校、哈尔滨金融高等专科学校和上海金融高等专科学校的部分数学教师联合编写了这套《经济应用数学》一书。

全书内容包括微积分、线性代数、线性规划、概率论与数理统计等数学学科的基本概念、理论、方法及其应用，分上、下两分册出版，其中，上册为基础性较强的微积分和线性代数的基本内容；下册为应用性较强的线性规划和概率论与数理统计的基本内容。

在本书的编写过程中，我们力求贯彻“体现专科教育的特色，加强理论和实践的结合，在实践性、针对性、应用性上下大功夫”的精神。与原有同类专科数学教材相比，不仅在篇幅上有大幅的减缩，而且在内容上也作了一些大胆地处理，还在一定程度上加强了应用性。本书可作金融、财经类专科学校经济应用数学课程的教材，也可作为同类层次的职大、函大和夜大相应课程的教材。

本册为该书的下册，由李德洪、段行敏任主编，车荣强、董雪梅任副主编。书中线性规划部分的第一、二章由李德洪编写，第三、四章由董雪梅编写；概率论与数理统计部分的第一、四、五、六、七章由段行敏编写，第二、三章由车荣强编写。

在本书编写过程中，得到了武汉金专有关部门和领导的大力支持，在此，我们一并表示衷心的感谢！

由于时间仓促，书中难免有缺点、错误，欢迎读者和同仁们批评指正！

本书编写组
1995 年 10 月

目　录

第三篇　线性规划

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第四篇　概率论与数理统计

第 三 篇

线 性 规 划

第一章　线性规划问题的数学模型及其解的性质

线性规划是运筹学的一个重要分支，也是其产生最早、发展最快、理论最为成熟的分支之一．

线性规划所研究的是在一组线性约束条件下，求一个线性函数的最优值（最大或最小）的问题，其方法适合于经营管理中经常会遇到的资源优化配置问题，即如何合理运用有限的各种资源（包括人力、物力和资金等）以获得最佳经济效果的问题．这种研究最初开始于本世纪 30 年代末 40 年代初人们对生产组织和运输问题等方面 的研究．以 40 年代末“单纯形法”的诞生为标志，其理论就已进入成熟的阶段．而这一数学方法真正在经营管理活动中被广泛应用，还是后来随着电子计算机技术的不断发展而成为现实的．

一些发达国家对线性规划的应用开展得较早、较普遍也较有成效．有人曾对美国 1000 家企业作过调查，有 78%的企业应用了线性规划．他们得出的结论是，在既定条件下，只是采用线性规划方法，就可提高利润 20%左右．我国对线性规划的引进和应用开始于 50 年代，在部分数学理论工作者和实际工作者的努力下，无论在理论方面还是在应用方面都取得了一定的成果．但由于各方面的原因，线性规划方法在我国普及应用得并不十分广泛，这也表明我国在这方面还很有潜力可挖．

用线性规划方法分析解决经营管理中的有关问题，首先要将实际问题抽象（或表述）成相应的数学问题，这一过程称为建立数

学模型．本章将主要采用归纳的方法，由几个具体例子引出线性规划问题（简记为（LP））数学模型的形式及其建立方法，再由图解法得到的结论导出线性规划问题解的一般性质．

§1.1 线性规划问题及其数学模型

为了解（LP）数学模型的形式特点及建模方法，先看几个具体例子．

例1 某厂生产甲、乙两种产品，每种产品都须经过A、B两台机床加工．生产一件甲产品，需在机床A上加工2个工时，在B机床上加工3个工时；生产一件乙产品，需在机床A和B上各加工2个工时，机床A一天的运转时间不得超过10小时，而机床B因老化，一天的可用工时至多只有6小时，每生产出一件甲、乙产品所获得的利润分别为1.5元和1元．问该厂应如何组织生产，可使一天生产所获得的利润最大？

解 这是一个生产决策问题．

为建立该问题的数学模型，首先需引入变量．本例可将甲、乙两种产品一天的生产量用x_1, x_2表示，由于最终将以这些变量的值作为决策依据，故常称之为“决策变量”．

其次，要将实际问题中能反映决策者的追求目标或能反映决策方案优劣标准的某种数量指标用决策变量表达出来，一般为一个函数，称为“目标函数”．本例的这种指标就是该厂生产一天所获得的利润，若以S表示，则本例问题的目标函数为

$$S = 1.5x_1 + x_2$$

最后，还要将由实际问题所决定的达到目标应满足的各种限制性条件也用决策变量的一些关系式描述出来，一般为一组等式或不等式，称为“约束条件”（简记为s.t.）．显然，本例的约束条件

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

可用下面的不等式组来描述：

$2x_1 + 2x_2 \leqslant 10$ （机床 A 的可用工时的限制）

$3x_1 + 2x_2 \leqslant 6$ （机床 B 的可用工时限制）

$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$ （非负限制）.

这样，本例的问题就可转化成下面的数学问题：

求变量 x_1, x_2 的值，使函数

$$S = 1.5x_1 + x_2$$

在满足下列所有条件

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leqslant 10 \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

的情况下取得最大值.

这就是该问题的数学模型. 由于其目标函数和所有约束条件式均是线性的，故为线性规划模型.

回顾本例的分析过程，我们可以将一个线性规划数学模型的建立过程分为以下三个基本步骤：

第一步：确定决策变量；

第二步：建立目标函数；

第三步：列出约束条件.

我们再看一例.

例 2 某车间有一批长度为 7.4 米的圆形钢管，因生产需要，欲将其截成长分别为 2.9 米、2.1 米和 1.5 米三种不同规格的管料，三种管料各需 100 根. 问如何下料可使用料最省？

解 这是所谓的下料问题.

为确定合适的决策变量，本例没有例 1 那么简单，需要作些分析. 若将一根长 7.4 米的原料钢管按三种不同规格各截一根的方式下料，则每根的余料是 0.9 米；若按 2.9 米截一根、2.1 米截二根的方式下料，则余料为 0.3 米；若按 2.9 米一根、1.5 米三根的

方式下料，则无余料．显然，应将多种不同的下料方案进行合理搭配，方可取得较好的结果．经简单测算比较，现确定以下几种较好的下料方案供选择(见表 1-1).

表 1-1

下料数(根) 方案 / 规格	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ
2.9 米	1	2	0	1	0
2.1 米	0	0	2	2	1
1.5 米	3	1	2	0	3
余料(米)	0	0.1	0.2	0.3	0.8

于是，就可用分配给上述各方案下料的原料根数作为决策变量，分别以 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 表示．

本例问题的决策目标是使用原料最省．显然可用总的用料根数来表达，若以 S 表示总的用料根数，则目标函数为

$$S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

至于约束条件，本例包括三种规格管料需要数量的要求以及决策变量的非负性要求．用数学关系式表达出来，即为

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 100$$
$$2x_3 + 2x_4 + x_5 = 100$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 100$$
$$x_1, x_2, \cdots, x_5 \geqslant 0$$

那么，本例问题的数学模型就是：

求一组变量 $x_1, x_2, \cdots, x_5$ 的值，使函数

$$S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

在满足

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad = 100 \\ \qquad 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 100 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad + 3x_5 = 100 \\ \qquad x_1, x_2, \cdots, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

的条件下取得最小值.

显然,这也是一个线性规划问题.

一般地,一个(LP)总可表示成如下形式:

求一组变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的值,使函数

$$S = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

取得最小(或最大)值,并满足条件

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (\text{或} \geqslant、=) b_1 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (\text{或} \geqslant、=) b_m \\ x_1, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

以上问题以后简记为如下形式:

$$\min(\text{或} \max) S = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.1}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant (\geqslant, =)\ b_i (i = 1, \cdots, m) & (1.2) \\ x_j \geqslant 0 \quad j = 1, \cdots, n & (1.3) \end{cases}$$

这就是(LP)数学模型的一般形式.即

定义 1.1 称由式(1.1)-(1.3)所表示的数学问题为(LP)的数学模型的一般形式.其中,变量 $x_1, \cdots, x_n$ 称为决策变量,(1.1)式称为目标函数,式(1.2)-(1.3)称为约束条件,有时又称式(1.2)为资源约束条件,而式(1.3)为非负性约束条件.

根据上述规定,本节例 1 问题的数学模型可简记为

$$\max S = 1.5x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leqslant 10 \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

而本节例 2 问题的数学模型则可简记为

$$\min S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 100 \\ 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 100 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 100 \\ x_1, \cdots, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

下面再看一个适合于用双下标变量作决策变量的问题．

例 3 一个投资者打算把他的 100 万元资金进行投资．若投资于甲种项目，则一年后即可收回全部投资，并可获得 16%的利润；若投资于乙种项目，则需两年后方可收回投资，并可获得 40%的利润，假定两种项目可且仅可在每年的年初进行投资．第三年末，该投资者需要将其拥有的全部资金另作它用．问在三年内，该投资者应如何使用他最初拥有的 100 万元资金进行上述投资，才能获得最大的投资回报？

解 这是一个投资决策问题．设 x_{ij} 表示第 i 年年初用于第 j 种项目的投资额，$i = 1,2,3$；$j = 1,2$．S 表示第三年年末的总利润，a_i 表示每年年初可供投资的最大额．为清楚起见，可列表如下：

项目 / 投资额 / 年份	甲种	乙种	每年年初投资限额
一	x_{11}	x_{12}	a_1
二	x_{21}	x_{22}	a_2
三	x_{31}	——	a_3

依题意，资源约束条件为

$$x_{11} + x_{12} = a_1$$

$$x_{21} + x_{22} = a_2$$

$$x_{31} = a_3$$

目标函数为

$$S = 0.16(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 0.4(x_{12} + x_{22})$$

其中 $a_1 = 100$， $a_2 = x_{11} + 0.16x_{11} = 1.16x_{11}$，

$$a_3 = x_{21} + x_{12} + 0.16x_{21} + 0.4x_{12} = 1.16x_{21} + 1.4x_{12}$$

所以，该问题的数学模型为

$$\max \quad S = 0.16(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 0.4(x_{12} + x_{22})$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 100 \\ 1.16x_{11} - x_{21} - x_{22} = 0 \\ 1.4x_{12} + 1.16x_{21} - x_{31} = 0 \\ x_{ij} \geqslant 0, i = 1,2,3; j = 1,2 \end{cases}$$

从前面的具体例子和一般定义都可看出，在(LP)的一般形式中，目标函数有的可能是求最小值，也有的可能是求最大值；资源约束式，有的可能是等式，也有的可能是不等式；另外，有的决策变量还可能没有符号限制(称这种无符号限制的决策变量为自由变量)．这种形式的不一致性，会给我们的研究带来诸多不便，于是想到是否可将各种形式的(LP)模型化为一种统一形式呢？下面的讨论会发现，任何一个(LP)的数学模型，总可作适当地处理即可化为以下称作“标准形式”的统一形式．这种形式中，目标函数恒为求最小值(也有人规定为求最大值)，资源约束式全为等式，所有决策变量均满足非负性约束，即

定义 1.2 称以下形式的(LP)模型

$$\min S = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \ i = 1,\cdots,m \\ x_j \geqslant 0, j = 1,\cdots,n \end{cases} \tag{1.4}$$

为(LP)数学模型的标准形式．其中，若不作特殊声明，一般还假定：$b_i \geqslant 0, i = 1,\cdots,m$.

下面就来讨论，如何将一个非标准形式的(LP)模型化为标准形式．

(1)若目标函数为求 $S=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$ 的最大值:令 $S'=-S=-\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$,则求 S 的最大值就可化为与之等价的求 $(-S)$ 的最小值.

(2)若有约束条件式为不等式:

当该不等式为 $a_{k1}x_1+\cdots+a_{kn}x_n\leqslant b_k$ 时,则在此不等式左边加上一个非负变量 x_{n+k} 使该不等式变成等式

$$a_{k1}x_1+\cdots+a_{kn}x_n+x_{n+k}=b_k;$$

当该不等式为 $a_{s1}x_1+\cdots+a_{sn}x_n\geqslant b_s$ 时,则在上式左边减去一个非负变量 x_{n+s},并使之成为等式

$$a_{s1}x_1+\cdots+a_{sn}x_n-x_{n+s}=b_s.$$

其中,在上述过程中,为平衡不等式两边的值而添加的非负变量 x_{n+k} 和 x_{n+s} 称为松弛变量(也有的把变量 x_{n+s} 另外称作剩余变量). 由于这种变量的取值不应影响目标函数值,故在目标函数中,松弛变量的系数均取为零. 也就是说,在对约束条件式作上述标准化处理时,目标函数不变.

(3) 若有决策变量 x_j 无符号限制:则可引进两个非负变量 x'_j 和 x''_j,并作 $x_j=x'_j-x''_j$ 的代换即可. 实用中,也可通过代入消元法,把 x_j 从模型中消去. 另外,若 $x_j\leqslant 0$,则只需令 $x_j=-x'_j$ 即可.

至于原问题中某约束条件式右端的常数项 (b_i) 为负数,则只需将该式两边同乘 (-1) 即可.

例 4 写出下列 (LP) 的标准形式

(1) $\max S=2x_1+3x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+2x_2\leqslant 4\\3x_1-x_2\geqslant 3\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(2) $\min S=x_1+x_2+x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-x_1+x_2-x_3\leqslant -1\\2x_1+x_2-x_3=2\\x_1,x_2\geqslant 0,x_3\text{ 无限制}.\end{cases}$$

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com