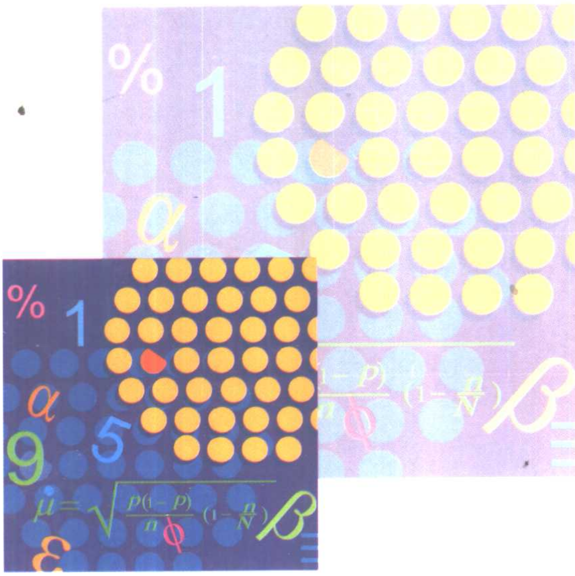
普通高等教育“九五”国家级重点教材



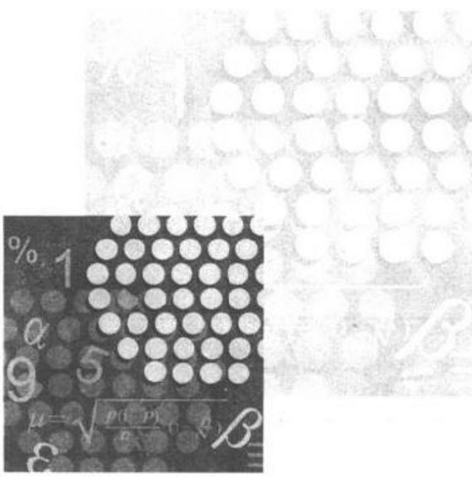
概率论与数理统计

习题与解答

茆诗松　周纪芗　编著

中国统计出版社
China Statistics Press

普通高等教育“九五”国家级重点教材



概率论与数理统计习题与解答

茆诗松　周纪芗　编著

中国统计出版社
China Statistics Press

(京)新登字 041 号

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计习题解答/茆诗松,周纪芗编著.
—北京:中国统计出版社,2000.10
ISBN 7-5037-3392-6

Ⅰ.概…
Ⅱ.①茆… ②周…
Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料
②数理统计—高等学校—教学参考资料
Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 71435 号

责任编辑/吕 军
出版发行/中国统计出版社
通信地址/北京市三里河月坛南街 75 号 邮政编码/100826
办公地址/北京市丰台区西三环南路甲 6 号
电 话/(010)63459084、63266600—22500(发行部)
印 刷/三河市欣欣印刷有限公司
经 销/新华书店
开 本/787×1092mm 1/18
字 数/250 千字
印 张/16
印 数/1—5000 册
版 别/2000 年 10 月第 1 版
版 次/2000 年 10 月第 1 次印刷
书 号/ISBN 7-5037-3392-6/O·38
定 价/30.00 元

序　言

为经济类统计专业本科生编写的教科书《概率论与数理统计》第二版把教材与习题分册出版，这里提供给大家的是为教材配套的习题与解答册。

第二版把习题分节配置，针对性加强了，习题数量也增加了，部分习题给出了较为详细的解答，另外每节又加写了“概要”。这样全书七章共有三十八节，每节都按概要、习题、解答的次序编排，便于阅读和选用。假如能把这个分别如同教材那样从头到尾阅读一遍，可以使你对概率论与数理统计更为亲近，因为这可以加深你对这门课的认识，无论在它的独特的思维方式、计算技巧，还是在应用的面广量大上都可以留下深刻的印象，从而会使你更热爱这门学科。

为什么对部分习题要给出较为详细的解答呢？我们的想法很简单，就是为了从各种角度给出示范，告诉学生应该如何思考、分析和表述。初学这门课做习题时常会犯惑，缺乏思路，难以下手，有时想好了也表达不清楚，有时做完习题也不敢说确实做对了，这些都反映了学生尚不习惯概率论与数理统计独有的思维方式。这时怎么办？只有让学生多听老师怎么讲，多看别人怎么做，多与同学讨论。这一过程就象学下棋，学会下棋的规则还不一定能成为优秀的棋手，除了自己多与别人下棋外，看别人如何下棋，甚至多看棋谱对你提高棋艺都是必不可少的。我们为部分习题作出较为详细的解答，决不是代替学生去思

考，而是想帮助你思考，使你一进门就能抓住问题的要害，解开随机世界的秘密。假设你自己不去独立思考，而把这些解答照搬照抄，那对你的帮助就太小了，很难成为随机世界探秘的能手，因此独立思考，独立去做才是基本要求。

我们如此编写习题与解答也是一种尝试，能否在教学过程中收到实效，受到广大师生和读者的欢迎还有待于实践的检验，很希望听到大家的批评和建议。我们共同的目的都是为了不断提高《概率论与数理统计》的教与学的质量。我们十分感谢国家统计局统计教育中心和中国统计出版社给我们一次宝贵的尝试机会，他们为此提出了很多很多的建议，使本书得以新的面貌出版。

茆诗松　周纪芗

2000 年 7 月

目　　录

第一章 随机事件及其概率

§1.1 随机事件及其运算

概 要

1. **随机现象**：在一定条件下，并不总是出现相同结果的现象。

随机试验：可重复的随机现象。

基本结果 ω：随机现象的最简单的结果，它将是统计中抽样的基本单元，故又称**样本点**。

基本空间 Ω：随机现象所有基本结果的全体。

2. 事件与集合的对应关系。

事件语言	集合语言
事件 A	Ω 的子集 A，$A\subset\Omega$
必然事件 Ω	Ω 的最大子集 Ω。
不可能事件 ϕ	空集 ϕ—Ω 的最小子集。
A 的**对立事件** $\overline{A}$	A 的余集 $\overline{A}$
事件 B **包含**事件 A	集合 B 包含集合 A，$B\supset A$ 或 $A\subset B$
事件 A 与 B **相等**，	集合 A 与 B 相等，$A\supset B$，$B\supset A$
事件 A 与 B **互不相容**	集合 A 与 B 互不相交，$AB=\phi$
事件 A 与 B 的**并**	集合 A 与 B 的并，$A\cup B$
事件 A 与 B 的**交**	集合 A 与 B 的交，$A\cap B=AB$
事件 A 对 B 的**差**，	集合 A 对 B 的差，$A-B$

习题

1 写出下列随机现象的基本空间

(1)抛三枚硬币。

(2)掷三颗骰子。

(3)连续抛一枚硬币，直至出现正面为止。(提示:记正面为 1，反面为 0)

(4)在某十字路口每小时通过的机动车辆数。

(5)某城市一天中诞生的婴儿数。

(6)下一个交易日的上海证券交易所的综合指数。

2 在抛三枚硬币的试验中写出下列事件所含的基本结果。

A=“至少出现一个正面”

B=“最多出现一个正面”

C=“恰好出现一个正面”

D=“出现三面相同”

3 某书在书架上有五个复本，其中两本(编号为 1 与 2)为第一版，另三本(编号为 3，4 与 5)为第二版，一学生要阅读此书第二版。

(1)该学生最多两次就翻到此书第二版的可能基本结果有那些?

(2)事件 A="编号为 5 的书最多两次被翻出"所含的基本结果有那些?

4 袋中装有编号为 1,2,3,4,5 的五个相同的球。若从中任取三个球,请写出这个随机试验的基本空间。计算基本结果总数。

5 把编号为 1,2,3,4,5 的五个球随机放入编号为 a,b,c,d,e 的五个盒子,每个盒子至少能放五个球,请算出这个随机试验的基本空间含有多少个基本结果。

6 在分别标有 1,2,3,4,5,6,7,8 的八张卡片中任取一张。设事件 A 为"抽得一张标号不大于 4 的卡片";事件 B 为"抽得一张标号为偶数的卡片";事件 C 为"抽得一张标号为奇数的卡片"。请用基本结果表示如下事件:

$$A\cup B,AB,\overline{B},A-B,B-A,BC,\overline{B\cup C},(A\cup B)C$$

7 一位工人生产四个零件,以事件 A_i 表示他生产的第 i 个零件是不合格品,$i=1,2,3,4$。请用诸 A_i 表示如下事件:

(1)全是合格品;

(2)全是不合格品;

(3)至少有一个零件是不合格品;

(4)仅仅有一个零件是不合格品。

8 请叙述下述事件的对立事件。

(1)A="掷二枚硬币,皆为正面";

(2)B="射击三次,皆命中目标";

(3)C="加工四个产品,至少有一个正品"。

9 某建筑公司在三个地区各承建一个项目,定义如下三个事件:

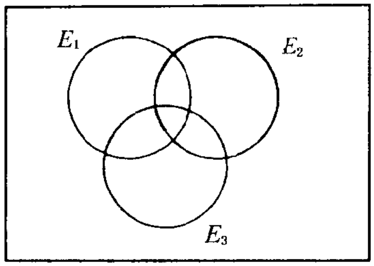
$$E_i=\text{“地区 } i \text{ 的项目可按合同期完成”},\quad i=1,2,3$$

这三个事件间的关系可用下面维恩图表示。

用维恩图上的阴影区域分别表示下列事件。

A="至少一个项目可按期完成";

B="所有项目都可按期完成";



C=“没有一个项目可按期完成”;

D=“仅仅地区 1 的项目可按期完成”;

E=“三个项目中只有一项可按期完成”;

F=“或者仅地区 1 的项目按期完成或者另二个项同时按期完成”。

10 事件是集合,事件的运算性质完全与集合的运算性质相同。现罗列如下,请用维恩图来验证这些性质(提示:等式两端各画一张维恩图):

(1)交换律:$A\cup B=B\cup A$ （并的交换律）

$AB=BA$ （交的交换律）

(2)结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ （并的结合律）

$(AB)C=A(BC)$ （交的结合律）

(3)分配律:$A(B\cup C)=AB\cup AC$ （交对并的分配律）

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ （并对交的分配律）

$A(B-C)=AB-AC$ （交对差的分配律）

(4)对偶原理:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

习题解答

1 (1)$\Omega=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)(1,1,1)\}$(其中 0 表示反面,1 表示正面)

(2)$\Omega=\{(x,y,z):x,y,z=1,2,3,4,5,6\}$

(3)$\Omega=\{(1),(0,1),(0,0,1),(0,0,0,1),\cdots\}$

(4)$\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$

(5)$\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$

(6)$\Omega=\{x: x\geqslant 100\}$

2 $A=\{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1,)\}$

$B=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$

$C=\{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$

$D=\{(0,0,0),(1,1,1)\}$

3 (1)$\{(3),(4),(5),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5)\}$

(2)$\{(5),(1,5),(2,5),(3,5),(4,5)\}$

4 $\Omega=\{(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4),(1,3,5),(1,4,5),(2,3,4),(2,3,5),(2,4,5),(3,4,5)\}$；$\binom{5}{3}=10$，这是从 5 个不同元素中任取 3 个的组合数。

5 1 号球可放入 a,b,c,d,e 五个盒子任一个，故有 5 种放法，2 号球也类似有 5 种放法，其它三个球也都各有 5 种放法，五个球放完后共有 $5^5=3125$ 种放法。

6 由于 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,4,6,8\}$，$C=\{1,3,5,7\}$，所以有 $A\cup B=\{1,2,3,4,6,8\}$；$AB=\{2,4\}$；$\overline{B}=\{1,3,5,7\}=C$；$A-B=\{1,3\}$；$B-A=\{6,8\}$；$BC=\phi$；$\overline{B\cup C}=\overline{\Omega}=\phi$；$(A\cup B)C=\{1,2,3,4,6,8\}\cap\{1,3,5,7\}=\{1,3\}$。

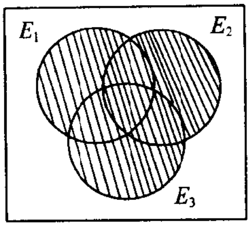
7 (1)$\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4$； (2)$A_1A_2A_3A_4$； (3)$A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$；

(4)$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4\cup\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4$。

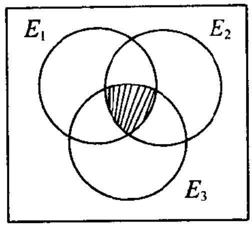
8 $\overline{A}$＝“掷二枚硬币，至少出现一个反面”；$\overline{B}$＝“射击三次，至少有一次没命中”；$\overline{C}$＝“加工四个产品，皆为次品”。

9 事件 A、B、C、D、E、F 的维恩图如下：

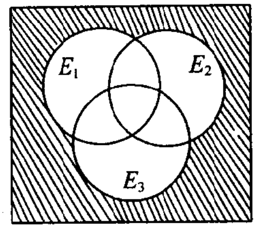
$A=E_1\cup E_2\cup E_3$



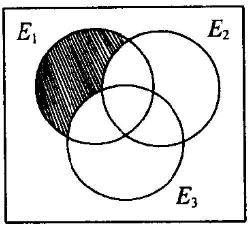
$B=E_1E_2E_3$



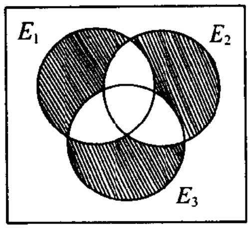
$C=\overline{A}$



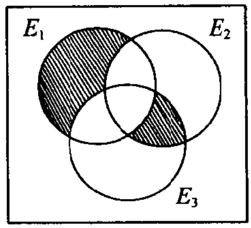
$D=E_1\overline{E}_2\overline{E}_3$



$E=E_1\overline{E}_2\overline{E}_3\cup\overline{E}_1\overline{E}_2\overline{E}_3\cup\overline{E}_1\overline{E}_2E_3$



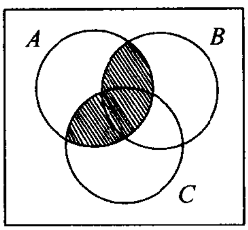
$F=E_1\overline{E}_2\overline{E}_3\cup\overline{E}_1E_2E_3$

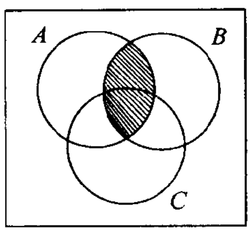


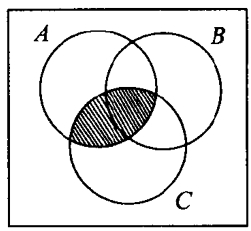
10 交换律与结合律的维恩图略去。

(3)分配律的维恩图

交对并的分配律：

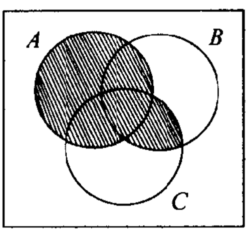


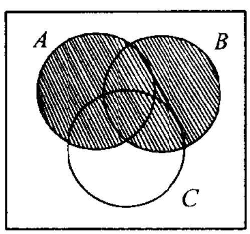


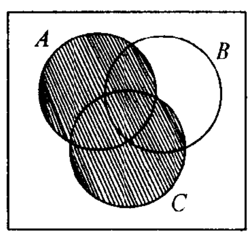


$A(B\cup C) \quad = \quad AB \quad \cup \quad AC$

并对交的分配律：

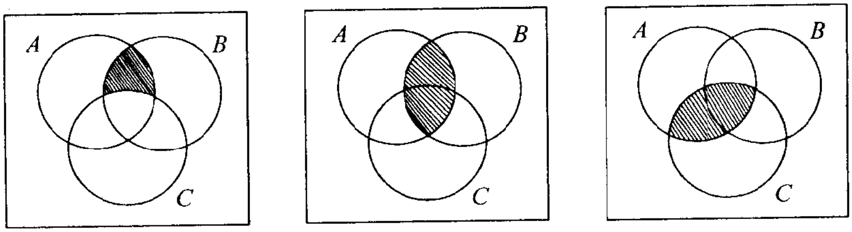






$A\cup(B\cap C) \quad = \quad (A\cup B) \quad \cap \quad (A\cup C)$

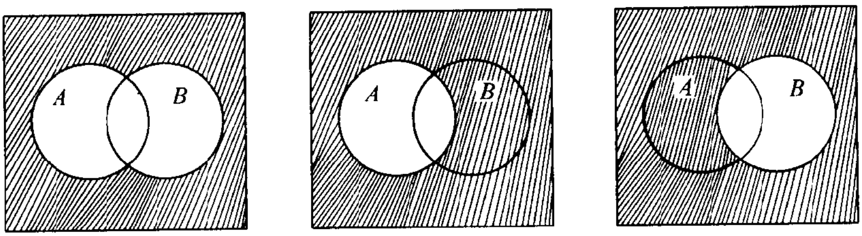
交对差的分配律：



$$A(B-C) \quad = \quad AB \quad - \quad AC$$

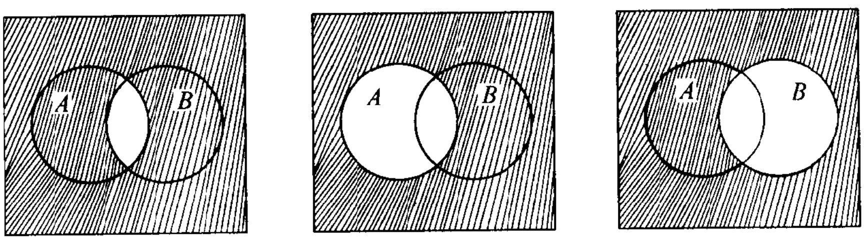
(4)对偶原理的维恩图

并的对立等于对立的交：



$$\overline{A\cup B} \quad = \quad \overline{A} \quad \cap \quad \overline{B}$$

交的对立等于对立的并：



$$\overline{A\cap B} \quad = \quad \overline{A} \quad \cup \quad \overline{B}$$

§1.2 事件的概率

概要

随机事件的发生带有偶然性，但其发生的可能性是可以度量的，概率就是这种度量的最好尺度。它的公理化定义如下：

定义 1.2.1 在一个随机现象中，用来表示任一个随机事件 A 发生可能性大小的实数称为**该事件的概率**，记为 $P(A)$，并规定

(1)**非负性公理** 对任一事件 A，必有 $P(A)\geqslant 0$。

(2)**正则性公理** 必然事件的概率 $P(\Omega)=1$。

(3)**可加性公理** 若 A_1 与 A_2 是两个互不相容事件，则有

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)$$

上述公理化定义是用三条公认的事实来刻划概率的本质，但它没有告诉人们如何确定概率，如今已有三种确定概率的方法，不管那种方法，只有满足上述定义中的三条公理才能说它是概率，这三种确定概率的方法是：

1. 古典方法 它的基本思想是：

(1)所涉及的随机现象只有有限个基本结果，譬如，n 个。

(2)每个基本结果出现的可能性是相同的(等可能性)

(3)若被考察的事件 A 含有 k 个基本结果，则事件 A 的概率就是

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 中含基本结果的个数}}{\Omega\text{ 中基本结果总数}}$$

2. 频率方法 它的基本思想是：

(1)与考察事件 A 有关的随机现象是允许进行大量重复的。

(2)若在 N 次重复试验中事件 A 发生 k_N 次，则事件 A 发生的频率为

$$P_N^*(A)=\frac{k_N}{N}=\frac{\text{事件 }A\text{ 发生次数}}{\text{重复试验次数}}$$

(3)随着重复次数 N 的增加，频率 $P_N^*(A)$ 将呈现稳定状态，频率的稳定值就是概率 $P(A)$。

(4)在现实世界中，无法把一个试验无限重复下去，常在 N 较大时，将频率 k_N/N 作为概率 $P(A)$ 的估计值，甚至就当作概率使用。

3. **主观方法** 它是人们根据经验对某事件 A 发生可能性所给出的个人信念，这里的经验可以是自己的经验、别人的经验、或历史资料，对它们进行整理加工，确认满足三条公理后就可认为是概率。

习题

1 对下述五个事件发生可能性的文字描述找出相应的数值答案：

文字描述	数值答案
(1)事件 A 发生与不发生的可能性一样	(a)0
(2)事件 B 很可能发生，但不一定发生	(b)0.1
(3)事件 C 肯定不发生	(c)0.5
(4)事件 D 能够发生，但不大可能	(d)0.9
(5)事件 E 无疑会发生	(e)1.0

2 掷两颗骰子，求下列事件的概率

(1)事件 A="点数之和为 7"。

(2)事件 B="点数之和不超过 5"。

(3)事件 C="点数之和为偶数"。

3 从 52 张扑克牌中任取 4 张，求下列事件的概率：

(1)全是红色。

(2)二张红色，二张黑色。

(3)二张黑桃。

(4)同花。

(5)没有二张同一花色。

(6)同花顺。

(7)二对(如二张 A 和二张 K 等)。

(8)四条(四张牌形相同，如 4 张 A 等)。

(9)一对。

(10)四张同色。

4 设 5 个产品中有 3 个正品、2 个次品。从中随机抽取 2 个，求抽出的 2 个产品中全是次品、仅有一个次品和没有次品的概率各为多少？

5 设 5 个产品中有 3 个正品、2 个次品。从中有返回地随机抽取 2 个。求抽出的 2 个产品全是次品、仅有一个次品和没有次品的概率各为多少？

6 从 N 个自然数 $1,2,\cdots,N$ 中随机抽出二个数，问其中一个大于 $K(1<K<N)$，另一个小于 K 的概率是多少？

7 抛两枚硬币，至少出现一个正面的概率是多少？

8 十七世纪的意大利赌徒认为：三颗骰子掷出的点数之和为 9 的概率与为 10 的概率是相等的。你的看法如何？

9 任取两个自然数，求它们之和为偶数的概率。

10 把一个各面都涂上红色的立方体，均分为一千个小立方体。把小立体混乱后，从中随机取出一个小立方体。问四面涂有红色、三面涂有红色、二面涂有红色、一面涂有红色和没有一面涂有红色的概率各是多少？

11 一位姑娘把 6 根草握在手掌中，只露出其头与尾。然后请她的男友把 6 根头两两连结，六根尾也两两连结。姑娘放开手后，若六根草恰好连成一个环的话，她就愿嫁给他。求姑娘愿嫁给他的概率。

12 把 r 个不同的球随机放入 n 个格子(如箱子)，假如每个格子能放很多球，每个球落入每个格子的可能性相同，若 $n\geqslant r$，求下列事件的概率。

(1)事件 $A=$“恰有 r 个格子中各有一球”，

(2)事件 $B=$“至少有一个格子有不少于二个球”。

13 求 r 个人中至少有二个人的生日相同的概率。当 $r=10,20,30,40,50$ 时，相应的概率各是多少？(提示：把生日看作 365 个格子，把人看作球)

14 若设一个人的生日是等可能地分布在 12 个月中，求六个人的生日恰好集中在一月和二月内的概率。