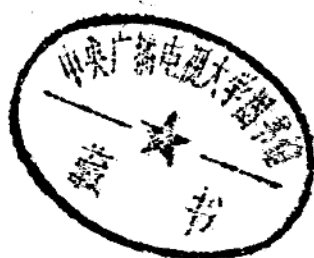


高等学校教材

塑性力学

余同希



高等教育出版社

本书共10章,包涵了塑性力学的基本理论和解决工程问题常用的一些方法。本书是工程力学专业的塑性力学课程的教材,也可供机械、水利、土建、航空、船舶等专业的大学生和研究生的塑性力学课程作为教材之用。

本书是国家教委工程力学专业教材委员会审定的工程力学专业塑性力学课程的教材。

高等学校教材
塑 性 力 学

余 同 希

*

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京印刷一厂印刷

*

开本850×1169 1/32 印张9.5 字数230 000
1989年11月第1版 1989年11月第1次印刷
印数0001—1 220

ISBN7-04-002429-2/15·139

定价 2.55 元

前 言

本书是国家教委工程力学专业教材委员会审定的塑性力学教材，也可以作为机械制造、金属加工、土建结构、水利、航空、船舶等专业的研究生课程的教学用书。

根据我自己在北京大学讲授塑性力学课程的体会，塑性力学是一门概念密集的学科。为了帮助学生学好这门课，首先必须把一系列重要的基本概念讲清楚、讲准确、讲透彻。在编写本书时，吸取了国内外多种塑性力学教材的优点，希望尽量做到概念清晰、叙述简练、深入浅出。

塑性力学既有很强的理论性，又有越来越广泛的工程应用。本书在取材上，除对基本理论作了比较严格、系统的叙述外，还介绍了在解决工程问题中常用的一些方法。在有些章节（例如第十章）中，尝试较多地吸收了一些新近的内容。选入了较多习题以便学生练习。

本书的初稿曾由黄克智先生和熊祝华先生审阅，对本书的修改提出了许多宝贵意见，作者在此表示衷心的感谢。

余同希

1987年8月

目 录

主要符号表	1
第一章 金属材料的塑性性质	1
§ 1.1 引言	1
§ 1.2 金属材料的试验结果	2
§ 1.3 塑性变形的物理基础	7
§ 1.4 轴向拉伸时的塑性失稳	12
§ 1.5 材料塑性行为的理想化	15
习题	21
第二章 静不定桁架的弹塑性性态	23
§ 2.1 理想弹塑性材料的三杆桁架	23
§ 2.2 线性强化弹塑性材料的三杆桁架	27
§ 2.3 几何大变形对桁架承载能力的影响	28
§ 2.4 加载路径对桁架内应力和应变的影响	31
§ 2.5 载荷平面内的屈服曲线和极限曲线	34
§ 2.6 在变值载荷作用下桁架的弹塑性性态	39
习题	44
第三章 应力和应变	46
§ 3.1 应力分析	46
§ 3.2 应变分析	56
参考文献	62
习题	62
第四章 屈服条件	64
§ 4.1 初始屈服条件	64
§ 4.2 两种常用的屈服条件	68
§ 4.3 屈服条件的实验验证	74

§ 4.4 后继屈服条件	78
参考文献	81
习题	82
第五章 塑性本构关系	84
§ 5.1 弹性本构关系	84
§ 5.2 Drucker 公设	86
§ 5.3 加载、卸载准则	92
§ 5.4 增量理论 (流动理论)	94
§ 5.5 全量理论 (形变理论)	103
§ 5.6 岩土力学中的Coulomb屈服条件和流动法则	110
参考文献	112
习题	113
第六章 简单的弹塑性问题	115
§ 6.1 弹塑性边值问题的提法	115
§ 6.2 薄壁圆筒的拉扭联合变形	119
§ 6.3 梁的弹塑性弯曲 (工程理论)	124
§ 6.4 平面应变条件下板的塑性弯曲 (精确理论)	135
§ 6.5 柱体的弹塑性自由扭转	141
§ 6.6 受内压的厚壁圆筒	151
§ 6.7 旋转圆盘	163
参考文献	167
习题	168
第七章 理想刚塑性平面应变问题	172
§ 7.1 基本概念	172
§ 7.2 平面应变问题的基本方程	173
§ 7.3 滑移线及其几何性质	176
§ 7.4 边界条件	185
§ 7.5 几种边值问题的提法	188
§ 7.6 单边受压的楔	190

§ 7.7 半平面上的刚性压模	193
§ 7.8 圆孔周围的轴对称滑移场	196
§ 7.9 切口试件的拉伸	197
§ 7.10 定常塑性流动问题	201
§ 7.11 拟定常塑性流动问题	204
参考文献	206
习题	207
第八章 极限分析原理	210
§ 8.1 极限状态和极限分析	210
§ 8.2 虚功率原理	212
§ 8.3 极限分析定理	214
§ 8.4 界限定理的应用	218
参考文献	227
习题	228
第九章 梁和刚架的极限分析和安定分析	230
§ 9.1 包含塑性铰的破坏机构	230
§ 9.2 梁和刚架极限分析中的界限定理	232
§ 9.3 机动法和静力法	233
§ 9.4 极限曲线及其应用	239
§ 9.5 梁和刚架的安定分析	241
参考文献	246
习题	246
第十章 板的极限分析	248
§ 10.1 板的基本方程	248
§ 10.2 圆板轴对称弯曲的极限分析	252
§ 10.3 简支圆板的极限载荷	254
§ 10.4 固支圆板的极限载荷	258
§ 10.5 非圆板的机动解	261
§ 10.6 圆板大变形后的承载能力	267

§ 10.7 圆板的冲压	274
参考文献	277
习题	278
索引	281

第一章 金属材料的塑性性质

§ 1.1 引言

大家都知道,当物体承受的外力较小时,卸除外力后,物体可以完全恢复原有的形状。这种可恢复的变形称为弹性变形,它是弹性力学研究的对象。而当外力超过一定的限度时,即使卸除全部外力,物体的变形也不能完全恢复。这种不可恢复的变形称为塑性变形。塑性力学是固体力学的一个分支,它的主要任务就是研究固体发生塑性变形时的应力分布和应变分布的规律。

为什么要研究塑性力学呢?一方面,实际的结构和机械在受载过程中,由于应力分布的不均匀性,常有局部应力超过弹性范围的情形。如果我们在设计中考虑了塑性变形引起的应力重分布,就可以更准确地估计结构的承载能力。考虑塑性的设计能够充分地发挥材料和结构的承载潜力。另一方面,塑性变形并不都是不利的,我们还可以主动地去利用它。金属加工成形,就是利用材料的塑性性质使之成为人们所需要的形状。利用金属塑性变形的原理还可以设计出能量吸收装置,提高结构耐受冲击碰撞的能力。

塑性力学主要采用宏观的方法,即连续介质力学的方法。它不去探究材料塑性变形的内在机理,而是从材料的宏观塑性行为中抽象出力学模型,并建立相应的数学方程来予以描述。应力平衡方程和应变位移间的几何关系是同材料性质无关的,因此对弹性力学和塑性力学都一样。弹塑性的差别主要表现在应力与应变间的物理关系,即所谓本构关系上。这也带来了处理方法上的不同。所以,塑性力学首先要解决的问题是在实验资料的基础上确立塑性本构关系,加上平衡和几何的考虑,进而建立弹塑性边值问题;然后,根据不同的具体情况寻求数学计算的方法求解弹塑性边

值问题。

所谓微观或细观的方法则是在金属物理和材料科学中发展起来的，重点在于研究材料弹塑性变形的微观机理。这往往是因材料而异的，例如金属、土壤、岩石、混凝土和各种复合材料，就各有不同的塑性变形机理。塑性力学现代研究的一个重要趋势是把宏观和微观结合起来，吸收材料科学的近代成果，丰富和发展原有的理论。

§ 1.2 金属材料的试验结果

为了寻求材料塑性变形的规律，首先要进行材料试验。从单向拉伸（或压缩）以及薄壁管扭转试验所得到的应力-应变曲线是塑性理论最基本的试验资料。由于扭转试验所得的曲线与拉伸曲线近似，这里只介绍单向拉伸的某些试验结果。此外，还将介绍与塑性理论密切相关的静水压力试验。

一、简单拉伸试验

当物体承受外力时，一般说来，应力和应变在物体内部是随位置坐标而变化的；但是一点的应力和应变不好测量，因此要找一个应力和应变都均匀的状态来测量。简单拉伸或简单压缩试验就能近似地做到这一点。

在常温、准静态加载的试验条件下，采用等截面柱体试件，在材料试验机上进行拉伸（或压缩），便可得到载荷-轴向伸长（或缩短）的关系，从而也得出材料的应力-应变关系。图1-1的(a)和(b)显示了两种典型的试验曲线，分别得自铝和低碳钢。图中横坐标是工程应变 $\epsilon = (l - l_0)/l_0$ ，纵坐标是名义应力 $\sigma = P/A_0$ ，这里 l_0 和 l 分别是试件的初始长度和变形后的长度， A_0 是初始截面积， P 是拉力。

在拉伸的初始阶段，应力与应变成正比，即服从Hooke定律（其中 E 为杨氏模量，即弹性模量）。

$$\sigma = E\epsilon, \quad (1-1)$$

在图上表现为一段直线。在到达比例极限之后，曲线开始弯曲，直到弹性极限。在弹性极限之前，如果卸除载荷，变形将完全恢复，这是弹性的基本特征。在超过弹性极限以后，如果卸除载荷，试件内仍保留一部分变形，通常称之为永久变形，或塑性变形。可见，弹性与塑性的根本区别不在于应力应变关系是否线性，而在于卸载后变形是否可恢复。

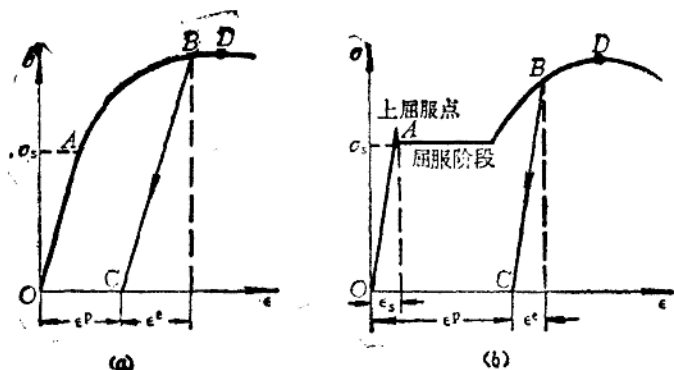


图 1-1

对于图1-1(b)的情形，在弹性极限之后，将出现一个应力保持不变而应变显著增加的阶段。这种现象称为材料的屈服。低碳钢等金属材料的屈服阶段很长，其应变可以达到最大弹性应变的10~15倍。对于很多材料，比例极限、弹性极限和初始屈服极限三者差别不大，通常在工程上不加区分。今后我们把这个应力值称为材料的屈服应力，并用 σ_s 或 Y 来表示。

铝、铜和某些高强度合金钢没有明显的屈服阶段，这时在工程上通常取与产生0.2%的塑性应变相对应的应力作为条件屈服应力，并以 $\sigma_{0.2}$ 表示。

经过屈服阶段后，材料又恢复了抵抗变形的能力，必须增加载荷才能继续产生变形，这种现象称为材料的强化（或硬化）。与弹

性阶段相比, 要产生相同的应变增量这时所需的应力增量要小得多, 而且通常随着变形的增加而越来越小, 即所谓渐减强化, 在 σ - ϵ 图上表现为一段斜率渐减的凸曲线, 其斜率 E , 叫做切线模量。

在产生了一定的塑性变形以后, 如果减小载荷, 则应力应变关系将不按已有的曲线退回原点, 而是沿着一条与初始弹性阶段相平行的直线变化, 斜率为 E 。当载荷完全卸掉之后, 应变的弹性部分

$$\epsilon^e = \sigma / E \quad (1-2)$$

就会恢复, 而塑性应变 ϵ^p 就会残存下来。从图1-1可以看出, 应变可以分解成弹性应变与塑性应变两部分, 即

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p, \quad (1-3)$$

其中 ϵ^e 已由 (1-2) 式同应力 σ 联系起来, 故有

$$\epsilon^p = \epsilon - \frac{\sigma}{E}. \quad (1-4)$$

在增加载荷 (称为加载) 和卸除载荷 (称为卸载) 的过程中应力和应变服从不同的规律, 这是材料在塑性阶段的一个重要特点。这样, 我们需要有一个判别材料是加载还是卸载的准则, 称之为加、卸载准则。在简单应力状态下, 它可写成

$$\left. \begin{aligned} \sigma d\sigma &\geq 0, & \text{加载;} \\ \sigma d\sigma &< 0, & \text{卸载.} \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

此式也适用于 $\sigma < 0$ 的压缩情形。有了这一准则, 我们可以把简单拉伸试件在塑性阶段的应力应变关系归纳为

$$\left. \begin{aligned} d\sigma &= E d\epsilon, & \text{对于 } \sigma d\sigma \geq 0; \\ d\sigma &= E d\epsilon, & \text{对于 } \sigma d\sigma < 0. \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

注意这时一般只能写出增量形式的应力-应变关系。

若从图1-1中的 B 点卸载到 C 点, 再从 C 点重新加载, 开始时应力和应变仍服从弹性规律 $d\sigma = E d\epsilon$, 到 B 点后才会重新进入塑性状态。与 B 点相应的应力叫后继屈服应力。由于前面已经提到的材料的强化, 后继屈服应力通常比初始屈服应力高, 其提高的程度与

塑性变形的历史有关,或者说与塑性阶段的加载历史有关。因此,后继屈服应力可写成下述函数形式:

$$\sigma = II(\epsilon^p) \quad (1-7)$$

或 $\phi(\sigma, h_s) = 0, \quad (1-8)$

其中 h_s 是记录材料塑性加载历史的参数, ϕ 则被称为加载函数。

后继屈服应力的提高是有限度的。图1-1中曲线的最高点(D点)所对应的应力 σ_b ,叫做材料的强度极限,它是材料所能承受的最大应力。

如果从试件的自然状态起,一开始就反向加载,在应变不太大的范围内,材料一般也呈现与正向加载同样的性质。但如果正向加载在塑性变形发展到一定程度之后卸载,例如从图1-2上的B点开始卸载,然后再反向加载,会出现什么现象呢?对于单晶体所作的试验表明,在这种情况下反向屈服应力的绝对值比初始屈服应力 σ_s 要大,即正向强化时反向也强化,见图1-2中的 B'' 点。然而对于一般材料,在这种情况下反向屈服应力的绝对值比初始屈服应力 σ_s 要小,即正向强化时反向会弱化,见图1-2中的 B' 点。这种现象称为Bauschinger效应。这表明,材料的后继屈服性质不仅与它所经历过的塑性变形的大小有密切

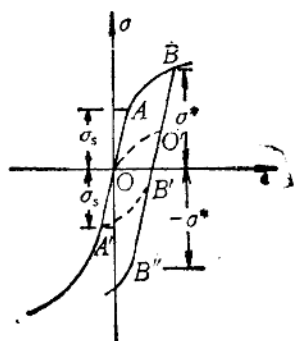


图 1-2

关系,还受到它所经历过的塑性变形的方向的影响。

由上述实验现象,我们看到材料的塑性变形有以下几个共同特点:

i) 应力-应变关系的非线性;

ii) 由于在加载过程中和在卸载过程中服从不同的规律,应力与应变间不存在单值对应关系。同一个应力可对应于不同的应

变,反过来也是这样。应力的大小不仅与当时的应变大小有关,还与应变的历史有关。所以,应力与应变间的非单值性具体说来是一种路径有关性。

iii) 由于塑性应变不可恢复,所以外力所作的塑性功具有不可逆性,或者叫耗散性。在一个加载-卸载的应力循环中外力作的功恒大于零,这一部分能量被材料的塑性变形所耗散掉了。

最后,简单提一下其他因素对简单拉伸试验结果的影响。温度的升高将使屈服应力 σ_s 降低而塑性变形的能力(韧性)提高。在高温下材料会产生蠕变现象,即当应力不变时应变仍会随时间不断增长。通常,塑性力学将不考虑这种与时间有关的塑性变形。此外,如果在试验中提高加载速度,则 σ_s 升高而韧性降低。对于一般加载速度的情形,可以不考虑这一效应。对于冲击碰撞或爆炸加载条件下材料性能的改变,通常在塑性动力学中专门研究。

二、静水压力试验

Bridgeman等人通过大量的高压(各向均压)试验发现:

i) 静水压力与材料的体积改变之间近似地服从线性弹性规律。若卸除压力,体积的变化可以恢复,因而可以认为各向均压时体积变化是弹性的,或者说,塑性变形不引起体积变化。试验还表明,这种弹性的体积变化是很小的,例如弹簧钢在10000个大气压下体积仅缩小2.2%。因此,对于金属材料,当发生较大塑性变形时,可以忽略弹性的体积变化,即认为在塑性变形阶段材料是不可压缩的。

ii) 材料的塑性变形与静水压力无关。对钢试件作了有静水压力的拉伸试验,同无静水压力的拉伸试验对比发现,静水压力对初始屈服应力影响很小,可以忽略不计。因而对钢等金属材料,可认为塑性变形不受静水压力的影响。但对于铸铁、岩石、土壤等材料,静水压力对屈服应力和塑性变形的大小都有显著的影响,不能忽略。

§ 1.3 塑性变形的物理基础

本节将对金属材料的微观结构和塑性变形的微观机理作一些最简单的介绍。尽管这一介绍十分粗略，但仍将有助于理解上一节所讲的金属材料的试验结果。

金属材料的一个突出特点是它的构造具有几何规则性和周期性。在新生的、未受外部扰动的纯金属中，沿各个方向的结构都周期性地完整地重复着，这就是所谓单晶构造。单晶体具有下面几个重要宏观性质：晶体有一定的有规则的外形，服从面角不变定律；晶体的很多物理性质具有各向异性；晶体有确定的熔点。非晶体不具有这些性质。

根据原子排列的不同，就得到不同的点阵，称为晶格。在大多数金属中，晶格呈以下三种类型：

i) 体心立方晶格(图1-3(a))：八个原子位于立方体的角点，一原子居中心。属于这类的金属有铁(当温度低于 910°C 或高于 1400°C)、钛(当温度高于 882°C)、钎、钼、铌、钽。

ii) 面心立方晶格(图1-3(b))：十四原子分别位于立方体的角点和各个面的中心。属于这类的金属有铝、铜、铅、金、镍和许多铁基合金，如奥氏体钢等。

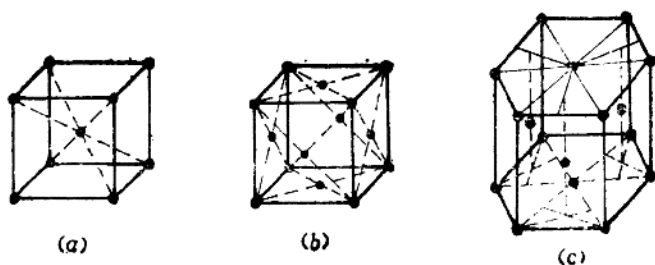


图 1-3

iii) 六方密排晶格(图1-3(c))：原子位于六角柱体的角点、顶

面和底面的中心,及不相邻三角形柱体的中心。属于这类的金属有锌等。

晶格的线性尺寸和原子的直径是同量级的,因此在晶格中各个原子几乎是互相紧密排列的。图1-3中的圆点并不代表原子相对于晶格的大小,而只是原子中心的位置。还要指出,图1-3只是一个单位晶格的构造示意图,它们边界上的原子是和相邻晶格所共有的。

在晶格中,某些平面内原子分布的密度要较其他平面大些。实验证实,晶体各层原子间发生的相对滑移总是平行于这种原子密排平面的,因此这样的平面被称为滑移面。在滑移面内,原子排列最密的方向,是最易发生滑移的方向,称为滑移方向。每一个滑移面和其上的一个滑移方向构成一个滑移系。例如,面心立方晶格有四个滑移面,每个滑移面上有三个滑移方向,因此共有十二个滑移系。在六方密排晶格中,只有一个滑移面(即与上下底面相平行的平面),其上有三个滑移方向,因此共有三个滑移系。

当晶体受到较小外力作用时,外力使晶格中的原子偏离原来的平衡位置,引起晶格的畸变(图1-4)。在这一过程中,外力克服

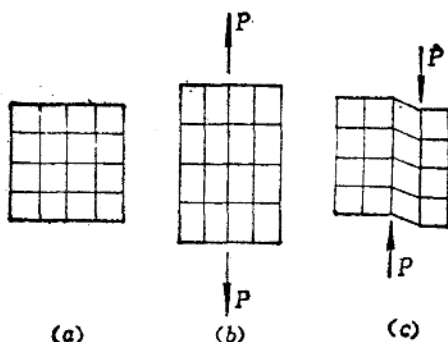


图 1-4

晶格原子之间的结合力而作功,并以位能的形式储存在晶体中。这样的畸变并没有改变晶体点阵的基本排列形式,因此当外力卸

除后,各原子又回复到原先的稳定平衡位置。所以,这时晶体的总体变形是弹性的,弹性模量的大小取决于晶格原子间的结合力。

当晶体受到较大外力作用时,晶体内各层原子之间沿着某一滑移面上的某一滑移方向会产生相对滑移,或者说,开动了某一滑移系(有时候也可以同时开动两个或多个滑移系)。这样的滑移改变了晶体点阵的基本排列形式,因此当外力卸除后,原子不能回复到原先的位置,这时晶体便产生了不可恢复的变形,即塑性变形。

图1-5是在剪应力作用下晶格产生塑性变形的示意图。

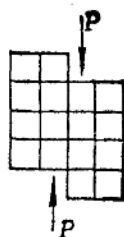


图 1-5

对单晶体作拉伸试验的结果指出,当外力相对于晶格方向取向不同时,晶体开始发生塑性变形的应力值也不同,但是这应力在滑移面内沿滑移方向的分量却是一定的;而且,在同一状态下,不同滑移系的极限剪应力值大致相等,可用 τ_s 表示。由此可见,为了使晶体发生塑性变形,外加应力必须至少在一个滑移方向上的剪应力分量达到剪切屈服应力 τ_s 。一般说来,晶体中的滑移系数目越多,就越容易发生滑动即塑性变形。例如,面心立方晶体就比方密排晶体容易发生塑性变形。

由于单晶体中原子排列有严格的取向性,所以单晶体的塑性性质呈现各向异性。但是,反转外加应力的方向(相应地改变滑移系内剪应力的符号),不会改变单晶体的塑性性质(例如不会改变 τ_s 的值),这表明,单晶体没有Bauschinger效应。

在晶体内要产生塑性变形,必须使原子层之间沿滑移面至少滑动一个原子间距离量级的距离,即剪切应变要达到“1”的量级,因而所需施加的剪应力应是剪切弹性模量的量级。但是,对单晶体所做的实验测定的极限剪应力 τ_s 值要比上述理论值小100~1000倍,这说明假定塑性变形是一层原子相对于另一层原子同时滑移的机构是不正确的。为了解释这一差异,人们研究了真实晶体中

所存在的缺陷,从而认识到,晶体的滑移现象并不是整个晶面的滑移,而是晶体中的一种缺陷——位错的运动结果。

位错是晶体中的线缺陷,是一种有规律或有序状态的缺陷。位错的密度,即单位体积内位错线的总长度,在退火金属材料中通常约为 $10^7\text{cm}/\text{cm}^3$ 。

最简单的一种基本类型的位错是刃形位错。设想有一块长方体形状的晶体材料。如果晶体是完整的,那么晶格原子的排列是完全有规则的,如图1-6(a)所示。如果晶体不是理想完整的,晶体内的原子排列就可能如图1-6(b)所示。我们看到,在位错核 E 附近,上半晶体比下半晶体多出了一排原子。通过 E 点,垂直于该长方体的正面的那条直线就是一条位错线,称为刃形位错。在远离位错核的地方,晶格又趋于完整。

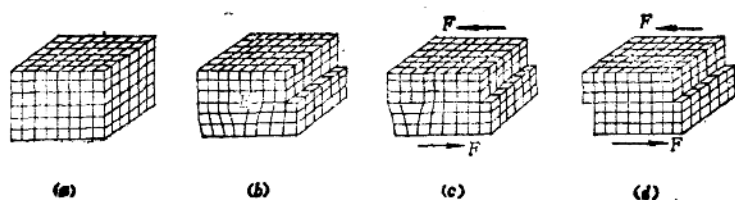


图 1-6

在剪力 F 的作用下,应力大部集中在位错核附近,并且引起位错的滑移,如图1-6(b)~(d)所示。这种滑移的方向即位错线运动

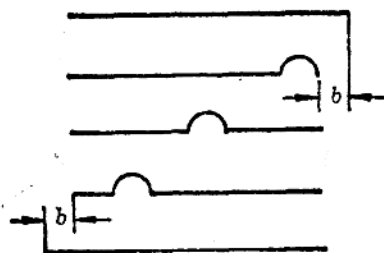


图 1-7

的方向,是平行于力 F 的方向的。位错线及其运动方向构成的平面,就是晶体的滑移面。位错的滑移是逐步进行的,每步滑动时,只是在位错附近的那一层原子有较大的位移。经过逐步的滑动,最后,