

数字信号处理丛书 何振亚 主编  
Modern Spectral Estimation

# 现代谱估计

东南大学出版社

## 内 容 简 介

本书全面系统地论述了现代谱估计技术中的各种理论与方法。全书共九章,内容包括:纯连续谱估计的AR与ARMA模型参量法、纯离散谱与混合谱估计的正弦组合与阻尼复指数模型参量法、非参量法谱估计的最小方差法与奇异值/特征值分解处理法、应用信息论的熵谱估计法、多谱(高阶谱)估计、二维谱估计与多维阵列谱估计。本书取材广泛,内容新颖,理论联系实际,系统性强。

本书可用作高等学校无线电技术、通信、电子仪器及测量技术、信息科学等专业高年级学生和研究生教材;亦可供从事信号处理及谱分析与应用的工程技术人员参考。

责任编辑 朱经邦

责任校对 王小宁

## 现 代 谱 估 计

王宏禹 著

---

东南大学出版社出版

南京四牌楼2号

江苏省新华书店发行 东南大学印刷厂印刷

开本850×1168毫米 1/32 印张12.875 字数333千字

1990年10月第1版 1991年6月第1次印刷

印数:1—1500册

---

ISBN 7-81023-415-3

---

TN·42 定价:3.95元

---

# 序

信息科学是研究各种信号与信息的产生、获取、传输、变换、加工处理、分类识别、存贮及利用等内容的一门科学，其重要性将随着工业、农业、国防和科学技术的发展而与日俱增。信号与信息处理学科是信息科学的重要组成部分，它的基础理论和方法已经广泛应用于雷达、声纳、数据通信、语言通信、图象通信、图象处理、计算机图形学、自动识别、自动控制、机器视觉、人工智能、生物医学、振动工程、宇航工程、遥感技术、地质勘探以及波谱学等几乎一切技术领域。该学科水平的高低，可反映一个国家的整体科技水平，故世界各国都非常重视此学科的课题研究和人才培养。我国也专门设立了信号与信息处理学科(专业)来培养硕士、博士研究生；每年在国内外学术会议和刊物上发表的论文甚多，包括一维和多维的信号与系统参数估计，离散变换及其快速算法，数字滤波和检测，谱估计与建模，自适应信号处理，语音信号处理，图象数字处理与识别，VLSI 信号处理等分支学科。

为了反映该学科迅速发展的面貌和世界各国近年来所取得的最新研究成果，特组织国内外专家教授撰写成本丛书，其中有些内容在国内同类书刊中还是首次发表。丛书共含六本专著：

- 信号处理的数学方法 (柳重堪教授)
- 离散变换及快速算法 (钱惠生教授)
- 信号复原与重建 (王延平教授)
- 现代谱估计 (王宏禹教授)
- 自适应信号处理 (何振亚教授)
- VLSI 阵列处理 (S. K. Yung教授)

这套丛书的特点是内容丰富、取材新颖、理论性强、系统性好、阐述严谨、概念清楚，便于阅读，可以作为硕士、博士研究生课程的教材或主要参考书，也可作为科技人员进修的专著，对我国培养高层次人才和推动学科发展将起到重要的作用。

何振亚

1990.9.20于南京

## 前 言

为了研究二阶平稳随机过程的性能，人们通常使用谱密度来描述，这是因为谱的表达式可以揭示出过程中所隐含的周期与靠得很近的谱峰等有用信息。但用谱密度来描述过程的特征，必须研究从有限长平稳时间序列估计谱密度的可靠与性能优良的估计方法，这就是谱估计的问题。

平稳随机过程谱估计的发展经历了两个阶段：1967年以前为经典谱估计阶段，以传统的傅里叶变换为主要工具，周期图法与布莱克曼—图基法（简称BT法）属于这一类；1967年以后为现代谱估计阶段，是基于非线性的谱分析法，包括各种模型参量法、熵谱法及最小方差与奇异值/特征值分解处理的非参量法等。经典谱估计于长数据序列时有良好的谱估计性能，为现代谱估计所不及，但于短数据序列时，经典谱估计存在分辨率不高等致命弱点，现代谱估计则具有优良性能，为经典法所远不能及。因此，目前经典谱估计技术与现代谱估计技术互为补充，构成完整的谱估计技术。

现代谱估计是融合经典变换技术、统计估计理论、系统辨识、信息论、时间序列分析及计算技术等方面的理论与技术而新发展起来的一门学科与技术，广泛应用于地球物理、雷达、声纳、图象处理、语言识别、振动分析以及生物医学等领域。

现代谱估计发展非常迅速，新理论、新方法与新技术不断涌现，可以说正处于方兴未艾的蓬勃发展之中。因此要想完整、系统地阐述它，确实不容易，但高等院校与科研、生产部门均迫切需要，为此，结合本人近年来的教学经验及进行的科学研究，写成此书，希望它能对从事现代谱估计的科技人员及高等院校有关师生有所裨益。

本书共九章。第一章为本书的引论；第二章与第三章分别介绍纯连续谱估计的 AR 模型参量法与 ARMA 模型参量法；第四章介绍纯离散谱与混合谱估计的正弦组合与阻尼复指数模型参量法；第五章与第六章分别介绍非参量法谱估计中的最小方差法与奇异值/特征值分解处理法；第七章介绍应用信息论中熵的熵谱估计法；第八章介绍多谱（高阶谱）估计；第九章介绍二维谱估计与多维基阵谱估计。本书的分类及不少内容在以前的书中是未曾出现过的，作者认为这样处理有助于对现代谱估计的清楚了解及充分反映其最新成就。限于本书篇幅，未将自适应谱估计与谱估计韧性方法包括在内。若读者对此有兴趣，可参阅作者另一本著作《随机数字信号处理》有关部分。

本书的写作与出版得到了东南大学何振亚教授的大力支持，他审阅了全书初稿，提出许多宝贵意见与建议，在此表示深切的谢意。书中难免存在不妥与错误之处，敬请读者批评指正。

王宏禹 于 大连理工大学

1989年6月

# 目 录

|                                       |       |
|---------------------------------------|-------|
| <b>第一章 引 论</b> .....                  | ( 1 ) |
| 1-1 谱估计的发展.....                       | ( 1 ) |
| 1-2 谱密度意义与基础.....                     | ( 4 ) |
| 1-3 平稳随机信号模型.....                     | ( 7 ) |
| 1-4 现代谱估计方法简述.....                    | (11)  |
| <b>第二章 AR 模型参量法</b> .....             | (16)  |
| 2-1 尤利-沃克 (Yule—Walker) 方程 .....      | (16)  |
| 2-2 莱文森—德宾 (Levinson—Durbin) 算法 ..... | (18)  |
| 2-3 预测误差滤波器法 .....                    | (23)  |
| 2-4 AR 模型参量估计 .....                   | (26)  |
| 2-5 AR 模型阶数的判定 .....                  | (58)  |
| 2-6 AR 谱估计存在的问题 .....                 | (62)  |
| 附录2-1 最小二乘标准方程式 .....                 | (74)  |
| 2-2 用于协方差法中的乔里斯基 (Choleskey) 分解法..... | (77)  |
| <b>第三章 ARMA 模型参量法</b> .....           | (82)  |
| 3-1 输入—输出最小二乘估计法 .....                | (83)  |
| 3-2 参量估计中的非线性问题 .....                 | (84)  |
| 3-3 AR参量与 MA 参量的联合估计法.....            | (86)  |
| 3-4 次最佳估计法之一——高阶AR模型法.....            | (95)  |
| 3-5 次最佳估计法之二——修正的尤利-沃克方程法.....        | (100) |
| 3-6 次最佳估计法之三——辅助变量法 .....             | (108) |
| 3-7 MA 参量估计及其谱估计.....                 | (114) |
| 3-8 ARMA 模型阶数的判定 .....                | (127) |
| <b>第四章 正弦组合与阻尼复指数模型法</b> .....        | (132) |
| 4-1 皮萨伦科谱分解法 .....                    | (132) |
| 4-2 普罗尼复指数模型法 .....                   | (142) |

|            |                               |              |
|------------|-------------------------------|--------------|
| 4-3        | 商一差算法 .....                   | (153)        |
| 4-4        | 卡玛瑞桑和塔夫茨线性预测法 .....           | (158)        |
| 4-5        | 计算机模拟实验例 .....                | (167)        |
| 附录4-1      | 正弦信号自相关矩阵的特征值 .....           | (169)        |
| <b>第五章</b> | <b>最小方差法</b> .....            | <b>(174)</b> |
| 5-1        | 最大似然估计与线性最小方差估计 .....         | (174)        |
| 5-2        | 最大似然滤波器分析法 .....              | (177)        |
| 5-3        | 与 AR 模型参量法的关系 .....           | (179)        |
| 5-4        | 最大似然滤波器分析法的推广 .....           | (181)        |
| 5-5        | 归一化最大似然法 .....                | (183)        |
| 5-6        | 协方差约束的最大似然法 .....             | (186)        |
| 5-7        | 互谱估计中的最大似然法 .....             | (187)        |
| <b>第六章</b> | <b>奇异值分解处理法</b> .....         | <b>(190)</b> |
| 6-1        | 奇异值分解原理 .....                 | (191)        |
| 6-2        | 正弦组合模型自相关矩阵的特征分析 .....        | (198)        |
| 6-3        | 以特征分解改进的谱估计法 .....            | (202)        |
| 6-4        | 计算机模拟实验例 .....                | (210)        |
| <b>第七章</b> | <b>熵谱估计法</b> .....            | <b>(214)</b> |
| 7-1        | 熵与熵率 .....                    | (214)        |
| 7-2        | 谱熵与构型熵 .....                  | (221)        |
| 7-3        | 最大熵谱分析 I .....                | (230)        |
| 7-4        | 最大熵谱分析 II .....               | (240)        |
| 7-5        | 最小交叉熵谱分析 I .....              | (252)        |
| 7-6        | 最小交叉熵谱分析 II .....             | (271)        |
| 7-7        | 多信号交叉熵谱分析 .....               | (276)        |
| 7-8        | 最大熵谱分析拓广 .....                | (280)        |
| 7-9        | 最小交叉熵谱分析拓广 .....              | (285)        |
| 7-10       | 最大互信息谱估计与最大联合熵谱估计 .....       | (287)        |
| 附录 7-1     | $n!$ 斯特林 (Stirling) 近似式 ..... | (295)        |
| 7-2        | 分块矩阵行列式恒等式的证明 .....           | (297)        |
| 7-3        | 准统计近似的推演 .....                | (297)        |

|            |                            |       |
|------------|----------------------------|-------|
| <b>第八章</b> | <b>多谱(高阶谱)估计</b> .....     | (304) |
| 8-1        | 累积量与高阶矩 .....              | (305) |
| 8-2        | 多谱的定义与性质 .....             | (320) |
| 8-3        | 双谱的经典估计法 .....             | (333) |
| 8-4        | 双谱估计的模型参量法 .....           | (338) |
| 8-5        | 用多谱提取相位信息的方法 .....         | (351) |
| 8-6        | 双谱估计的应用举例 .....            | (361) |
| <b>第九章</b> | <b>二维谱估计与多维阵列谱估计</b> ..... | (368) |
| 9-1        | 二维因果、半因果及非因果系统 .....       | (368) |
| 9-2        | 二维经典谱估计法 .....             | (370) |
| 9-3        | 二维AR 模型参量谱估计法 .....        | (373) |
| 9-4        | 二维最大熵谱估计法 .....            | (384) |
| 9-5        | 二维特征分解谱估计法 .....           | (385) |
| 9-6        | 多维基阵的频率一波数功率谱估计 .....      | (389) |

# 第一章 引 论

## 1—1 谱估计的发展

1807年12月21日法国工程师傅里叶在该国科学院演讲时，提出了著名的傅里叶变换，它不仅是数学上的最伟大的成就之一，也给科学技术带来了进步和繁荣。在信号分析与处理中，傅氏变换是常用的一种分析工具。

用傅氏变换作谱分析起源于十九世纪末舒斯特 (Schuster) 所做的工作。舒斯特对观测数据序列  $\{x_n, n=1, 2, \dots, N\}$  首先提出了周期图 (Periodogram) 术语，定义为

$$S(\omega) = \frac{1}{N} |x_1 e^{-j\omega} + x_2 e^{-j2\omega} + \dots + x_N e^{-j\omega N}|^2$$

以寻找数据中的“隐周期性”。例如，时间序列由角频率  $\omega_0$  的正弦信号与噪声叠加而成，则周期图在  $\omega = \omega_0$  处会出现一个峰值。这样，通过计算周期图，由各峰值就可显示出正弦频率的位置。

1930年维纳发表了他的不朽论文“广义谐波分析”，引进了自相关函数和功率谱的定义，并证明这两个函数互为傅氏变换，如今称维纳—辛钦定理。这项工作建立了使用傅氏变换方法处理随机过程的理论体系，是傅氏变换使用上的一个里程碑，也是谱分析开拓性工作的第二步。

1958年布莱克曼 (Blackman) 和图基 (Tukey) 发表了经典工作的论文“由通信工程观点对功率谱的测量”，给出了用维纳相关法从抽样数据序列得到功率谱的实现方法。该方法首先从观测数据估计自相关延迟，然后将自相关估计值乘以窗函数，最

后对加窗延迟估计值作傅氏变换得到功率谱估计。这种方法亦简称为 BT 法，其性能与窗函数的选择密切相关，许多人曾花费很大精力研究较好的窗函数。

1965年库利 (Cooley) 和图基提出了快速傅氏变换(FFT)，它对科学与工程实践的巨大作用，无论怎样形容都是不过份的。快速傅氏变换这一有效算法，使得人们对被搁置许久的周期图法又发生了新的兴趣。当前，周期图是最流行的功率谱估计算法。

BT 法和周期图法所得到的各种功率谱估计都是应用了经典的傅里叶分析方法，故称为经典谱估计法。这两种谱估计法亦称为线性谱估计法，这是因为它们对所得到的数据序列只进行线性运算。BT 法与周期图法本质是一样的，它们都是将有限长的数据段看作为无限长的抽样序列给予开窗截断的结果。不论数据开窗还是自相关开窗，都导致在频域发生“泄漏”现象，即功率谱主瓣内的能量泄漏到旁瓣内。这样，弱信号的主瓣很容易被强信号的旁瓣淹没或畸变，造成谱的模糊和失真。为了降低旁瓣，许多人在选择窗口函数的形式上和窗口函数处理方法上（如分段平均等）花费了很大功夫，但所有这种旁瓣抑制都是以损失谱分辨率为代价的。尤其在短数据序列情况，经典法谱估计的这种缺点变得格外突出。因为这时谱分辨率的极限只由抽样数据的长度决定，数据长度越短，谱分辨率越低。实际上，短数据段是会经常遇到的。例如在雷达上，从每一个接收到的脉冲中，只能获得很少几个数据样本。为了克服这些缺点，促使现代谱估计的产生和发展。多年来，除了应用傅氏简谐正弦模型外，在其它非工程领域也用过一些别的时间序列模型。早在1795年普罗尼(Prony)提出了对气体化学实验数据用指数模型拟合的方法；1927年尤利(Yule)发表了一篇带根本性的论文，专门研究了日斑太阳黑子数时间序列的周期性，文中就平稳随机序列，引入了有限参数模型的概念，他利用1794—1924年的黑子数，得到了下列自回归方程（去掉平均值后）

$$x_n - 1.34254x_{n-1} + 0.65504x_{n-2} = w_n$$

由此算得太阳黑子出现的周期为10.06年。尤利表明,他的自回归方法与舒斯特周期图法相对立,代表了谱估计的另一种方法。在统计学和数学分析领域,还提出一些其它模型,这些非工程领域中的时间序列分析,也存在着现代谱估计的源头。

现代谱估计技术是从1967年开始的,1967年伯格(Burg)受到他本人在地震应用研究中线性预测滤波方法的启发,导出了最大熵谱分析法。1968年帕曾(Parzen)正式提出了自回归(AR)谱估计法。1971年范登-博斯(Van Den Bos)证明了最大熵谱分析与AR谱估计等效。自此开展了对AR谱估计的深入研究及对其它模型法的研究,如滑动平均(MA)模型、自回归滑动平均(ARMA)模型及普罗尼复指数模型(它与AR模型在数学上有某些相似之处)等,它们构成了现代谱估计的参量法。与此同时,还出现了现代谱估计的非参量法:1969年卡彭(Capon)为分析阵列的频率一波数谱估计而提出了最大似然谱估计法,1971年洛卡斯(Locass)将其推广到时间序列的功率谱估计中。现代谱估计的参量法和非参量法,都是基于非线性运算的,故亦称为非线性谱估计法。

上述非线性谱估计方法都具有分辨率高等的优点,而且特别适用于短数据序列的谱估计。因此,它一出现就受到人们的高度重视,并很快应用于各领域。现代谱估计发展非常迅速,各种新理论与新方法不断出现,自八十年代初以来又形成一些新的分支,主要有应用信息论的熵谱估计法、奇异值/特征值分解处理法谱估计、多谱(高阶谱)估计及多维谱估计等。现代谱估计的发展已成为当今一门不可缺少的新学科与新技术,不仅需要系统总结其已有的理论与方法,还应不断地密切注意日新月异的新发展。

## 1—2 谱密度意义与基础

为了使读者对谱密度估计或谱估计了解清楚起见，有必要先扼要介绍一下谱密度的意义与基础。

### 一、能谱密度或能谱

设  $x(t)$  是确定性的复连续信号，若它绝对可积，或其能量  $E$  有限，即

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (1-2-1)$$

则  $x(t)$  的连续傅氏变换(CFT)存在，由下式给出

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (1-2-2)$$

根据巴塞瓦 (Parseval) 能量定理，有

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (1-2-3)$$

由上式可见，对能量有限的信号  $x(t)$ ，其能量  $E$  在数值上等于信号频谱模值的平方函数  $|X(f)|^2$  于频域上的积分。正因为如此，把  $|X(f)|^2$  叫作信号能谱密度，或简称为能谱，记作

$$e(f) = |X(f)|^2 \quad (1-2-4)$$

对于离散信号  $x_n = x(n\Delta t)$ ， $-\infty < n < \infty$ ，其傅氏变换为

$$X(f) = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \exp(-j2\pi fn \Delta t) \quad (1-2-5)$$

若信号是有限带宽的，即  $X(f)$  在间隔  $-1/2\Delta t \leq f \leq 1/2\Delta t$  内，能谱密度或能谱仍为式(1-2-4)。

### 二、功率谱密度或功率谱

当  $x(t)$  是广义平稳随机过程时，其能量通常是无限的。需要

研究功率在频域上的分布，即功率谱密度或功率谱  $S_{xx}(f)$ 。对于平稳随机过程，谱分析所用的是自相关函数

$$r_{xx}(\tau) = E[x(t+\tau)x^*(\tau)] \quad (1-2-6)$$

而不是随机过程本身，维纳-辛钦定理通过傅氏变换将自相关函数  $r_{xx}(\tau)$  与功率谱  $S_{xx}(f)$  联系起来，即

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad (1-2-7)$$

对于有限数据序列  $\{x_n, n=0, 1, \dots, N-1\}$ ，BT 法给出了由延迟自相关估计  $\hat{r}_{xx}(m)$  得到功率谱估计的计算公式为

$$P_{BT}(f) = \Delta t \sum_{m=-M}^M \hat{r}_{xx}(m) \exp(-j2\pi f m \Delta t) \quad (1-2-8)$$

$f$  的取值范围： $-1/2\Delta t \leq f \leq 1/2\Delta t$ 。周期图法给出的功率谱估计的计算公式为

$$I_N(f) = \frac{1}{N\Delta t} \left| \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j2\pi f n \Delta t) \right|^2 \quad (1-2-9)$$

当延迟自相关估计采用有偏估计时，即

$$\hat{r}_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x_{n+m} x_n^*, \quad m=0, 1, \dots, M \quad (1-2-10)$$

可以证明

$$P_{BT}(f) = I_N(f)$$

即周期图与 BT 法中有偏自相关估计所得谱估计相同。

### 三、纯连续、纯离散及混合功率谱密度

自相关序列  $\{r_{xx}(\tau)\}$  是非负定的，由赫尔格洛兹(Herglotz)定理<sup>[6]</sup>知唯一存在分布函数  $F_x(\omega)$  满足  $F_x(\omega) = 0$  与

$$r_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\tau\omega} dF_x(\omega) \quad (1-2-12)$$

$F_x(\omega)$  为功率谱分布函数，它是在  $[-\pi, \pi]$  上有界、非减、右

连续函数。 $F_x(\omega)$  可以分解成三个分布函数  $F_1(\omega)$ 、 $F_2(\omega)$  与  $F_3(\omega)$  之和, 即

$$F_x(\omega) = F_1(\omega) + F_2(\omega) + F_3(\omega), \quad \omega \in [-\pi, \pi] \quad (1-2-13)$$

其中  $F_1(\omega)$  为绝对连续的分布函数, 因此存在  $S_1(\omega)$  满足

$$S_1(\omega) = \frac{dF_1(\omega)}{d\omega} \quad (1-2-14)$$

由于  $F_1(\omega)$  是分布函数, 它是非减的, 于是  $S_1(\omega) \geq 0$ 。式(1-2-13)中  $F_2(\omega)$  是阶跃的分布函数, 故

$$\frac{dF_2(\omega)}{d\omega} = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \delta(\omega - \omega_m) \quad (1-2-15)$$

也就是  $F_2(\omega)$  在  $\omega = \omega_m$  处有  $\alpha_m$  阶跃,  $m = 1, 2, \dots$ 。由  $F_2(\omega)$  的非减性得  $\alpha_m > 0$ 。 $F_3(\omega)$  是具有几乎处处(a.e.)为零的导数的分布函数, 即

$$\frac{dF_3(\omega)}{d\omega} = 0 \quad (\text{a.e.}) \quad (1-2-16)$$

称它为分解式(1-2-13)中的奇异部分。在实际应用中, 奇异部分一般不会出现, 今后均假定

$$F_x(\omega) = F_1(\omega) + F_2(\omega) \quad (1-2-17)$$

$F_x(\omega)$  的典型形式如图 1-1 所示。

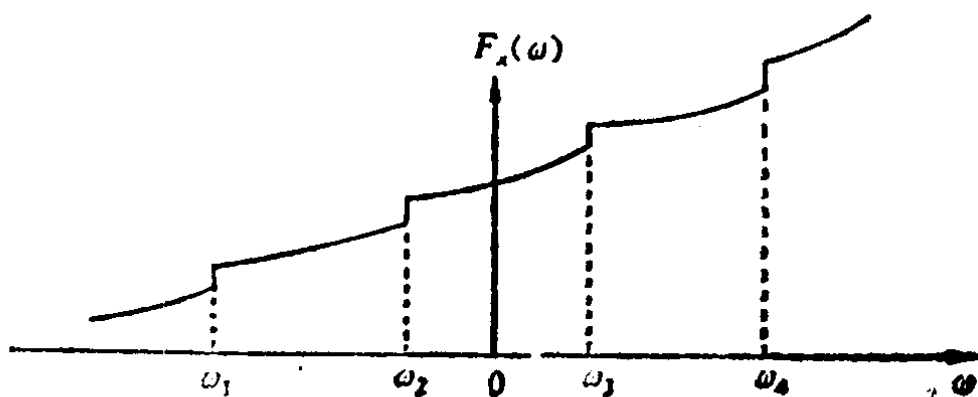


图 1-1

由式(1-2-17)有

$$S_{xx}(\omega) = \frac{dF_x(\omega)}{d\omega} = S_1(\omega) + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \delta(\omega - \omega_m) \quad (1-2-18)$$

当  $F_2(\omega) = 0$ ,  $F_x(\omega) = F_1(\omega)$  时,  $S_{xx}(\omega) = S_1(\omega)$ , 并且

$$r_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\tau\omega} S_{xx}(\omega) d\omega \quad (1-2-19)$$

此时为纯连续功率谱密度。当  $F_1(\omega) = 0$ ,  $F_x(\omega) = F_2(\omega)$  时,

$S_{xx}(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \delta(\omega - \omega_m)$ , 此时为纯离散功率谱密度。如果

$F_x(\omega)$  同时含有两者, 则为混合功率谱密度, 它可想象为在连续函数  $S_1(\omega)$  上于  $\{\omega_m\}$  点处叠加一系列函数的“尖峰脉冲”。 $S_{xx}(\omega)$  一般形式的粗略概念示意如图 1-2 所示。

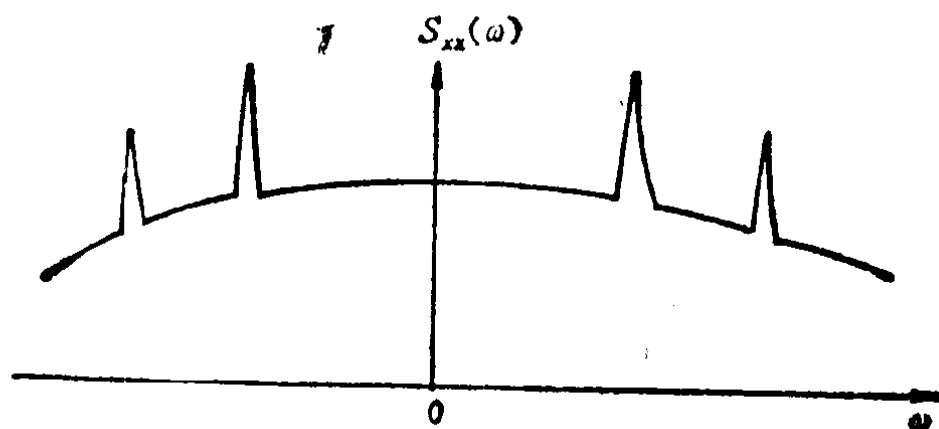


图 1-2

### 1—3 平稳随机信号模型

在现代谱估计中广泛使用模型参量法进行谱估计, 因此本节讨论其常用的各种平稳随机信号模型。

#### 一、具有纯连续谱的平稳随机信号模型

常用的纯连续谱的平稳随机信号模型有自回归 (AR) 模型、

滑动平均(MA)模型及自回归滑动平均(ARMA)模型。平稳离散随机信号 $\{x_n\}$ 的ARMA( $p, q$ )模型表示式为

$$x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_p x_{n-p} = w_n + b_1 w_{n-1} + \cdots + b_q w_{n-q} \quad (1-3-1)$$

式中  $w_n$  为零均值与方差 $\sigma^2$  的白噪声。与式(1-3-1)对应的离散线性系统的传递函数 $H(z)$ 为

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (1-3-2)$$

其中

$$A(z) = 1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}$$

$$B(z) = 1 + \sum_{k=1}^q b_k z^{-k}$$

$A(z)$ 、 $B(z)$  在  $Z$  平面的单位圆上无零点。这种信号模型亦称为零-极点模型。

当式(1-3-1)中  $q=0$  时, 有

$$x_n = - \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} + w_n \quad (1-3-3)$$

这就是  $p$  阶自回归信号模型AR( $p$ ), 其传递函数为

$$H(z) = \frac{1}{A(z)}$$

这种信号模型亦称为全极点模型。

当式(1-3-1)中  $p=0$  时, 有

$$x_n = \sum_{k=0}^q b_k w_{n-k}, \quad b_0 = 1 \quad (1-3-5)$$

这就是  $q$  阶滑动平均信号模型 MA( $q$ ), 其传递函数为

$$H(z) = B(z) \quad (1-3-4)$$

这种信号模型亦称为全零点模型。

伍洛德 (Wold) 分解定理给出了AR、MA 及 ARMA 三种模型之间的关系。根据这个定理, 任何一个方差有限的平稳ARMA模型或MA模型, 都可用一无限阶AR模型来表示。同样地, 任何一个方差有限的平稳ARMA模型或AR模型, 都可用一无限阶MA模型来表示。这就是说, 如果在这三者之间, 即使选错了AR或MA模型, 只要阶数足够高, 仍然能够得到很好的近似。因此, ARMA模型可以用高阶的AR模型来近似。由于AR模型参量估计仅需求解线性方程组, 与ARMA和MA模型参量估计相比, 在计算上方便得多, 故通常以AR模型用得最多。

## 二、具有纯离散谱的平稳随机信号模型

常用的纯离散谱的实平稳随机信号模型为如下的实谐波模型:

$$x_n = \sum_{i=1}^M A_i \cos(\omega_i n + \theta_i) \quad (1-3-7)$$

而复平稳随机信号模型为如下的复谐波模型:

$$x_n = \sum_{i=1}^M A_i e^{j(\omega_i n + \theta_i)} \quad (1-3-8)$$

式中  $M$ 、 $\{A_i\}$ 、 $\{\omega_i\}$  ( $1 \leq i \leq M$ ) 为常量, 而  $\{\theta_i\}$  ( $1 \leq i \leq M$ ) 为在  $[-\pi, \pi]$  区间上独立、均匀分布的随机变量。下面先讨论实谐波模型情况。由式(1-3-7)有

$$x_n = \sum_{i=1}^M (a_i \cos \omega_i n + b_i \sin \omega_i n) \quad (1-3-9)$$

其中  $a_i = A_i \cos \theta_i$ ,  $b_i = A_i \sin \theta_i$ 。由上式可见, 实谐波模型是具有随机振幅  $a_i$  与  $b_i$  的简谐振动和。这种谐波过程是平稳的, 为了方便起见, 以  $M=1$  时, 即

$$x_n = A \cos(\omega n + \theta) \quad (1-3-10)$$

加以证明。设随机相角  $\theta$  的概率密度为