

平板理论

杨 耀 乾

中 国 铁 道 出 版 社

内 容 提 要

本书讨论了平板静力学的各个方面，着重在各种解题的方法上。内容包括小挠度平板的薄板、中厚度板与厚板理论；各种形状的平板与各向异性板；以及平板的稳定问题、大挠度问题与失稳后的超临界变形问题。书后并附有习题。

本书可作为工学院工程力学专业学生和研究生“平板与薄壳理论”课程的试用教材或参考书，也可作为力学工作者和有关方面的工程技术人员的参考之用。

平 板 理 论

杨 耀 乾

责任编辑 王能远

中国铁道出版社出版

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张：22.75 字数：569 千

1980年7月第1版 1980年7月第1次印刷

印数：0001—5,500册 定价：2.35 元

序 言

作者自1958年起在唐山铁道学院担负工程力学专业的“平板与薄壳理论”课程的教学工作；1960年以后，又曾指导工程力学专业的研究生。多年来，在上述的各项工作中痛感由于没有适当的书籍可供学生学习和研读之用，在工作中遇到了不少困难。当时，根据广大学生的要求，决定编写一本“平板与薄壳理论”书籍，既可作为工程力学专业学生的教本，也可作为工程力学专业研究生研读和参考之用。这个工作本来是可以在文化大革命以前完成并出版的，然而由于受林彪和“四人帮”对科学和教育事业的摧残而未果，深为遗憾。在以华主席为首的党中央一举粉碎“四人帮”之后，拨乱反正，使全国的高教与科研战线进入了一个欣欣向荣、蓬勃发展的新时期，本书才得以问世，与读者见面。

由于“平板与薄壳理论”的全书篇幅较大，所以决定分两册出版。本书“平板理论”，实际是“平板与薄壳理论”的上篇。此书是作者过去在唐院多年教学和指导研究生工作的经验基础上，经过多次修改而写成的，并且在实践中使用过几次。书中有不少内容是为研究生的进一步研读而写的，因此对于大学本科学生，没有必要全部讲解。

本书使用了一些高等数学，作者力求从物理的观点加以解释，以便使用本书的读者，在指导教师的启发帮助下，能够自己独立钻研。本书的内容，大部分是前人的劳动成果，作者只是从自己理解的角度重新加以解释、讨论和扩充，但是也有小部分内容是作者的研究成果。凡是援引的书籍、文献等等，已分别在有关各处的脚注内注明其出处，读者可据此查阅。本书并未包括关于平板的振动问题，因为这个内容是在另外一门课程“弹性动力学”中讲授的。

本书原稿在交付排版之前，承中国铁道出版社编辑部邀请王道堂同志作了仔细校核，特此致谢。

限于作者的水平，书内难免有不适当以及错漏之处，诚恳希望使用本书的读者指正。

杨耀乾

目 录

序言

第一章 在直角坐标系中小挠度薄板的弯曲理论	1
§ 1.1 一般概念与基本假设	1
§ 1.2 在侧向荷载下小挠度平板的基本方程	4
§ 1.3 边界条件	8
§ 1.4 纯弯曲	12
§ 1.5 四边简支矩形板的纳维尔解	14
§ 1.6 对边简支矩形板的李维解	19
§ 1.7 初参数法	23
§ 1.8 叠加法	28
§ 1.9 四边固定的矩形板	30
§ 1.10 连续矩形板	35
§ 1.11 支承在等距离支柱上的矩形板	39
§ 1.12 弹性地基上的矩形板	44
§ 1.13 在边缘受力下大板的局部应力问题	47
§ 1.14 椭圆板	51
§ 1.15 薄膜比拟	53
§ 1.16 简支三角形板	54
§ 1.17 在侧力与纵力合并作用下小挠度平板的基本方程	60
§ 1.18 在匀布侧力与纵力合并作用下的简支矩形板	62
§ 1.19 微弯板的挠曲	65
§ 1.20 中厚度平板理论	67
§ 1.21 其它精确理论	74
§ 1.22 矩形板条的精确解	79
§ 1.23 简支矩形板的精确解	80
§ 1.24 厚板理论	83
第二章 在其它坐标系中小挠度薄板的弯曲理论	93
§ 2.1 在极坐标系中小挠度薄板的基本方程	93
§ 2.2 在匀布荷载下的圆板	95
§ 2.3 在集中荷载下的圆板	97
§ 2.4 环形板	98
§ 2.5 轴对称的中厚度圆板	101
§ 2.6 轴对称的厚圆板	104
§ 2.7 圆板的非对称弯曲	106

§ 2.8	匀变荷载下的圆板	107
§ 2.9	承受匀布荷载的扇形板	109
§ 2.10	承受偏心集中力的圆板	110
§ 2.11	在侧力与纵力合并作用下的圆板	112
§ 2.12	在弹性地基上的板	113
§ 2.13	曲线坐标系	119
§ 2.14	在曲线坐标系中薄板小挠度问题的挠曲面方程	122
§ 2.15	双极座标的应用	130
§ 2.16	椭圆座标的应用	133
§ 2.17	以复变数表示的平板挠曲面方程及其通解	136
§ 2.18	函数 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 的形式	141
§ 2.19	边界条件	146
§ 2.20	座标转换	148
§ 2.21	具有一个小圆孔的矩形板	150
§ 2.22	周边固定的无孔圆板	152
§ 2.23	保角映象法	154
§ 2.24	映象函数	159
§ 2.25	六角形板	170
§ 2.26	椭圆孔对于挠曲矩形板的影响	174
第三章	变分法与差分法	178
§ 3.1	小挠度薄板的功与能	178
§ 3.2	小挠度平板的变分方程	180
§ 3.3	李滋~铁摩兴柯法	183
§ 3.4	布勃诺夫~伽辽金法	185
§ 3.5	与变分法有关的其它近似方法	186
§ 3.6	差分法原理	189
§ 3.7	直角坐标系中的平板差分方程	191
§ 3.8	斜坐标系中的平板差分方程	195
§ 3.9	三角坐标系中的平板差分方程	197
§ 3.10	曲线边缘的影响	201
§ 3.11	外插法	204
第四章	各向异性板与变厚度板	207
§ 4.1	引论	207
§ 4.2	直角坐标系中平板的挠曲面方程	208
§ 4.3	周边简支正交各向异性板的双三角级数解法	211
§ 4.4	对边简支正交各向异性矩形板	212
§ 4.5	正交各向异性无限长矩形板	220
§ 4.6	圆柱型正交各向异性板的挠曲面方程	222
§ 4.7	圆柱型正交各向异性圆板的轴对称问题	224
§ 4.8	以复变数表示的平板挠曲面方程及其通解; 边界条件	226

§ 4.9 正交各向异性板的复变函数解法	231
§ 4.10 变分法	237
§ 4.11 变厚度矩形板	240
第五章 在直角坐标系中大挠度薄板的弯曲理论	246
§ 5.1 大挠度平板的基本方程	246
§ 5.2 大挠度平板的能量与变分方程	251
§ 5.3 与变分法有关的近似法	256
§ 5.4 能量法的应用	258
§ 5.5 布勃诺夫~伽辽金法的应用	262
§ 5.6 矩形板条的准确解	266
§ 5.7 简支矩形板的准确解	269
第六章 在极坐标系中大挠度薄板的弯曲理论	273
§ 6.1 在极坐标系中大挠度平板的基本方程	273
§ 6.2 大挠度圆板的能量与变分方程	278
§ 6.3 能量法的应用	282
§ 6.4 布勃诺夫~伽辽金法的应用	285
§ 6.5 摄动法	287
§ 6.6 级数解法	291
§ 6.7 绝对柔性圆板	294
§ 6.8 圆柱型正交各向异性圆板	296
§ 6.9 具有初曲率的圆板; 圆板的跳跃现象	298
第七章 平板的弹性稳定与超临界变形	304
§ 7.1 临界力及其计算方法	304
§ 7.2 在单向与双向受压下的简支矩形板	308
§ 7.3 单向受压的对边简支矩形板	312
§ 7.4 周边受剪的简支矩形板	314
§ 7.5 简支矩形板承受按线性分布的纵向压力	316
§ 7.6 在集中的纵向压力作用下的简支矩形板	319
§ 7.7 具有纵向肋撑的简支矩形板	324
§ 7.8 圆板的稳定	330
§ 7.9 平板的超临界变形	333
§ 7.10 在单向受压下周边简支方形板的超临界变形	334
§ 7.11 在单向受压下对边简支矩形板的超临界变形	336
§ 7.12 圆板的超临界变形	340
附录习题	345

第一章 在直角坐标系中小挠度薄板的弯曲理论

§ 1.1 一般概念与基本假设

在一周边为任意形状的理想平面的上下，分别加一同样的适当厚度薄层，即称为平板。在其半厚度 $\frac{1}{2}h$ 处的理想平面称为平板的中面。平板可作为一个结构，用以传递外力于支承，亦可用作某一结构的部件。就受力情形而言，在静力荷载的范围内，平板可以承受三种不同形式的外力，如图 1—1 所示。其中，图 a 表示第一种受力情形，外力系作用于平板的中面内；图 b 为第二种情形，外力仅为垂直于平板中面的侧向荷载；在图 c 所示的第三种情形，则平板同时承受侧向与纵向两种荷载。对于仅有纵向力作用的平板（图 1—1 a），当其尚未丧失稳定时，实际上是一个典型的平面问题，此在弹性力学课程中早已论及。除此以外的其它各种情形均将于本书中详加讨论。

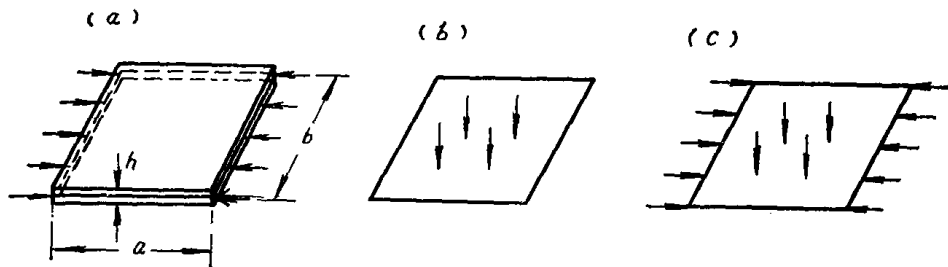


图 1—1

在外力作用下，平板的内部将产生内力。平板的内力可分为两类，即弯曲力与薄膜力。前者系指弯矩、扭矩与横向剪力，而后者则为作用在中面内的拉、压、剪切等力。与内力同时产生者为平板的变形。弯曲力使平板发生弯扭变形，而薄膜力则对应于平板中面内的变形。平板内的薄膜力与直梁内的轴向力相类似，然而前者的产生远较后者为复杂，因为平板中面内薄膜力之所以产生，是不仅由于支座的阻力，并且还由于变形后的平板中面常被弯曲成为不可展曲面而使中面发生变形，从而产生薄膜力。试观圆板的情形（图 1—2）。图 a 为一自由支承的圆板，其中 ab 与 cd 为二互相垂直的直径。变形后，圆板的中面被弯曲成为一不可展曲面（图 b），原直径 aob 与 cod 被弯成为曲线 $a'o'b'$ 与 $c'o'd'$ ，然而它们的长度并没有改变，因此圆周 $a'c'b'd'$ 的长度较原长度 $acbd$ 为短，从而产生了中面内的变形，以及与此俱来的薄膜力。

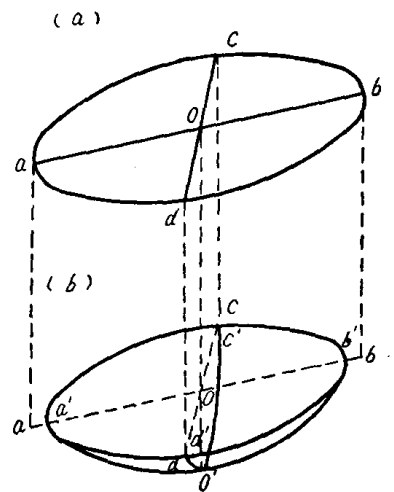


图 1—2

当平板中面的最大挠度 w 远较平板的厚度 h 为小时, 通常称这类问题为平板的小挠度问题。此时平板内的薄膜力与弯曲力, 就数量而言, 它们并不属于同一量级, 而前者远较后者为小。在分析时, 可以认为在中面内不受拉、压、剪切, 从而也没有中面内的变形。此类平板常称为刚性板。当 w 与 h 的大小相差不大时, 通常称之为平板的大挠度问题。此时, 平板的薄膜力与弯曲力在数量上是属于同一量级的。因此在分析问题时, 不仅需要考虑弯曲力, 同时也必须考虑薄膜力以及与此俱来的中面变形。这类平板称为柔性板。当 w 远较 h 为大时, 这是属于特大挠度的问题。此时, 弯曲力远较薄膜力为小, 故可略而不计。此类平板通常称为绝对柔性板。以上三类平板之间并没有严格的界限。在通常所要求的精确度范围以内, 当 $\frac{w}{h} \leq \frac{1}{5}$ 时可按刚性板计算, 当 $\frac{1}{5} < \frac{w}{h} < 5$ 时可按柔性板计算, 当 $\frac{w}{h} \geq 5$ 时可按绝对柔性板计算。

以上关于平板的分类与一维问题中的直梁相类似。在直梁计算中, 当 $\frac{w}{h} \ll 1$ 时, 计算时可以略去轴向力 (图 1—3, a); 当 $\frac{w}{h} \approx 1$ 时, 应同时顾及轴向力与弯曲力 (图 1—3, b); 而当 $\frac{w}{h} \gg 1$ 时则可按柔性索计算 (图 1—3, c)。

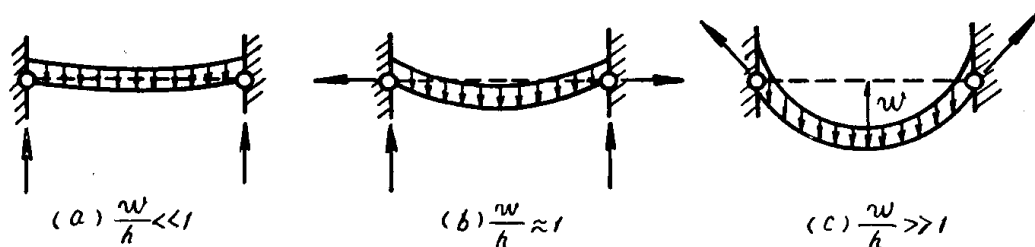


图 1—3

平板也可以按其厚度 h 与其最小边 a (图 1—1, a) 的比值的大小而分为厚板与薄板两种。当 $\frac{h}{a} \ll 1$ 时称为薄板, 否则为厚板。厚板理论系基于严格的三维弹性力学, 因此它的应力分析将是比较复杂的, 到目前为止, 只有少数几种情形得到了完美的解答。至于薄板, 在作了某些假设之后, 可以使它的分析得到大大的简化, 同时可以得到非常满意的计算结果。在本书中, 除了少数几节讨论厚板问题外, 我们将主要研讨薄板的理论与计算^①。薄板与厚板之间, 原没有严格的区分。在通常所要求的精确度范围以内, 当 $\frac{h}{a} \leq \frac{1}{5}$ 时, 可以按薄板计算; 然而, 严格地说, 薄板理论的应用范围不仅与 $\frac{h}{a}$ 的比值有关, 而且还应考虑到荷载性质与支承条件等。

古典的平板理论有两种研究方法。第一种方法以郭熹与柏桑两氏为代表。他们将平板内各点的应力与位移写成为座标 (x 、 y 、 z) 的函数, 而其中与座标 z 的关系取幂级数的形式:

$$\sum_n a_n z^n$$

① 此后在本书中所用“平板”一词, 如无特别说明, 一律指薄板而言。

其中, z 为垂直于平板中面的座标。在每一具体问题中, 常取级数中的为首几项。事实上, 如果取级数中的第一项则为薄膜解, 取二项时则相当于下文所要论及的柯克霍夫平板理论, 取无限多项时即得一准确解。第二种方法, 亦即现时薄板理论的基础, 系基于以下的柯克霍夫假设:

(1) 略去垂直于平板中面的法向应力;

(2) 变形前垂直于平板中面的任一直线素, 在变形后仍为一直线, 且在中曲面的法线方向内。

此外, 对于平板的小挠度问题, 还作了第三个假设:

(3) 在中面内没有伸缩或剪切变形。

如果取平板的中面为座标平面 XOY , Z 轴系垂直于中面^①, 则按上述第一个假设, 可得法向应力 $\sigma_z = 0$, 也就是说, 平板的各水平薄层之间将没有挤压。按诸第二个假设, 则应有角应变 $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, 而且法向应力 σ_x 、 σ_y 以及剪应力 τ_{xz} 、 τ_{yz} 沿平板的厚度应按直线分布。再按第三个假设, 则中面内的各项应力应等于零, 或:

$$(\sigma_x)_{z=0} = (\sigma_y)_{z=0} = (\tau_{xy})_{z=0} = 0$$

从而平板的中面即为平板的中性层。因此, 在平板的小挠度问题中, 根据上述假设, 可得各项应力沿平板厚度的分布, 如图 1—4 所示。其中 Z 轴方向内的横向剪应力 τ_{xz} 与 τ_{yz} 的分布为二次抛物线。兹说明如下: 于图 1—4 所示的微分体上, 作一平面 $z = \text{const}$, 将其分为二部分, 并取其下面一部分为自由体, 如图 1—5 所示。图中仅画出了 X 方向内的外力。注

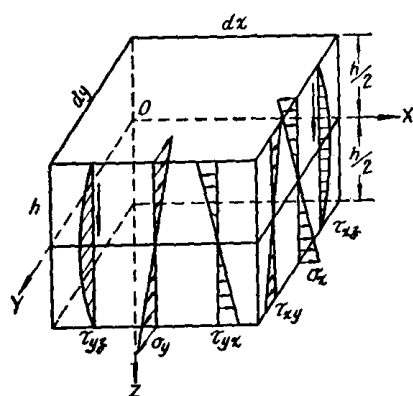


图 1—4

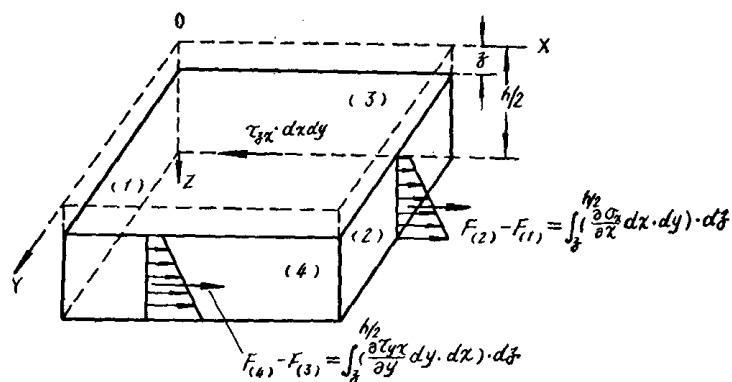


图 1—5

意到 $[\tau_{xz}]_{z=-\frac{h}{2}} = 0$, 自由体左右两面上的法向应力之差为 $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$, 以及前后两面上剪应力之差为 $\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy$, 因此取 $\Sigma X = 0$, 可得:

$$\tau_{xz} \cdot dx dy = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dx dy dz \quad (a)$$

由于假设二与三, 则 σ_x 与 τ_{yz} 可写成:

$$\sigma_x = z \cdot f_1(x, y) \quad \tau_{yz} = z \cdot f_2(x, y) \quad (b)$$

其中 $f_1(x, y)$ 、 $f_2(x, y)$ 为座标 x 与 y 的函数。以 (b) 代入 (a), 消去 $dx dy$, 履行积分, 并注意到, 由于剪应力成对原理, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, 最后可得:

① 本书所用的直角坐标系一律采用右手螺旋规则的规定。

$$\tau_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \cdot \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) \quad (c)$$

公式 (c) 清楚地说明, τ_{xz} 沿平板厚度的分布为二次抛物线。同理可证 τ_{yz} 的分布亦复相同。

由于各项应力沿平板厚度的分布为已知, 因此它们可以合并成为几个内力素。法向应力 σ_x 与 σ_y 分别形成弯矩 M_x 与 M_y ; 剪应力 τ_{xy} 与 τ_{yx} 分别形成扭矩 M_{xy} 与 M_{yx} ; 横向剪应力 τ_{xz} 与 τ_{yz} 分别形成横向剪力 Q_x 与 Q_y 。由图 1—4 可知, 内力素与应力之间的关系为:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz & M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y dz \\ Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz & Q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \\ M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xy} dz & M_{yx} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{yx} dz \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

且按剪应力成对原则, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, 故有 $M_{xy} = M_{yx}$ 。所有内力素均系指沿中面边缘每单位长度内的数值^①。正号内力素示于图 1—6 中; 弯矩与扭矩分别用它们的矢量 (双箭头) 并按右手螺旋规则表示于图上。

在任一问题中, 如果已经求得平板各截面内的力素, 则该截面上各点的应力, 可按材料力学课程中所讲述的关于矩形截面梁的应力公式, 甚易算出。最大应力发生在平板的上下两

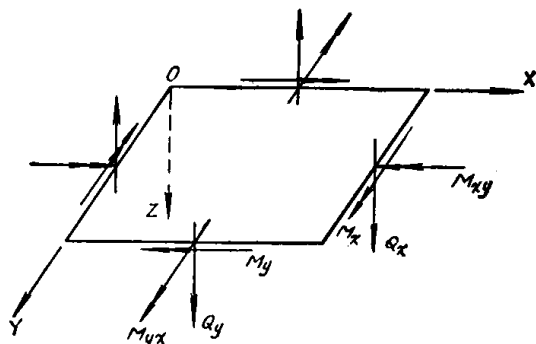


图 1—6

面上 (σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 、 τ_{yx}) 或在中面处 (τ_{xz} 、 τ_{yz})，其值分别为:

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_x]_{\max} &= \frac{6M_x}{h^2} & [\tau_{xz}]_{\max} &= \frac{3}{2} \frac{Q_x}{h} & [\tau_{xy}]_{\max} &= \frac{6M_{xy}}{h^2} \\ [\sigma_y]_{\max} &= \frac{6M_y}{h^2} & [\tau_{yz}]_{\max} &= \frac{3}{2} \frac{Q_y}{h} & [\tau_{yx}]_{\max} &= \frac{6M_{yx}}{h^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

由上所述, 可知, 从柯克霍夫的假设出发, 我们引进了各项内力素的概念, 而且平板的变形亦可用其中面的变形来表示 (见 § 1.2)。因此问题归结为研究平板中面的内力与变形, 正如在梁的初等理论中将梁的弯曲问题化为研究其中性轴的挠曲问题一样。可见柯克霍夫的假设有其直观性的优点, 从而加强了对平板挠曲的物理概念; 而且, 在一般情况下, 它给出非常满意的结果。

§ 1.2 在侧向荷载下小挠度平板的基本方程

有一周边为任意形状的薄板, 承受垂直于中面的侧向荷载 q ; 平板的周边为任意支承。假设由荷载所产生的最大挠度落在小挠度的范围以内, 因此可以引用柯克霍夫的所有三个假设。试按弹性力学课程中所述位移解的一般方法, 导出在侧向荷载下小挠度平板的挠曲面微分方程式。

平衡方程 首先写出平板任一微分体的平衡方程。图 1—7 表示一平板中面的微分体

^① 弯矩与扭矩的单位为 $\text{kg} \cdot \text{cm}/\text{cm}$; 剪力的单位为 kg/cm 。

$(dxdy)$ 。置一组直角坐标轴如图所示。在图中并画出了作用于自由体上的力素与荷载，它们都画在正的方向内，并且都是座标 x 、 y 的函数。

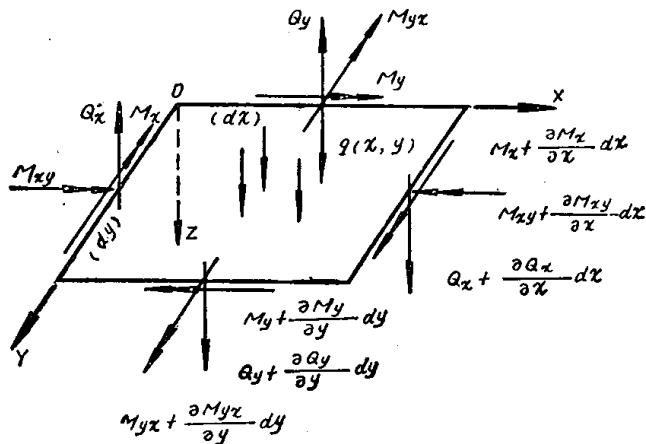


图 1-7

在六个平衡方程中，有三个方程 $\Sigma X = 0$ 、 $\Sigma Y = 0$ 、 $\Sigma M_z = 0$ 是恒等的。其它三个方程为：

$$\left. \begin{aligned} \Sigma Z = 0: & \frac{\partial Q_z}{\partial x} dxdy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dydx + q dxdy = 0 \\ \Sigma M_x = 0: & -\frac{\partial M_{zy}}{\partial x} dxdy - \frac{\partial M_y}{\partial y} dydx + Q_y dxdy = 0 \\ \Sigma M_y = 0: & \frac{\partial M_{xz}}{\partial y} dydx + \frac{\partial M_z}{\partial x} dxdy - Q_z dydx = 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

在消去了 $dxdy$ 之后，方程组 (a) 简化为：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q_z}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0 \\ Q_z &= \frac{\partial M_z}{\partial x} + \frac{\partial M_{zy}}{\partial y} \\ Q_y &= \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xz}}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

三个方程包含五个未知数，因此问题是超静定的。

几何方程 其次来研究平板挠曲时的几何变形。让我们首先来讨论平板中面的曲率与扭率的改变。图 1-8， α 表示平板的中面。按柯克霍夫的第三条假设，中面上的任一点既没

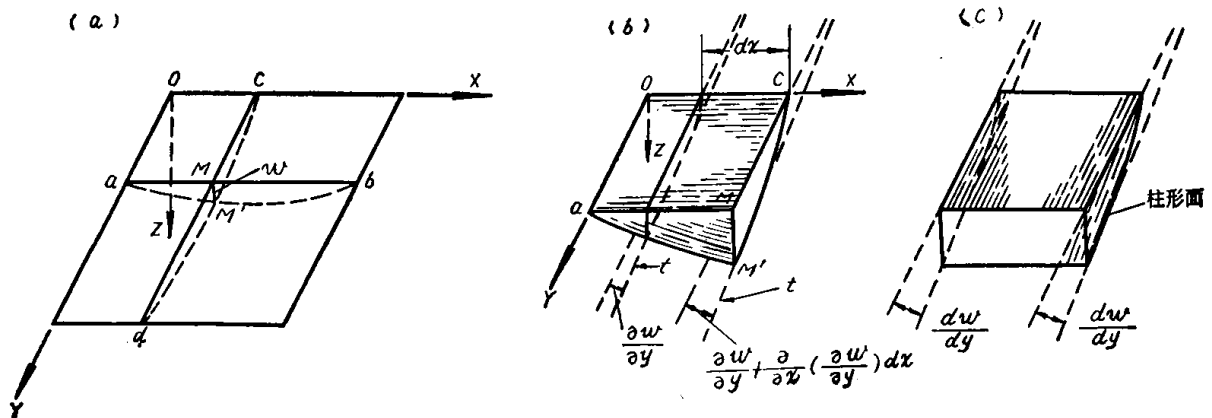


图 1-8

有线应变 e_x 、 e_y 与角应变 γ_{xy} ，也没有 X 方向内的位移 u 与 Y 方向内的位移 v 。因此在变形之后，中面上各点将仅仅获得与中面相垂直（且在 Z 方向内）的位移 $w=w(x, y)$ ，如图中的 MM' 。在变形之后，中曲面上任一点 M' 在 X 与 Y 方向内的切线坡度显然分别为 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial w}{\partial y}$ 。

为了求得中曲面的曲率与扭率，我们应该注意到中面的挠度 w 是一个很小的数值，因此可以用切线的坡度来代替切线的转角，并且可以用曲率的近似公式来代替精确公式。于是得曲率改变的公式如下：

$$\kappa_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \kappa_y = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (1.4)$$

其中， κ_x 为平行于 XOZ 平面的曲率， κ_y 为平行于 YOZ 平面的曲率。曲率的正负按以下的规则来决定：正力矩产生的曲率为正；这就是说，当曲面某点的曲率半径落在 Z 轴的反方向内时则该点的曲率为正，反之为负。至于公式（1.4）等号右边的负号是因为，在正曲率的情况下，当座标（ x 或 y ）增加时转角减小的缘故。

同时，一般地说，切线的坡度不仅与一个座标有关，而且它随着两个座标 x 与 y 的增加而改变。例如转角 $\frac{\partial w}{\partial y}$ ，它不仅与 y 有关，而且随着 x 的增加而改变，如图1—8， b 所示。

因此，代表转角 $\frac{\partial w}{\partial y}$ 的切线 t 就随着 x 的增加而绕 X 轴旋转。这种旋转的趋势是由于在板内存在着扭矩 M_{xy} 的缘故。沿着 X 轴每单位长度内切线 t 旋转角的改变称为平板对 X 与 Y 轴的扭率 χ_{xy} 。因此扭率改变的公式为（见图1—8， b ）：

$$\chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.5)$$

正扭矩产生的扭率取为正。由图1—8， b 可知，当扭率为正时，转角 $\frac{\partial w}{\partial y}$ 将随座标 x 的增加而减小，因此公式（1.5）的右边应加一负号。由于混合导数与微分的次序无关，可见在 Y 方向内的扭率 χ_{yx} 与 χ_{xy} 全同。如果平板的中面被弯曲成为柱形面（如图1—8， c 所示），则挠度 w 将仅与一个座标（ y ）有关，因此 $\chi_{xy} = \chi_{yx} = 0$ 。

公式1.4与1.5给出了以挠度 w 来表示的平板中面的曲率与扭率的改变①。

其次来研究，在平板内，非中面上某点的应变与位移之间的关系。于图1—8， a 所示的平板，通过 M 点作一截面，平行于座标平面 XOZ ，并将此截面投影到 XOZ 平面上，如图1—9所示。在平板中取任一点 A ，它在 Z 轴方向内的座标为 z 。在变形后， A 点将移至 A' 的位置。按假设二，垂直于中面的直线 AM ，在变形后（ $A'M'$ ），将仍为中曲面的直线。故由图1—9可得，非中面上任一点 A 在 X 方向内的位移 u' 为②：

$$u' = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (b)$$

同理，可得 A 点在 Y 方向内的位移 v' 为：

① 曲面上某一点的曲率和（ $\kappa_x + \kappa_y$ ）称为曲面在该点的平均曲率。不难证明，曲面上任一点在任意两个互相垂直方向（ n 与 t ）内的平均曲率是相同的，即 $\kappa_n + \kappa_t = \kappa_x + \kappa_y$ 。参阅S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 1959, p.35.

② 我们以 u' 、 v' 以及 e'_x 、 e'_y 、 γ'_{xy} 来分别代表非中面上任一点处的位移与应变，俾资区别于中面的位移 u 、 v 与应变 e_x 、 e_y 、 γ_{xy} 。因为正的转角给出负的位移，故在公式（ b ）与（ c ）的右边加一负号。

$$v' = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (c)$$

为了求得非中面上任一点处的应变,在图 1—9 中,通过 A 点作一水平薄层平行于座标平面 XOY, 并在此薄层的 A 点处取一微分体, 将其投影到 XOY 平面上, 如图 1—10 中的 ABCD。此微分体在变形后占有位置 A'B'C'D'。于是由图 1—10 不难求得非中面上任一

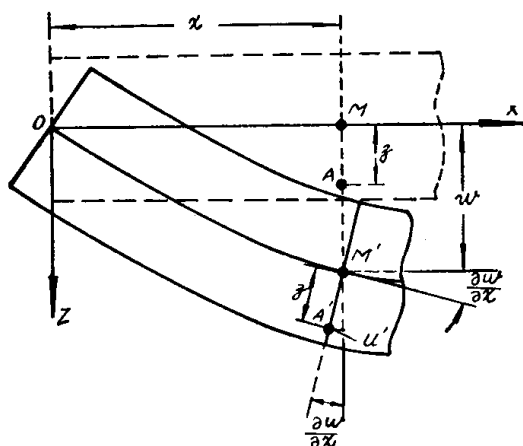


图 1—9

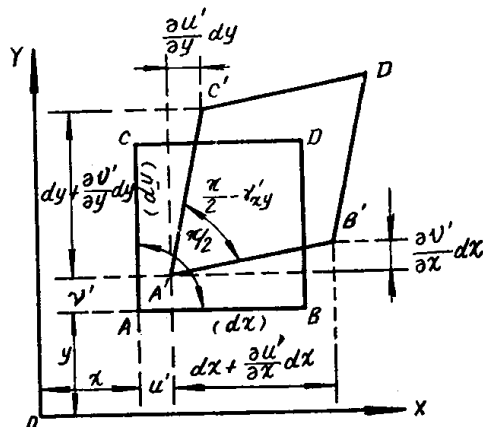


图 1—10

点处在 X 方向内的线应变 ϵ'_x 、Y 方向内的线应变 ϵ'_y 与剪切应变 γ'_{xy} 为:

$$\epsilon'_x = \frac{\partial u'}{\partial x} \quad \epsilon'_y = \frac{\partial v'}{\partial y} \quad \gamma'_{xy} = \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \quad (d)$$

以公式 (b) (c) 中的 u' 与 v' 代入公式 (d), 并注意到公式 (1.4) 与 (1.5), 可得:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon'_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = z \chi_x & \epsilon'_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = z \chi_y \\ \gamma'_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2z \chi_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

公式 (1.6) 给出了非中面任一点处的应变与中面上的挠度或曲率之间的关系式。

物理方程 应力与应变之间是用表示物性特点的物理方程联系起来的。假设平板的弯曲是在材料的弹性范围以内, 它服从虎克定律。如果注意到基本假设一, 则按虎克定律可得:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon'_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} & \epsilon'_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E} \\ \gamma'_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

其中, μ 为柏桑比, E 为弹性模量, $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ 为剪切模量。求解 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} , 并注意到公式 (1.6), 则由 (e) 可得:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon'_x + \mu \epsilon'_y) = \frac{Ez}{1-\mu^2} (\chi_x + \mu \chi_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon'_y + \mu \epsilon'_x) = \frac{Ez}{1-\mu^2} (\chi_y + \mu \chi_x) \\ \tau_{xy} &= G \gamma'_{xy} = 2Gz \chi_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

挠曲面方程式 我们已经得到了为求得基本方程所需的全部公式。为了最后得出平板的挠曲面方程式, 必须将方程组 (1.3) 中所有的内力素用一个位移 w 表示出来。为此目的,

可以将公式 (1.7) 中的 σ_x 、 σ_y 与 τ_{xy} 代入方程组 (1.1) 的有关公式, 进行积分, 并注意到公式 (1.4) 与 (1.5), 最后得:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= D(\chi_x + \mu\chi_y) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ M_y &= D(\chi_y + \mu\chi_x) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ M_{xy} &= D(1-\mu)\chi_{xy} = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

将 (1.8) 代入方程组 (1.3) 的第二、三两式, 并注意到公式 (1.4), 得:

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= D\frac{\partial}{\partial x}(\chi_x + \chi_y) = -D\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 w) = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ Q_y &= D\frac{\partial}{\partial y}(\chi_x + \chi_y) = -D\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 w) = -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

在方程 (1.8)、(1.9) 中, D 为平板的挠曲刚度:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \quad (1.10)$$

而 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 称为拉普拉斯算子。

方程组 (1.8)、(1.9) 给出了以位移函数 w 来表示的平板的弯矩、扭矩与横向剪力。以此代入方程组 (1.3) 的第一式, 即得基本方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \frac{q(x,y)}{D} \\ \text{或} \quad \nabla^2 \nabla^2 w &= \frac{q(x,y)}{D} \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

这就是在侧向荷载下小挠度平板的挠曲面微分方程式^①。这是一个四阶的偏微分方程。在每一给定的情况下, 如果能够积分方程 (1.11) 以求得满足平板周边边界条件的位移函数 $w(x,y)$, 则可由方程组 (1.8) 与 (1.9) 立刻求得平板各内力素的表达式, 而最大应力将得自公式 (1.2)。因此, 很明显, 平板的小挠度问题归结为, 在给定的荷载与边界条件下, 积分方程 (1.11) 以求得平板中面的挠曲面表达式 $w(x,y)$ 。

§ 1.3 边界条件

在本节中, 我们将首先讨论矩形板直线边缘的各种边界条件, 然后转到曲线边缘的边界条件。图 1-11 表示一矩形板, 取一组直角坐标轴令其 X 和 Y 轴与平板中面的二邻边相重合。在 $y=0$ 的直线边缘为固定边; 在 $x=0$ 的直线边缘为铰接边; 在 $x=a$ 的直线边缘为自由边。

固定边 在平板的小挠度问题中, 固定边缘与平夹边缘之间没有什么区别, 它的特点是沿着固定边缘的各点挠度为零, 以及在该边缘处与中曲面相切的切面和原中面相重合。因此在 $y=0$ 的固定边缘处, 它的二个位移边界条件可写为:

① 方程 (1.11) 有时称为裘尔曼~拉格朗日方程, 是在 1811 年当拉格朗日在审查索菲·裘尔曼的论文时得到的。关于得出这个方程的历史资料可参阅 J. Todhunter and K. Pearson, History of the Theory of Elasticity, vol. 1, pp. 147, 247, 348 以及 vol. 2, part 1, p. 263。

$$(1) \quad (w)_{y=0} = 0 \quad (2) \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \quad (1.12)$$

因为在 $y = 0$ 的固定边缘上, 切线转角 $\frac{\partial w}{\partial y}$ 沿着 X 的变化等于零, 或 $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$, 故在固定边缘处的扭矩 $M_{xy} = 0$ 。

铰接边 在平板的小挠度问题中, 铰轴支承的铰接边边界条件是与简支边相同的。这种边缘的特点是, 在铰接边缘上各点的挠度必为零, 而且平板可以绕铰轴自由旋转。因此在 $x = 0$ 的铰接边处, 它的二个边界条件可写为:

$$(1) \quad (w)_{x=0} = 0 \quad (2) \quad (M_x)_{x=0} = 0$$

如果注意到方程组 (1.8) 的第一式, 则以上第二个边界条件可改写为

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=0} = 0。$$

同时, 由于第一个边界条件, 因此沿着 $x = 0$ 的直线边缘 $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$, 故第二个条件亦可写为 $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=0} = 0$, 或 $(\nabla^2 w)_{x=0} = 0$ 。综上所述, 我们可以将铰接边的两个边界条件写成位移的形式如下:

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad (w)_{x=0} &= 0 \\ (2) \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=0} &= 0 \quad \text{或} \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=0} = 0 \\ &\quad \text{或} \quad (\nabla^2 w)_{x=0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

自由边 在 $x = a$ 的自由边处 (图 1-11), 所有的外力均为零, 故应有:

$$\begin{aligned} (1) \quad (M_x)_{x=a} &= 0 \quad (2) \quad (M_{xy})_{x=a} = 0 \\ (3) \quad (Q_x)_{x=a} &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

但由方程 (1.11) 的阶数可知, 矩形板每边的边界条件数目应为 2, 因此在 (a) 中边界条件的数目多了一个。实际上, 第二、三两个条件可以合并成为一个条件, 因此 (a) 可改写为:

$$(1) \quad (M_x)_{x=a} = 0 \quad (2) \quad (V_x)_{x=a} = 0 \quad (b)$$

其中 V_x 为在外法线在 X 方向内的边缘上全部竖直力的总和, 系由于 Q_x 与 M_{xy} 两个力素所合成。试观图 (1-12) 所示的平板自由边缘 $x = a$ 。在此边缘截面上, 沿 Y 方向分成长度为 dy 的等分区段。设沿边缘某点的扭矩集度为 M_{xy} , 则在该点处一个区段全部面积上的扭矩

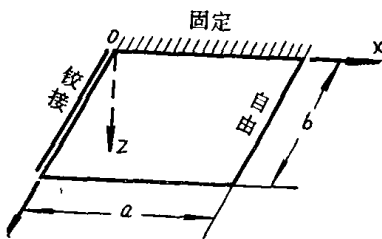


图 1-11

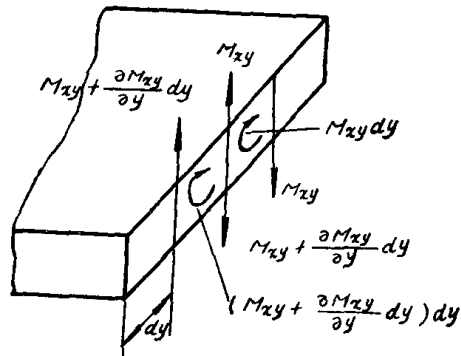


图 1-12

总和为 $(M_{xy} dy)$ 。将此总扭矩用一对作用在区段左右边缘的力偶来代替^①，力偶中的每一个力当然等于 M_{xy} 。对每一区段上的总扭矩作如上的替换，并考虑相邻的二区段，可知沿着边缘的力素 M_{xy} ，在静力上，相当于沿着该边缘分布的剪力 Q'_x ，其集度为 $Q'_x = \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a}$ ，当 M_{xy} 为正时 Q'_x 亦为正。因此竖直力的总和为：

$$(V_x)_{x=a} = \left(Q'_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a} \quad (c)$$

利用方程组 (1.8)、(1.9)，我们可以将自由边缘的两个边界条件 (b) 写成位移形式如下^②：

$$\begin{aligned} (1) \quad & \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \\ (2) \quad & \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} = 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

在边缘 $x=a$ 上，当将 M_{xy} 用力偶来代替之后，我们将不仅得到沿边缘分布的剪力 Q'_x ，同时在此边缘的两端将形成两个集中力，它们的大小适等于各该端的扭矩集度 M_{xy} ，如图 1—13 所示。同样地，对直线边缘 $y=b$ 的扭矩 M_{yx} 作同样处理后，在该边的两端也将产生两个集中力，如图所示。在其它两边上也将发生同样的情形。当平板四边的扭矩为正时，由此所产生的角隅集中力的方向恰如图 1—13 所示，即在角隅 $(0,0)$ 与 (a,b) 处方向向上，在角隅 $(a,0)$ 与 $(0,b)$ 处方向向下。由于这些集中力的存在，使平板的四角有上翘或下弯的趋势，从而产生了角隅处的集中反力 R 。

如果挠曲面的形式为已知，则不难断定其角隅集中反力的方向；如果挠曲面的表达式 $w(x,y)$ 为已知，即很容易算出集中反力 R 的大小。对于一块周边铰接的矩形板，当承受向下作用的荷载时，通常它的四角有向上翘起之势，因此产生了向下的反力。图 1—14 表示一周边铰接的方形板，承受匀布荷载。由图中的虚线可以看出挠曲面的一般形式，从而可以断定角隅处扭率（亦即扭矩）的正负，如图中的正负符号所示。可见四个角隅反力都是向下作

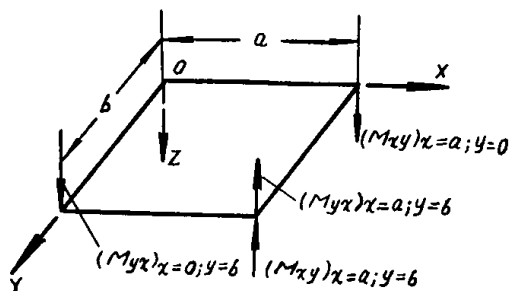


图 1—13

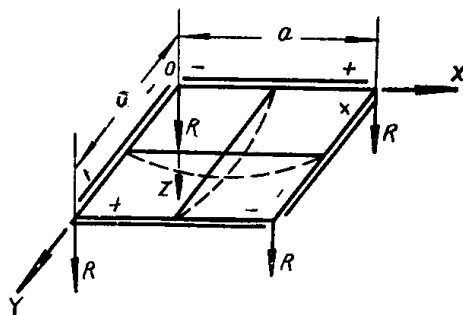


图 1—14

用的，而且由于对称的缘故，可得：

$$R = 2(M_{xy})_{x=a, y=b} = -2D(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=a, y=b} \quad (d)$$

这个数值将是一个负值，它说明反力 R 是向下作用的。

在固定边缘或自由边缘处，因为扭矩等于零，显然将不存在这种角隅的集中反力。

弹性固定边 于图 1—15，a 所示的平板，在 $x=a$ 的边缘处，平板系与支承梁相连。

① 按圣维南原理，这样的代替仅仅对边缘应力的分布有影响，而对平板内部的应力并无显著变化。

② 形式如 (a) 的边界条件系由柏桑所给出。俟后，柯克霍夫建议改用两个边界条件 (b)。至于公式 (c) 的物理意义系引用开尔文与泰脱两氏的解释，见他们的著作：“Treatise of Natural Philosophy”，vol.1, part 2, p.188, 1883。

此种支承边缘称为弹性固定边或弹性支承边。在弹性固定边处，平板的挠度应等于支承梁的挠度，并且平板的弯矩 M_x 应等于支承梁的扭矩。

沿 $x = a$ 的边缘，将平板与梁切开，则在平板的切口上将有弯矩 M_x 与竖力 V_x 。首先来考虑 $(V_x)_{x=a}$ 的作用，它实际上就作为支承梁的荷载（图1—15，b）而使梁产生挠度 w_b 。由于平板与梁之间的连续性，梁的挠度 w_b 应等于平板在 $x = a$ 边缘上的挠度 $(w)_{x=a}$ 。设支承梁的抗挠刚度为 $EI = B$ ，则梁的挠曲线方程为：

$$B\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_{x=a} = p$$

其中 p 为向下作用的支承梁荷载。因为 $p = -(V_x)_{x=a}$ ，同时注意到关系式(c)以及方程组(1.8)、(1.9)，可得弹性固定边的第一个边界条件：

$$B\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_{x=a} = D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right]_{x=a} \quad (1.15)$$

其次来考虑在平板切口处的弯矩 $(M_x)_{x=a}$ ，它实际上就作为支承梁的外扭矩而使后者发生绕梁轴的扭转（图1—15，c）。平板在切口处的倾角 $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=a}$ 就是梁的扭角 φ 。如果扭角的正负按右手螺旋规则来确定，则应有 $\varphi = -\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=a}$ 。梁的扭率，亦即沿梁轴每单位长度内扭角的变化，显然是等于 $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_{x=a}$ 。因此梁内的扭矩 M_K 为 $M_K = C\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -C\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_{x=a}$ ，其中 C 为梁的抗扭刚度。梁的内扭矩 M_K 沿梁轴单位长度内的变化 $\frac{\partial M_K}{\partial y}$ 等于梁每单位长度内的外扭矩 m_K 。正的外扭矩相当于负的弯矩 $-(M_x)_{x=a}$ （见图1—15，c）。因此第二个边界条件为：

$$-C\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)_{x=a} = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=a} \quad (1.16)$$

曲线边缘 最后来研究曲线边缘的边界条件。图1—16，a表示平板中面曲线边缘C的

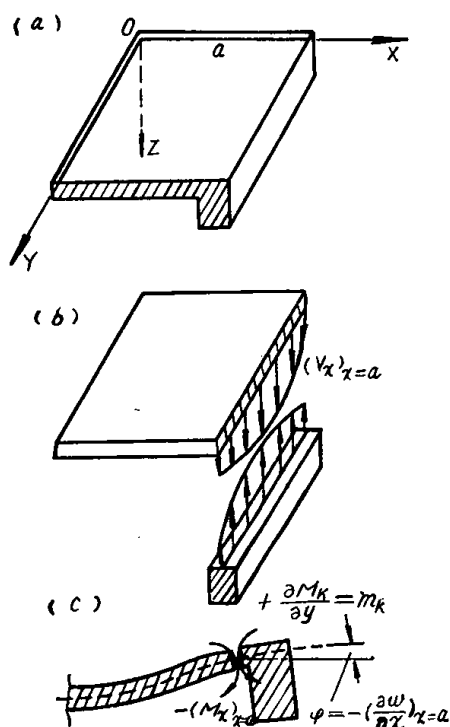


图 1—15

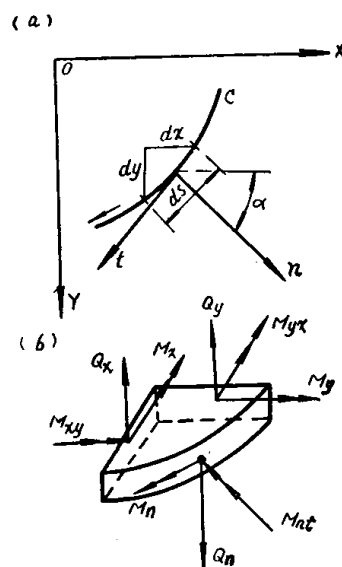


图 1—16