高等学校财会类系列教材

概率论与数理统计

周思纯　徐安农　编

重庆大学出版社

内 容 简 介

本书是财会类系列教材之一。全书内容包括：事件与概率、离散型随机变量及其分布、连续型随机变量及其分布、统计变量及其分布、参数估计、假设检验、回归分析。每章末有习题，书末有附录。

本书可作为财会类专业作教材使用，也可供其他相关专业作教材或教学参考书。

概率论与数理统计

周思纯　徐安农　编

责任编辑　曾令维

*

重庆大学出版社出版发行

新　华　书　店　经　销

重庆通信学院印刷厂印刷

*

开本：850×1168　1/32　印张：8.25　字数：221 千

1997 年 9 月第 1 版　　1997 年 9 月第 1 次印刷

印数：1－5000

ISBN 7-5624-1542-0/O·152　定价：8.00 元

前　言

本书是针对财会类学生和44学时讲课时间编写的，以概率论为主，简要介绍数理统计基本知识。对基本概念、重要公式和定理的直观背景和实际应用尽量多作解释、多举例子，力求简明易懂，便于自学。

本书由周思纯、徐安农编写，分别承担概率论部分和数理统计部分的撰写任务。

由于编者水平有限、时间仓促，书中缺点、错误在所难免，恳请读者批评指正。

编者

1997年6月

第一章　事件与概率

概率论是研究不确定性现象及其计量方法的一个数学分支。人们在长期的实践和观察中发现不确定现象的背后存在着规律。概率论的中心问题就是研究随机事件发生的规律。什么叫随机事件？随机事件的发生是否有规律？规律是什么？如何研究？本书的内容将围绕这些问题来展开。

§1.1　随机事件

随机事件是概率论的重要概念，是不确定现象的数学表述，因此要详细讨论。

一、朴素描述

因为随机事件是随机试验中的一种现象。所以先介绍随机试验。

1. 随机试验

从几个游戏说起。

(1)扔铜币。即将一个铜币扔一次，观察铜币落地后哪一个面朝上。

(2)掷骰子。即将一个骰子掷一次，观察朝上的点数。

(3)抽扑克牌。从 52 张牌中任抽一张，记录其花色和点数。

(4)打靶。向靶面射击一次，记录击中结果。

很容易看出，上述游戏都具有不确定性和可重复性，即游戏结果不确定，游戏可重复进行。

一般地说，把满足具有这些特点的试验称为随机试验。即

（ⅰ） 试验结果不确定；

（ⅱ） 试验可在相同条件下反复进行。

例：

E_1：将一个铜币扔三次。观察正、反面出现的情况。

E_2：旋转幸运大转盘，观察停下来时指针指向的位置。

E_3：在一大批产品中任意抽取几件，观察质量合格的件数。

容易看出，这些试验都具有不确定性和可重复性的特征，因此都是随机试验。

随机试验简称试验，用 E 表示。常见随机试验有古典型试验。几何型试验和贝努力型试验。如 E_1 是古典型试验。E_2 是几何型试验，E_3 是贝型试验。

2. 随机事件

对某试验来说，把试验中发生与否事先不能肯定的现象叫随机事件。

例：

(1) 扔一枚铜币，“正面朝上”、“反正朝上” 是随机事件。

(2) 在掷骰子试验中，“1 点朝上”、“2 点朝上”、…… 是随机事件；“朝上点数小于 3”、“朝上点数大于 4” 俗称小点或大点是随机事件。至于“朝上点数小于 7”、“朝上点数大于 6” 都不是随机事件。前者必然发生，后者不可能发生，在试验之前就可以肯定。把它们分别叫“必然事件” 和“不可能事件”。即

（ⅰ） 把每次试验中都发生的现象叫必然事件，记为 Ω。

（ⅱ） 把每次试验都不可发生的现象叫不可能事件，记为 Φ。

Ω，Φ 都不是随机事件，但是，为了理论上的需要，也把它们视为随机事件。

随机事件简称事件。用 A、B、C…… 表示。

二、数学定义

对某个试验：

（ⅰ） 把它的每一个可能结果叫基本事件。由全体基本事件组成的集合叫样本空间，用 Ω 表示。

（ⅱ） 事件 A 定义为由某些基本事件组成的集合。A 发生指属于 A 的基本事件之一发生。

引入现代的集合论来描述事件使概率论得以公理化。Ω 在上面的叙述中表示必然事件，因为必然事件是试验中一定出现的事件，因此它应包含这个试验的全部事件，因此样本空间也记作 Ω。不可能事件表示空集合 Φ。而一般事件 A 是 Ω 的子集。

例：

1. 将一个骰子掷一次。

（ⅰ） $\Omega=?$

（ⅱ） 用集合表示下列事件："朝上点数小于 3"；"朝上点数大于 4"。

解：（ⅰ） $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

（ⅱ） "朝上点数小于 3" $=\{1,2\}$

"朝上点数小于 4" $=\{5,6\}$

2. 将一个铜币扔两次。

（ⅰ） $\Omega=?$

（ⅱ） 用集合表示下列事件："恰有一次出现正"；"至少一次出现正"；"恰有两次出现正"；"恰有三次出现正"。

解：（ⅰ） $\Omega=\{$(正，正) (正，反) (反，反) (反，正)$\}$

（ⅱ） "恰有一次出现正" $=\{$(正，反) (反，正)$\}$

"至少一次出现正" $=\{$(正，正) (正，反) (反，正)$\}$

"恰有两次出现正" $=\{$(正，正)$\}$

"恰有三次出现正" $=\Phi$

3. 从甲、乙、丙三人中选正、副班长各 1 人。

（ⅰ） $\Omega=?$

（ⅱ） 用集合表示“甲当正班长”,“甲不任职”。

解:（ⅰ） Ω = {(甲, 乙)（甲, 丙）（乙, 甲）（乙, 丙）（丙,甲）（丙,乙)}

（ⅱ） “甲当正班长” = {(甲,乙) (甲,丙)}

“甲不任职” = {(乙,丙) (丙,乙)}

4. 某人接连投篮,投进记为1,投不进记为0,且投进时游戏结束。

（ⅰ） Ω = ?

（ⅱ） 用集合表示下列事件:“最多投 n 次结束”,“恰投 n 次结束”。

解:（ⅰ） $\Omega = \{(0,0,\cdots\cdots),(1),(0,1),(0,0,1)\cdots\cdots\}$

（ⅱ） “最多投 n 次结束” $= \{(1),(0,1),\cdots\cdots,\underbrace{(0,0,\cdots\cdots,0,1)}_{n}\}$

“恰投 n 次结束” $= \underbrace{\{(0,0\cdots\cdots,0,1)\}}_{n}$

三、统计规律

随机事件的特征是事件发生与否事先不能肯定。那么,随机事件的发生是否有规律呢?这个问题,历史上曾有个争论,有两种看法:(1) 捉摸不定,毫无规律;(2) 有规律。

后一种人为了证明自己的观点,做了很多实验,下面来看一个著名的历史记录。

实验 将一个铜币反复扔多次,记录正面出现的次数。

实验者	总次数(n)	正面出现次数(m)	频率($f_n = \frac{m}{n}$)
蒲丰	4 040	2 048	0.5069
皮尔逊	12 000	6 019	0.5016
皮尔逊	24 000	12 012	0.5005

这个实验记录说明两点:

(1) 将一个铜币扔一次时,{正} 是否发生事先不能定。

(2) 将一个铜币反复扔多次时，正面出现的频率 f_n 表现出一种稳定性来，稳定在 $\frac{1}{2}$ 周围。这种稳定性不因人而异，说明其客观性。频率的这种稳定性，就是随机事件发生的规律性。数学上把频率的稳定值定义为随机事件发生的概率。

定义 对某试验及事件 A，如果将此试验反复多次时，$f_n(A)$ 具有稳定性，稳定在定数 P 的周围，则把 P 叫做 A 发生的概率，记为 $P(A)$。

称这个定义为事件 A 的统计定义。

性质

(ⅰ) 非负性。即 $P(A) \geqslant 0$

(ⅱ) 正则性。即 $P(\Omega) = 1$

(ⅲ) 当 n 足够大时，$f_n(A) \approx P(A)$

不难从 $P(A)$ 的定义得出上述性质。

§1.2 事件运算

用集合间的关系和运算来描述事件间的关系和运算。任何一门科学，只有引入了恰当的符号及确定关系结构，才能进行深入的研究，概率论也不例外。对事件“发生”、“不发生”要求会用集合的语言“属于”、“不属于”来叙述。

一、事件之间的关系

对于某试验 E，及其事件 A, B, C 有如下关系。

1. 包含

B 包含 A 记作 $A \subset B$。指凡属于 A 的基本事件必属于 B。换言之，当 A 发生时，必然有 B 发生。用维恩(Venn)图来直观地表示这种关系(图 1.1)。

例 将一个骰子掷一次，令：A = “1 点朝上”，B = “朝上点

数<3”。

我们知道 $B=\{1,2\}$，因此 $A\subset B$。

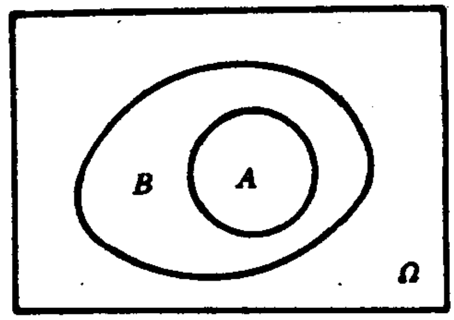

图 1.1

2．相等

A 与 B 相等，用 $A=B$ 表示。指 $A\subset B$ 且 $B\subset A$。即指 A 发生 $\Longleftrightarrow B$ 发生。

例　在掷一次骰子试验中令 $A=$“1 点朝上”，$B=$“朝上点数小于 2”。

则　　$A=B$

3．互斥

A 与 B 互斥指 A,B 不能同时发生。

例　在掷一次骰子试验中令 $A=$“朝上点数小于 3”，$B=$“朝上点数大于 4”。

则：A 与 B 互斥。从维恩图上看，A,B 互斥表示 A 区域与 B 区域没有交叉(图 1.2)。

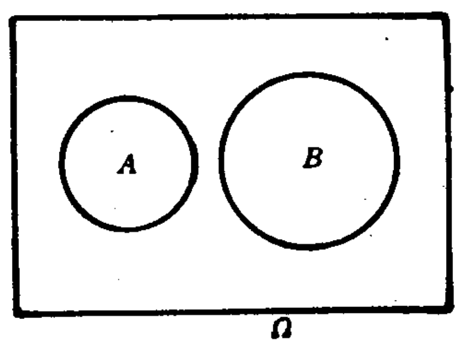

图 1.2

为了掌握事件之间的关系，讨论几个例子。

例：

1．从 1，2，……，9 中有放回地连取 4 次。排成一个四位数。

令：$A_k=$“某个数恰出现 k 次”($k=0,1,2,\cdots\cdots,5$)。

(i)　$\Omega=?$

(ii)　用维恩图表示 $A_0,A_1,\cdots\cdots,A_5$ 的关系。

解：(i)　$\Omega=\{$不出现 0 的全体四位数$\}$

(ii)　$A_0=\Omega$。因为只取 4 次，每一次试验总有某个数不被取到，也就是说 A_0 总发生。$A_5=\Phi$，其它事件的关系见图 1.3。

2．一个袋中放有 4 个球(红 2，黄 1，白 1)，从中随机地连取 3

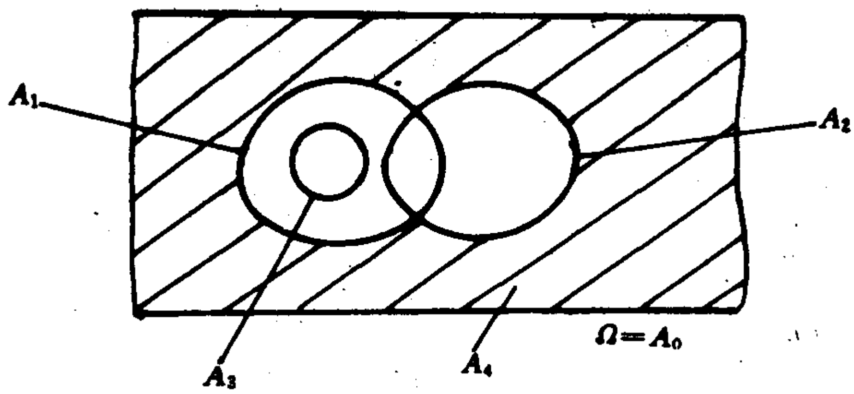

图 1.3

次(有放回)。

问:(ⅰ) "全红"与"颜色不同"是何关系?

(ⅱ) "全红"与"无黄"是什么关系?

(ⅲ) 用图 1.4 表示 A = "全红", B = "颜色不全同", C = "颜色全不同"间的关系。

解:(ⅰ) "全红"$\subset$"颜色全同"

(ⅱ) "全红"$\subset$"无黄"

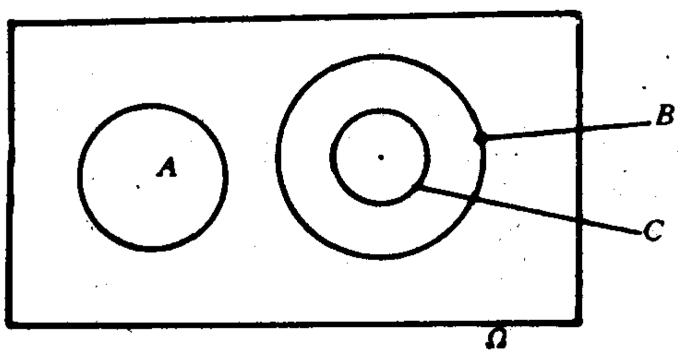

图 1.4

二、事件运算

1. 并

A 与 B 的并用 $A\cup B$ 表示。指 A,或者 B 至少有一个发生。即

$$A\cup B=\{\omega:\omega\in A \text{ 或 } \omega\in B\}$$

例 在掷骰子中,令 A = "1 点朝上", B = "2 点朝上" 则:$A\cup B$ = "朝上点数小于 3"

还可以推广到三个或更多的事件的并,如

$$A \cup B \cup C = \{\omega : \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B \text{ 或 } \omega \in C\}$$

即 $A \cup B \cup C =$ “A, B, C 中至少一个发生”

2. 交

A 与 B 的交用 $A \cap B$ 或 AB 表示，指 A 与 B 同时发生。即

$$A \cap B = \{\omega : \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}$$

例 掷骰子

令 $A =$ “朝上点数小于 3”

$B =$ “朝上点数大于 1”

则：$A \cap B =$ “朝上点数为 2”（图 1.5）。

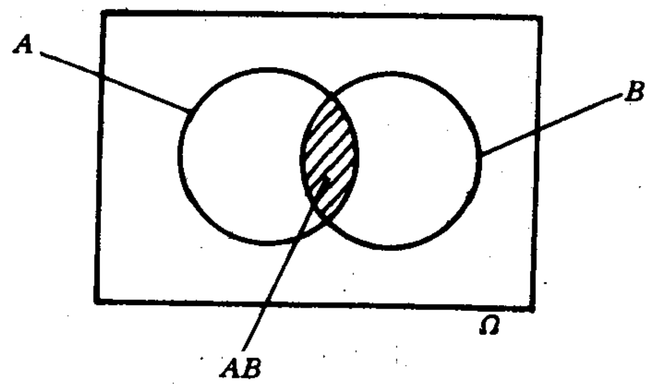

图 1.5

推广之，$A \cap B \cap C = \{\omega : \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B \text{ 且 } \omega \in C\}$

换言之 $A \cap B \cap C =$ “A, B, C 同时发生”。

3. 差

A 与 B 的差用 $A - B$ 表示，定义为 $\{\omega : \omega \in A$ 但 $\omega \overline{\in} B\}$。即 $A - B =$ “A 发生但 B 不发生”（如图 1.6）。

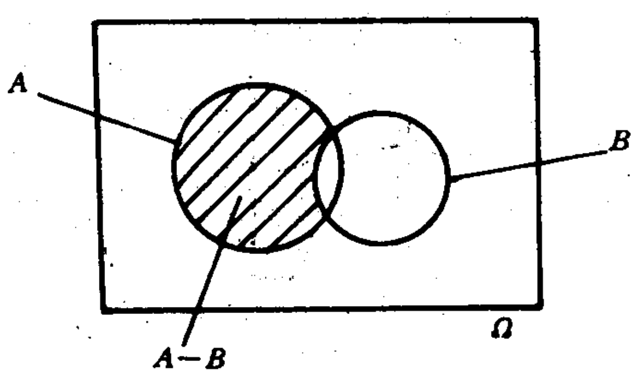

图 1.6

例 掷骰子

令 $A =$ “朝上点数小于 3”

$B =$ “朝上点数大于 1”

则：$A - B =$ “1 点朝上”。

4. 对立事件

A 的对立事件用 $\overline{A}$ 表示，定义为 $\{\omega : \omega \overline{\in} A\}$ 即：$\overline{A} =$ “A 不发生”（图 1.7）。

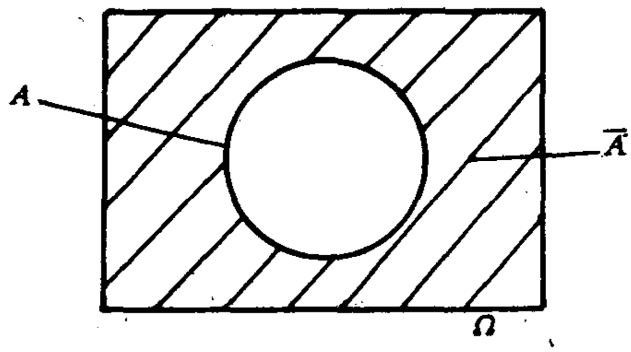

图 1.7

易见（ⅰ）$\overline{A}$ 发生 $\Longleftrightarrow A$ 不发生

（ⅱ） $A \cup \overline{A} = \Omega$

（ⅲ） $A \cap \overline{A} = \Phi$

5. 可列并与可列交

对于某试验的事件 $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n, \cdots\cdots$

（ⅰ） $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n, \cdots\cdots$ 的并用 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 表示，定义为“$A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n, \cdots\cdots$ 中至少有一个发生”简称可列并。

（ⅱ） $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n, \cdots\cdots$ 的交用 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ 表示，定义为“$A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n, \cdots\cdots$ 同时发生”简称可列交。

例 将 52 张扑克牌平分给 A、B、C、D 四人。

令 A_k = “A 家至少有 k 张幺点牌”$(k = 0,1,2,3,4)$ B_k，C_k，D_k 意义类似。

问：当下列事件发生时 D 家有几张幺点牌？

（ⅰ） $\overline{D_1}$；（ⅱ） $\overline{A_1}\,\overline{B_1}\,\overline{C_1}$；（ⅲ） $D_1\overline{D_2}$；（ⅳ） A_2B_2。

解 令 H_k = “D 家恰有 k 张幺点牌”，显然 k 可取 0,1,2,3,4。将 52 张牌平分给四人可能有 5 种情况：H_0, H_1, H_2, H_3, H_4。易见它们两两互斥，恰好构成对 Ω 的一个划分。

（ⅰ） H_0，即 D 家没有幺点牌。

（ⅱ） H_4 即 D 家拥有全部四张幺点牌。

（ⅲ） H_1，因为 D_1 表示 D 至少有 1 张幺点，$\overline{D_2}$ 表示 D 至少有两张幺点牌的对立事件，即 D 只可能有 0 张或 1 张幺点牌，因此 $D_1\overline{D_2}$ 即 H_1。

（ⅳ） H_0。由于 A 至少有两张，B 也至少有两张，可见 A，B 都各拥有两张，因此 D 不可能拥有幺点牌。

三、运算性质

1. 交换律：$A \cup B = B \cup A$；$A \cap B = B \cap A$

2. 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$；$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3. 分配律：$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

4. 对偶律：(ⅰ) $(\overline{A \cup B}) = \overline{A} \cap \overline{B}$

(ⅱ) $(\overline{A \cap B}) = \bar{A} \cup \bar{B}$

证：(ⅰ) $(\overline{A \cup B})$ 发生 $\Longleftrightarrow A \cup B$ 不发生

$\Longleftrightarrow A$ 不发生且 B 不发生

$\Longleftrightarrow \overline{A}$ 发生且 $\overline{B}$ 发生

$\Longleftrightarrow \overline{A} \cap \overline{B}$ 发生

(ⅱ) $(\overline{A \cap B})$ 发生 $=(A \cap B)$ 不发生

$\Longleftrightarrow A, B$ 中至少一个不发生

$\Longleftrightarrow \overline{A}, \overline{B}$ 中至少一个发生

$\Longleftrightarrow \overline{A} \cup \overline{B}$ 发生

5. 吸收律

当 $A \subset B$ 时有，(ⅰ) $A \cup B = B$；(ⅱ) $A \cap B = A$。

证：由 $A \subset B$，故有

(ⅰ) A, B 中至少一个发生 $\Longleftrightarrow B$ 发生

(ⅱ) A, B 同时发生 $\Longleftrightarrow A$ 发生

6. 差、交互换：$A - B = A \cap \overline{B}$

证：$A - B$ 发生 $\Longleftrightarrow A$ 发生但 B 不发生

$\Longleftrightarrow A$ 发生且 $\overline{B}$ 发生

$\Longleftrightarrow (A \cap \overline{B})$ 发生

例　对于某试验的事件 A,B,C,

(1) 试用事件运算表示下列事件:

(ⅰ) "A,B,C 中只有 A 发生"

(ⅱ) "A,B,C 中恰有一个发生"

(ⅲ) "A,B,C 中恰有两个发生"

(ⅳ) "A,B,C 中最多发生一个"

(2) 化简下列事件

(ⅰ) $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$

(ⅱ) $[A(B \cup C)] \cup [B(A \cup C)] \cup [C(A \cup B)]$

解　(1) 由题意知

(ⅰ) $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ 或简记作 $A\bar{B}\,\bar{C}$

(ⅱ) $A\bar{B}\,\bar{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \bar{A}\,\bar{B}C$

(ⅲ) $AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$

(ⅳ) $A\bar{B}\,\bar{C} \cup \bar{A}B\overline{C} \cup \bar{A}\,\bar{B}C \cup \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$

(3) 利用运算律

(ⅰ) $AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC \cup ABC$

分配律　$= (AB\overline{C} \cup ABC) \cup (A\overline{B}C \cup ABC) \cup (\overline{A}BC \cup ABC)$

吸收律　$= AB \cup AC \cup BC$

(ⅱ) $A(B \cup C) \cup B(A \cup C) \cup C(A \cup B)$

分配律　$= AB \cup AC \cup AB \cup BC \cup AC \cup BC$

吸收律　$= AB \cup AC \cup BC$

§1.3　排列组合

重点是乘法公式。它既是推导排列组合的基础，又可直接用于

计算古典概率。用得多，用得活。

1. 乘法公式

最简模型是：从甲地到乙地有两条路可行，从乙地到丙地有 3 条路可行（如图 1.8），问：从甲地经乙地到丙地有多少种走法？（有 2×3 种走法）

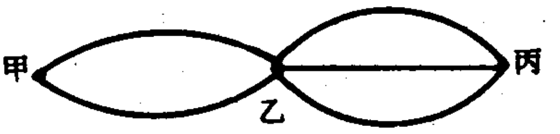

图 1.8

一般地从甲到乙有 n 种走法，从乙到丙有 m 种走法，前面的每一条路与后面的 m 条搭配有 m 种走法，前面的 n 条路和后面的 m 条路搭配，共有 $n\times m$ 种走法。穷举法把各种走法列出来，是表

$$
\begin{array}{cccc}
(1,1) & (1,2), & \cdots\cdots, & (1,m) \\
(2,1) & (2,2), & \cdots\cdots, & (2,m) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(n,1) & (n,2), & \cdots\cdots, & (n,m)
\end{array}
$$

一般模型：做一件事要分两步完成，第一步有 n 种做法，第二步有 m 种做法，则完成这件事共有 $n\times m$ 种做法。这就是所谓的乘法公式。

例 由 1,2,3,4 能组成多少个无重复数字的二位数？

解：(1) 穷举法

12, 13, 14
21, 23, 24
31, 32, 34
41, 42, 43

共能组成 4×3 个不同数字的二位数。

(2) 用乘法公式

将组成两位数这件工作分成两步，第一步是从 1,2,3,4 中任取一个数放在十分位上，共有 4 种取法，第二步是从剩下的 3 个数中任取一个（因为不能重复）放在个位，共有 3 种取法，由乘法公式共可组成 4×3 个无重复数字的二位数。

穷举法只适用于数字小的情况，一般情况用乘法公式。

2. 有放回取元

从 5 个元素中有放回地连取 3 次，问有多少种不同取法？

解：连取三次，把每一次取元看作一步，则这件事要分三步做，只要把每步各有几种取法分析清楚就行了。

第一次有 5 种，由于有放回，第二次仍有 5 种，同样第三次也有 5 种，搭配共有 5^3 种取法。

3. 不放回取元

从 5 个元素中不放回连取 3 次，问有多少取法？

解：由于不放回，第一次有 5 种，第二次只有 4 种，第三次仅有 3 种，搭配共有 $5\times4\times3$ 种取法。

4. 排列

从 5 个不同元素中任取 3 个排成一行，称为一个排列，问有多少个不同的排列。不同的排列数称为从 5 个中每次取 3 个的选排列，记作 P_5^3。

解：排列公式中的每一个排列必为不放回取元中的一种取法发生（排 1 号位可视为第一次取出的，排 2 号位可视为第二次取出的 ……）。

由乘法公式

$$P_5^3 = 5\times4\times3 = \frac{5!}{(5-3)!}$$

一般地 $P_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$，当 $m = n$ 时称为 n 个元素的全排列

$P_n^n = n!$

5. 组合

从 n 个元素中任取 m 个放在一组，当一组内的元素相同（不考虑排列）就认为相同，问有多少个不同的组合（用 C_n^m 表示）

解：每个组合均可排 $m!$ 个排列，C_m^n 个组合共可排成 $C_n^m\times m!$ 个排列，这就是从 n 个元素中任取 m 个进行排列的排列总数。

$$P_n^m = C_n^m\times m!$$

于是 $$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

6. 组合推广

将 n 个元素分三组，各含 n_1, n_2, n_3 个，问有多少种分法（分两组的情况即组合公式）。

解：分两步。

（ⅰ） 从 n 个元中任取 n_1 个为第一组有 $\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}$ 种。

（ⅱ） 从余下的 n_2+n_3 中任取 n_2 个为第二组，其余的为第三组，有 $\frac{(n_2+n_3)!}{n_2!\,n_3!}$ 种取法。

（ⅰ）与（ⅱ）搭配，共有 $\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}$ 种分法。

例：

1. 从 8 个学生中选正、副班长各一人，有多少种选法？选 3 个班委有多少种选法？

(P_8^2, C_8^3)

2. 5 个一排照相：

（ⅰ） 甲不在正中间，有多少种照法？

（ⅱ） 甲、乙相邻，有多少种照法？

解：（ⅰ）从非甲中任选一个站在正中间有 4 种方法，余下四人站在其它位上全排列有 4! 种排法，搭配起来即得甲不在正中间的所有照相法，共有 $4 \times 4!$ 种照法。

（ⅱ） 把甲、乙并在一起，看作一个元素，4 个元素的全排列为 4!，由于甲、乙捆在一起可以甲左乙右，又可以甲右乙左，有 2 种方法，搭配起来，甲乙相邻共有 $2 \times 4!$ 种照法。

3. 1,2,3,4,5 能组成多少个无重复数字且 2,5 相邻的四位数。

解：分两步。

（ⅰ） 取出 2,5，从余下的三个数中任取两个有 C_3^2 种取法。