数学及其应用文集

Proceedings of Mathematics and Its Application

主　编　曹炳元　　　　名誉顾问　汪浩

中国·气象出版社

数学及其应用文集

主　编　曹炳元
名誉顾问　汪　浩

气象出版社

(京)新登字046号

内 容 简 介

本书征集了我国学者近年来在纯粹数学和应用数学方面的科研论文，由汪浩教授任名誉顾问，曹炳元主编。

全书以模糊数学论文为主，并收集了数学其它分支(尤其是新兴边缘学科)的学术、教研论文，研究报告和在工农、医学、环保、科教等领域的应用成果。内容翔实、信息量大、覆盖面广，不失为广大科技工作者和大专院校师生的一本有价值的参考书。

数学及其应用文集
曹炳元　主编
责任编辑：李义玲　终审：曾晓梅
封面设计：曹炳元　王遂生　责任技编：刘　辉　责任校对：周诗书
气象出版社出版发行
(北京海淀区白石桥路46号100081)
长沙电力学院印刷厂印刷
・　・　・
开本：787×1092 1/16　印张：16.5　字数：391千字
1995年10月第1版　1995年10月第1次印刷
ISBN 7-5029-2049-8/G・0617
定价：24.80元

前　言

数学 —— 一直被人们誉为科学的皇冠。在向科学各领域进军，在新技术革命的今天，数学更显示了强大的生命力和渗透力。数学的科学地位更是发生了巨大变化。国内外有些专家认为：应把数学学科提高为数学科学与自然科学、社会科学并列为基础科学的三大领域；众多有识之士都将运用数学观念定量思维作为衡量民族文化素质的一个标志和提高民族文化水准的重要途径；高技术本质上是数学技术的观念已日益为人们所共识；科学计算已和理论、实践并列成为科学研究的三大支柱。

数学应用的范围急剧扩展，它不仅更广泛地应用于自然科学和工程技术，而且已渗透到了诸如生命科学，经济与社会科学领域，大量实用的新兴的数学方法正在被有效地用于科学研究、工农业生产、行政管理甚至人们的日常生活。

模糊数学异军突起，在理论研究和应用方面更是捷报频传。目前，模糊数学和系统的研究锋芒直指模糊信息处理这一当前信息革命的新一代计算机发展的核心。为了促进学术交流，经全国模糊数学和系统学会同意，1991 年 7 月重新组建了中南模糊数学和系统分会，挂靠在长沙水电师院并由该院数学系筹备召开了“中南模糊数学和系统成果会”(湖南大庸)，现定为第一届年会。编辑出版了《模糊数学和系统成果会论文集》，由曹炳元主编，湖南科技出版社出版。国际著名杂志《Fuzzy Sets and Systems》(Vol.45，1992年，PP400)；国际四大权威检索杂志之一《SCI》(March－April，2D，1992年，PP956)，对会议和该文集分别作了报道和摘索。1993 年 12 月在海口召开了第二届年会，出版论文集并选举了理事会。1994 年 5 月颁发了本会首届科研成果奖。

受中南分会委托并经全国模糊数学与系统分会同意，葛洲坝水电工程学院基础课部筹办了“中南模糊数学和系统分会第三届年会”，我们对该院查中伟、刘明福副教授等为承办会议所付出的辛勤劳动表示衷心地感谢。

本文集以中南模糊数学和系统分会第三届年会应征论文为主体，并征集了其它方向的文章，经专家严格审查，汇集成册出版。由于种种原因，致使许多佳作未能入选，值此深表歉意。

本文集审稿者为：汪浩教授、蔡海涛教授、邓自克教授等，编辑加工者为陈一心、周诗书等同志。英文编辑为王佩华副教授。对他们的辛勤耕耘深表谢忱。

借此机会，我们还要对为本文集精心撰文的同仁们致谢。对全国模糊数学与系统学会，《应用数学》杂志，对长沙三泰科技翻译打印社和长沙电力学院印刷厂，对气象出版社等单位的大力支格与通力合作表示感谢。

由于时间仓促，文集中定有错漏，恳请行家指正。

主　编

1995 年 8 月于长沙

目 录

研 * 究 * 通 * 讯

CONTENTS

LETTERS

不分明化的局部紧致拓扑群*

沈继忠

(江西师大数学系，南昌 330027)

摘要 本文引入了不分明化拓扑群的局部紧性的概念，并且讨论了不分明化局部紧致拓扑群的子群和商群之间的关系。

关键词 不分明化拓扑群，局部紧致性。

在文献[1]中已引入了不分明化拓扑群的概念，并讨论了它的一些基本性质，在文献[2]中进一步讨论了不分明拓扑群的紧性。本文将继续给出不分明化拓扑群的局部紧性的概念以及不分明化局部紧致群的子群和商群之间的关系。

一、预备知识

定义 1.1[3] 设 Σ 是不分明化拓扑空间的类，不分明谓词 $\Gamma\in\mathscr{T}(\Sigma)$ 称为不分明紧的，如果 $\Gamma(X,\mathscr{T}):=(\forall\mathscr{A})(K_0(\mathscr{A},X)\rightarrow(\exists\mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A})\wedge K(\mathscr{D},X)\wedge FF(\mathscr{D})))$，其中 $K_0(\mathscr{A},X):=K(\mathscr{A},X)\wedge(\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T})$，$K(\mathscr{A},X):=(\forall x)(\exists A)(x\in A\in\mathscr{A})$，并称一元不分明谓词 $K_0,K\in\mathscr{T}(\mathscr{T}(P(X)))$ 分别为不分明开复盖与不分明复盖。

定义 1.2[4] 一元不分明谓词 $LC\in\mathscr{T}(\Sigma)$ 称为不分明局部紧的，如果

$$LC(X,\mathscr{T}):=(\forall x)(\exists B)((x\in B^0)\wedge\Gamma(B,\mathscr{T}|_B))。$$

命题 1.3[4] 对任何不分明化拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$，若 $A\subseteq X$，则

$$1=LC(X,\mathscr{T})\wedge(A\in\mathscr{T})\rightarrow LC(A,\mathscr{T}|_A)。$$

命题 1.4[4] 设 $(X,\mathscr{T})$，$(Y,\mathscr{U})$ 是不分明化拓扑空间，$f\in Y^X$，则

$$1=LC(X,\mathscr{T})\wedge C(f)\wedge O(f)\rightarrow LC(f(X),\mathscr{U})。$$

命题 1.5[4] 设 $\{(X_s,\mathscr{T}_s)\mid s\in S\}$ 是一族不分明化拓扑空间，则

$$1=LC(\prod_{s\in S}X_s,\prod_{s\in S}\mathscr{T}_s)\rightarrow(\forall s)((s\in S)\wedge LC(X_s,\mathscr{T}_s)\wedge(\exists T)((T\subseteq S)\wedge(\forall t)((t\in S-T)\wedge\Gamma(X_t,\mathscr{T}_t))))。$$

定义 1.6 设 X 是一非空集合，称不分明谓词 $fI\in\mathscr{T}(\mathscr{T}(P(X)))$ 为不分明有限交性质，如果

$$fI(\mathscr{A}):=(\forall n\in N)(\forall A_1,A_2,\cdots,A_n)(A_1\in\mathscr{A})\wedge(A_2\in\mathscr{A})\wedge\cdots\wedge(A_n\in\mathscr{A})\rightarrow\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\Phi)。$$

命题 1.7[2] 对任何 $(X,\mathscr{T})\in\Sigma$，有

$$1=\Gamma(X,\mathscr{T})\longleftrightarrow(\forall\mathscr{A})((\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T})\wedge fI(\mathscr{A})\rightarrow(\exists x)(\forall A)(A\in\mathscr{A})\rightarrow(x\in A)))。$$

推论 1.8 对任何 $(X,\mathscr{T})\in\Sigma$，$A\subseteq X$，有

$$1=\Gamma(A)\longleftrightarrow(\forall\mathscr{A})(\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T})\wedge fI(\mathscr{A})\rightarrow(\exists X\in A)(\forall B)((B\in\mathscr{A})\rightarrow(x\in B)))。$$

* 江西省自然科学基金资助项目.

二、不分明化拓扑群的紧性

命题 2.1[2] 设 Ω 为不分明化拓扑群的类，对任何 $(G,\mathscr{T})\in\Omega$，$P,\ Q\subseteq G$，$PQ=\{xy\mid x\in P,\ y\in Q\}$ 有

$$1=\Gamma(P)\wedge\Gamma(Q)\to\Gamma(PQ)。$$

命题 2.2[2] 设 $(G,\mathscr{T})\in\Omega$，$C\subseteq A\subseteq G$，则

$$1=\Gamma(C)\wedge(A\in\mathscr{T})\to(\exists V\subseteq G)(e\in V\in\mathscr{A})\wedge(VC\subseteq A))。$$

命题 2.3 设 $(G,\mathscr{T})\in\Omega$，则对任何 $H<G$ 及任何 $x\in G$，有

$$1=\Gamma(H)\longleftrightarrow\Gamma(Hx)。$$

证 只须证明对任何 $x\in G$，有

$$1=\Gamma(H)\longrightarrow\Gamma(Hx)。$$

事实上，对任何 $\mathscr{A}\in\mathscr{T}(P(G))$

$$[\Gamma(Hx)]=\inf_{\mathscr{A}}([K_0(\mathscr{A},\ Hx)]\alpha\operatorname*{Sup}_{\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A}}[K(\mathscr{B},\ Hx)\wedge FF(\mathscr{B})])。$$

作 $\mathscr{A}'=\int_{A\subseteq G}\mathscr{A}(Ax)/A$，则

$$[K(\mathscr{A}',\ H)]=\inf_{y\in H}\operatorname*{Sup}_{y\in A}\mathscr{A}'(A)=\inf_{yx\in Bx}\operatorname*{Sup}_{yx\in Ax}\mathscr{A}'(A)$$

$$=\inf_{yx\in Hx}\operatorname*{Sup}_{yx\in Ax}\mathscr{A}(Ax)=[K(\mathscr{A},\ Hx)]。$$

$$[\mathscr{A}'\subseteq\mathscr{T}]=\inf_{A}(\mathscr{A}'(A)\alpha\mathscr{T}(A))=\inf_{Ax}(\mathscr{A}(Ax)\alpha\mathscr{T}(Ax))\geqslant[\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T}]\ [K_0(\mathscr{A}',\ H)]$$

$$\geqslant[K_0(\mathscr{A}',\ Hx)]。$$

令 $[\Gamma(H)=\inf_{\mathscr{A}}([K_0(\mathscr{A},\ H)]\alpha\operatorname*{Sup}_{\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A}}([K(\mathscr{B},H)\wedge FF(\mathscr{B})]>\lambda$，

则 $\operatorname*{Sup}_{\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A}}[K(\mathscr{B},\ H)\wedge FF(\mathscr{B}))>\lambda\otimes[K_0(\mathscr{A}',\ Hx)]\geqslant\lambda\otimes[K_0(\mathscr{A},\ Hx)]$。

故存在 $\mathscr{B}'\leqslant\mathscr{A}'$，使

$$[K(\mathscr{B}',H)\wedge FF(\mathscr{B})]>\alpha\otimes[K_0(\mathscr{A},\ Hx)]。$$

作 $\mathscr{B}=\int_{B\subseteq G}\mathscr{B}'(Bx^{-1})/B$，则对任何 α，若 $F(\mathscr{B}'_\alpha)$ 必有 $F(\mathscr{B}_\alpha)$。所以

$$\inf\{\alpha\mid F(\mathscr{B}_\alpha')\}\geqslant\inf\{\alpha\mid F(\mathscr{B}_\alpha)\},$$

$$[FF(\mathscr{B}')]\leqslant[FF(\mathscr{B})],$$

$$[K(\mathscr{B}',\ H)]=\inf_{y\in H}\operatorname*{Sup}_{y\in B}\mathscr{B}'(B)=\inf_{yx\in Hx}\operatorname*{Sup}_{yx\in Bx}\mathscr{B}'(\mathscr{B}x,\ x^{-1})$$

$$=\inf_{yx\in Hx}\operatorname*{Sup}_{yx\in Bx}\mathscr{B}(Bx)=[K(\mathscr{B},\ Hx)],$$

$$\mathscr{B}(B)=\mathscr{B}'(B^{-1})\leqslant\mathscr{A}'(Bx^{-1})=\mathscr{A}(\beta x^{-1},\ x)=\mathscr{A}(B)。$$

因此存在 $\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A}$，使

$$[K(\mathscr{B}',Hx)\wedge FF(\mathscr{B})\geqslant[K(\mathscr{B}',\ H)\wedge FF(\mathscr{B}')]>\lambda\otimes[K_0(\mathscr{A},\ Hx)]。$$

从而有

$$\operatorname*{Sup}_{\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A}}[K(\mathscr{B},\ Hx)\wedge FF(\mathscr{B}))>\lambda\otimes[K_0(\mathscr{A},\ Hx)]。$$

即 $[\Gamma(Hx)=\inf_{\mathscr{A}}([K_0(\mathscr{A},\ Hx)]\alpha\operatorname*{Sup}_{\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A}}([K(\mathscr{B},\ Hx)\wedge FF(\mathscr{B})]\geqslant\lambda$。

因此 $[\Gamma(Hx)\geqslant[\Gamma(H)]$。

命题2.4 设$(G,\mathscr{F})\in\Omega$，$H<G^*$，$G=G/H$，$Q^*\subseteq G^*$，$\rho:=G\to G^*$为自然映射，$p=\rho^{-1}(Q^*)$，则

$$1=\Gamma(H)\wedge\Gamma(Q^*)\to\Gamma(P)。$$

证 因为由推论1.8知

$$[\Gamma(P)]=\inf_{\mathscr{A}\in\mathscr{F}(P(G))}[(\mathscr{A}\subseteq\mathscr{F})\mathbin{\dot\wedge}fI(\mathscr{A})]\ \alpha\ \sup_{x\in P}\inf_{x\notin A}(1-\mathscr{A}(A)),$$

故对任何$\mathscr{A}\in\mathscr{F}(P(G))$，可令$[(\mathscr{A}\subseteq\mathscr{F})\mathbin{\dot\wedge}fI(\mathscr{A})]=\lambda$。

设自然映射 $\rho:G\to G^*(x\to x^*=Hx)$，且作 $\mathscr{A}^*=\int_{V^*}\mathscr{A}(\rho^{-1}(V^*))\big/V^*\in\mathscr{F}(\rho(G^*))$，

则
$$[fI(\mathscr{A}^*)]=\inf_{n\in N}\inf_{\substack{A_1^*,\cdots,A_n^*\\ \bigcap_{i=1}^n A_i^*=\Phi}}(1-\min_{1\leqslant i\leqslant n}\mathscr{A}^*(A_i^*))=\inf_{n\in N}\inf_{\substack{A_1^*,\cdots A_n^*\\ \rho^{-1}(\bigcap_{i=1}^n A_i^*)=\Phi}}(1-\min_{1\leqslant i\leqslant n}\mathscr{A}(\rho^{-1}(A_i^*))),$$

$$\geqslant\inf_{n\in N}\inf_{\substack{A_1^*,\cdots A_n^*\\ \bigcap_{i=1}^n A_i^*=\Phi}}(1-\min_{1\leqslant i\leqslant n}\mathscr{A}(A_i))。$$

(其中因为$\bigcap_{i=1}^n A_i^*=\Phi$当且仅当$\rho^{-1}(\bigcap_{i=1}^n A_i^*)=\bigcap_{i=1}^n\rho_i^{-1}(A_i^*)=\Phi$)。又因为

$$[\mathscr{A}^*\subseteq\mathscr{F}^*]=\inf_{A^*}(\mathscr{A}^*(A^*)\alpha\mathscr{F}^*(\mathscr{A}^*))=\inf_{A^*}\mathscr{A}(\rho^{-1}(A^*))\alpha\mathscr{F}(\rho^{-1}(A^*)))$$
$$\geqslant\inf_{A}(\mathscr{A}(A)\alpha\mathscr{F}(A)=[\mathscr{A}\subseteq\mathscr{F}]。$$

所以 $[(\mathscr{A}^*\subseteq\mathscr{F}^*)\mathbin{\dot\wedge}fI(\mathscr{A}^*)]\geqslant[(\mathscr{A}\subseteq\mathscr{F})\mathbin{\dot\wedge}fI(\mathscr{A})]\wedge\lambda$。

现设 $[\Gamma(Q^*)\wedge\Gamma(H)]>\delta$，则 $[\Gamma(Q^*)]>\delta$，即对任何$\mathscr{A}^*\in\mathscr{F}(P(G^*))$，有

$$\sup_{x^*\in Q^*}\inf_{x^*\notin A^*}(1-\mathscr{A}^*(A^*))>\delta\otimes\lambda。$$

因此，存在$x_0^*=Hx_0$，使当$x_0^*\notin A^*=HA$时，(即$x_0\notin A$)，有$1-\mathscr{A}^*(A^*)=1-\mathscr{A}(HA)>\delta\otimes\lambda$。
对于Hx_0，由命题2.3知 $[\Gamma(Hx_0)]=[\Gamma(H)]>\delta$。

作
$$\mathscr{A}'=\int_{A'\subseteq Hx_0\cap A}\inf_{A}\mathscr{A}(A)\big/A'\in\mathscr{F}(P(Hx_0)),$$

则
$$[fI(\mathscr{A}')]=\inf_{n\in N}\inf_{\substack{A_1',\cdots A_n'\\ \bigcap_{i=1}^n A_i'=\Phi}}(1-\min_{1\leqslant i\leqslant n}\mathscr{A}'(A_i'))=\inf_{n\in N}\inf_{\substack{A_1',\cdots A_n'\\ \bigcap_{i=1}^n A_i'=\Phi}}(1-\min_{1\leqslant i\leqslant n}\sup\{\mathscr{A}(A_i)|A_i'=Hx_0\cap A_i\}),$$

$$=\inf_{n\in N}\inf_{\substack{A_1'\cdots A_n'\\ \bigcap_{i=1}^n A_i'=\Phi}}\inf_{\substack{A_i\\ Hx_0\cap A_i=A_i'}}(1-\min_{1\leqslant i\leqslant n}\mathscr{A}(A_i))\geqslant\inf_{n\in N}\inf_{\substack{A_1\cdots A_n\\ \bigcap_{i=1}^n A_i=\Phi}}(1-\min_{1\leqslant i\leqslant n}\mathscr{A}(A_i))=[fI(\mathscr{A})]。$$

$$[\mathscr{A}'\subset\mathscr{F}|_{Hx_0}]=\inf_{A'}(\mathscr{A}'(A')\alpha\mathscr{F}|_{Hx_0}(A'))=\inf_{A'}(\sup_{\substack{A\\ Hx_0\cap A=A'}}\mathscr{A}(A)\ \alpha\ \sup_{\substack{A\\ Hx_0\cap A=A'}}\mathscr{F}(A))$$
$$\geqslant\inf_{A'}\inf_{\substack{A\\ Hx_0\cap A=A_0'}}(\mathscr{A}(A)\alpha\mathscr{F}(A))\geqslant\inf_{A}(\mathscr{A}(A)\alpha\mathscr{F}(A))=[\mathscr{A}\subseteq\mathscr{F}]。$$

所以 $[(\mathscr{A}')\subseteq\mathscr{F}|_{Hx_0})\mathbin{\dot\wedge}fI(\mathscr{A}')]\geqslant[(\mathscr{A}\subseteq\mathscr{F})\mathbin{\dot\wedge}fI(\mathscr{A})]=\lambda$。

因为$[\Gamma(Hx_0)]>\delta$，所以对任何$\mathscr{A}'$，有

$$\sup_{x\in Hx_0}\inf_{x\notin A'}(1-\mathscr{A}'(A'))>\delta\otimes\lambda,$$

因此 $\sup\limits_{x\in Hx_0}\inf\limits_{\substack{x\notin A'\\ A'=Hx_0\cap A}}(1-\sup\limits_{A}\mathscr{A}(A))>\delta\otimes\lambda$, $\sup\limits_{x\in Hx_0}\inf\limits_{\substack{A\\ x\notin Hx_0\cap A}}(1-\mathscr{A}(A))>\delta\otimes\lambda$。

因为 $x\in Hx_0$，所以 $x\notin Hx_0\cap A$ 当且仅当 $x\notin A$，所以

$$\sup_{x\in Hx_0}\inf_{x\notin A}(1-\mathscr{A}(A))>\delta\otimes\lambda。$$

又因为 $x_0^*\in Q^*$，即 $\rho^{-1}(x_0^*)=Hx_0\subseteq\rho^{-1}(Q^*)=\rho$，故有

$$\sup_{x\in\rho_0}\inf_{x\notin A}(1-\mathscr{A}(A))>\delta\otimes\lambda。$$

即 $$\lambda\,\alpha\sup_{x\in\rho_0}\inf_{x\notin A}(1-\mathscr{A}(A))>\delta,$$

$$[(\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T})\wedge fI(\mathscr{A})]\,\alpha\sup_{x\in\rho_0}\inf_{x\notin A}(1-\mathscr{A}(A))>\delta,$$

所以 $[\Gamma(\rho)]\geqslant\delta$，从而 $[\Gamma(\rho)]\geqslant[\Gamma(H)\wedge\Gamma(Q^*)]$。证毕。

推论2.5[4] 设 $(G,\mathscr{T})\in\Omega$，$H\triangle G$，$G^*=G/H$，则

$$1=\Gamma(H)\wedge\Gamma(G^*)\to\Gamma(G)。$$

三、不分明化拓扑群局部紧性

命题3.1 设 $(G,J)\in\Omega$，$H\triangle G$，$G^*=G/H$，则

$$1=LC(G,\mathscr{T})\wedge(H\in\mathscr{T})\to LC(H,\mathscr{T}|_H)。$$

证 由命题1.3即可证得。

命题3.2 设 $(G,\mathscr{T})\in\Omega$，$H\triangle G$，$G^*=G/H$，则

$$1=LC(G,\mathscr{T})\to LC(G^*,\mathscr{T}^*)。$$

证 因为 $\mathscr{T}^*(A^*)=\mathscr{T}(f^{-1}(A^*))$ $(A^*\subseteq G^*)$。

$$\mathscr{T}^*(f(A))=\mathscr{T}(f^{-1}(f(A)))=\mathscr{T}(f^{-1}(A^*)=\mathscr{T}(HA)\geqslant\mathscr{T}(A)。$$

（其中 $A\leqslant G$，$f:G\to G^*$ 为自然映射），故有

$$[C(f)]=\inf_{A^*\subseteq G^*}(\mathscr{T}(A^*)\,\alpha\,\mathscr{T}(f^{-1}(A^*)))=1,\quad[O(f)]=\inf_{A\subseteq G}(\mathscr{T}(A)\,\alpha\,\mathscr{T}^*(f(A)))=1,$$

因此由命题1.4，得

$$[LC(G^*,\mathscr{T}^*)]\geqslant[LC(G,\mathscr{T})]\otimes([C(f)\wedge O(f)])=[LC(G,\mathscr{T})]。$$

命题3.3 设 $(G,\mathscr{T})\in\Omega$，$e\in G$ 是单位元，则

$$1=LC(G,\mathscr{T})\longleftrightarrow(\exists U)((U\in N_e)\wedge\Gamma(U)。$$

证 利用命题2.3，可得

$$\begin{aligned}[LC(G,\mathscr{T})]&=\inf_{x\in G}\sup_{V\subseteq G}(N_x(V)\otimes[\Gamma(V)])=\inf_{x\in G}\sup_{V\subseteq G}(N_e(Vx^{-1})\otimes[\Gamma(V)])\\&=\inf_{x\in G}\sup_{U\subseteq G}(N_e(U)\otimes[\Gamma(Ux)])=(U=Vx^{-1},\ V=Ux)\\&=\inf_{x\in G}\sup_{U\subseteq G}(N_e(U)\otimes[\Gamma(U)])=\sup_{U\subseteq G}(N_e(U)\otimes[\Gamma(U)])\\&=[\exists(U)((U\in N_e)\wedge\Gamma(U))]。\end{aligned}$$

命题3.4 设 $(G,\mathscr{T})\in\Omega$，$H\triangle G$，$G^*=G/H$，则

$$1=LC(G^*,\mathscr{T})\wedge\Gamma(H)\to LC(G,\mathscr{T})。$$

证 由命题2.4和3.3，可得

$$[LC(G^*,\mathscr{T}^*)\wedge\Gamma(H)]=(\sup_{U^*\subseteq G^*}(N_{e^*}^*(U^*)\otimes[\Gamma(U^*)]))\otimes[\Gamma(H)]$$
$$\leqslant\sup_{U^*\subseteq G^*}(N_{e^*}^*(U^*)\otimes[\Gamma(U^*)\wedge\Gamma(H)])\leqslant(\sup_{U^*\subseteq G^*}(N_{e^*}^*(U^*)\otimes[\Gamma(U^*)\wedge\Gamma(H)])$$
$$\leqslant(\sup_{U^*\subseteq G^*}(N_{e^*}^*(U^*)\otimes[\Gamma(\rho^{-1}(U^*))])\leqslant(\sup_{U\subseteq G}(N_e(U)\otimes[\Gamma(U)=[LC(G,\mathscr{T})]。$$

命题3.5 设 $(G,\mathscr{T})\in\Omega$，$H\triangle G$，$G^*=G/H$，则

$$1=LC(G^*,\mathscr{T}^*)\wedge LC(H)\to LC(G,\mathscr{T})。$$

证 由命题3.4及$[\Gamma(H)]\geqslant[LC(H)]$，即可得

命题3.6 设 $\{(G_s,\mathscr{T}_s)\mid s\in S\}\subseteq\Omega$，则

$$1=LC(\prod_{s\in S}G_s,\prod_{s\in S}\mathscr{T})\to(\forall s\in S)(LC(G_s,\mathscr{T}_s)\wedge(\exists T)((T\subseteq S)\wedge(\forall t)((t\in S-T)\wedge\Gamma(G_t,\mathscr{T}_t))))。$$

证 由命题1.5即可得。

参 考 文 献

[1] 沈继忠，不分明化拓扑群(I)、(II)，江西师范大学学报(自)，17(4)(1993)；18(1)(1994)。

[2] 沈继忠，不分明化拓扑群的紧性，江西师范大学学报(自)，19(1)(1995)。

[3] Ying Mingsheng, Compactness in fuzzifying topology, *Fuzzy Sets and Systems*, 55(1993), 77−92.

[4] Shen Jizhong, On local compactness in fuzzifying topology, J. *of Fuzzy Mathematics*, 2(4)(1994), 695−711.

[5] L.S. Pontrjagin, Continuous Group (Moscow, 1954).

双诱导映射的结构

韩月霞　　史福贵

（牡丹江师范学院，黑龙江 157011）（烟台师范学院数学系，山东 264025）

摘要　本文借助 L-fuzzy 集的四种截集与分解定理，给出了双诱导映射的若干种表现形式，使其更直观且便于应用。

关键词　完备格同态，双诱导映射，分子，素元。

本文旨在给出双诱导映射及其逆的几种表现形式，文中 L_1，L_2 均为完全分配格，X，Y 是非空通常集，对完全分配格 L 中的任一元 a，$\beta(a)$ 与 $\alpha(a)$ 分别表示 a 的最大极小集与最大极大集。L_1 与 L_2 中的分子之集分别记为 M_1 与 M_2，素元之集分别记为 P_1 与 P_2。

定义 1　设 $g: L_1 \to L_2$ 是映射，$\forall b \in L_2$，令

$$g^{-1}(b) = \vee\{a \in L_1 \mid g(a) \leqslant b\},$$

则 $g^{-1}: L_2 \to L_1$ 是一映射，称为 g 的逆映射。

命题 1　设 $g: L_1 \to L_2$ 是保并映射，则

(1) $g^{-1}(1) = 1$。

(2) $\forall a \in L_1, a \leqslant g^{-1}g(a)$。

(3) $\forall b \in L_2, gg^{-1}(b) \leqslant b$。

(4) $g(a) \leqslant b \Longleftrightarrow a \leqslant g^{-1}(b)$。

(5) $g^{-1}: L_2 \to L_1$ 是保交映射。

定义 2　设 $f: X \to Y$ 与 $g: L_1 \to L_2$ 是映射，对 $A \in L_1^X$ 与 $y \in Y$，令

$$H(A)(y) = \begin{cases} \vee\{g(A(x)) \mid f(x) = y\}, & f^{-1}(y) \neq \Phi, \\ 0, & f^{-1}(y) = \Phi, \end{cases}$$

则称映射 $H: L_1^X \to L_2^Y$ 为 f 与 g 的双诱导映射，记为 $H = g^f$。

命题 2　设 $H = g^f: L_1^X \to L_2^Y$ 是双诱导映射，g 保并，则

(1) H 是保并映射。

(2) H 的逆映射 $H^{-1}: L_2^Y \to L_1^X$ 如下：

$$\forall B \in L_2^Y,\quad H^{-1}(B) = g^{-1} \circ B \circ f。$$

证明　(1) 是显然的，下证(2)。由定义 1 知，$\forall B \in L_2^Y$，$H^{-1}(B) = \vee\{A \in L_1^X \mid H(A) \leqslant B\}$，而 $H(A) \leqslant B \Longleftrightarrow \forall y \in Y, H(A)(y) \leqslant B(y) \Longleftrightarrow \forall y \in f(X), \vee\{g(A(x)) \mid f(x) = y\} \leqslant B(y) \Longleftrightarrow \forall y \in f(x)$ 与 $\forall x \in f^{-1}(y), g(A(x)) \leqslant B(y) \Longleftrightarrow \forall y \in f(x)$ 与 $\forall x \in f^{-1}(y), A(x) \leqslant g^{-1}(B(y)) \Longleftrightarrow \forall x \in X, A(x) \leqslant g^{-1} \circ B \circ f(x) \Longleftrightarrow A \leqslant g^{-1} \circ B \circ f$，

所以由命题 1 知 $H^{-1}(B)^{-1} = g \circ B \circ f$。

对 $A \in L_1^X$ 与 $a \in L_1$，我们使用[3] 中如下记号：

$A_{[a]} = \{x \in X \mid A(x) \geqslant a\}$，　$A_{(a)} = \{x \in X \mid a \in \beta(A(x))\}$，

$A^{(a)} = \{x \in X \mid a \notin \alpha(A(x))\}$，　$A_{[a]} = \{x \in X \mid A(x) \nleqslant a\}$。

于是我们有

定理1 设 $H=g^f: L_1^X\to L_2^Y$ 是双诱导映射且 g 保并，则 $\forall A\in L_1^X$，

(1) $H(A)=\bigvee_{a\in L_1}\{g(a)\wedge f(A_{[a]})\}=\bigvee_{a\in M_1}\{g(a)\wedge f(A_{[a]})\}$。

(2) $H(A)=\bigvee_{a\in L_1}\{g(a)\wedge f(A_{(a)})\}=\bigvee_{a\in M_1}\{g(a)\wedge f(A_{(a)})\}$。

证明 设 $y\in Y$，若 $e\in\beta(H(A)(y))$，则存在 $x\in f^{-1}(y)$ 使 $e\in\beta(g(A(x)))$. 而 $g(A(x))=\bigvee_{a\in M_1}\{g(a)\mid a\in\beta(A(x))\}=\bigvee_{a\in M_1}\{g(a)\mid x\in A_{(a)}\}$。所以存在 $a\in M_1$ 使 $e\in\beta(g(a))$ 且 $x\in A_{(a)}$。故 $e\leqslant\bigvee_{a\in M_1}\{g(a)\wedge f(A_{(a)})(y)\}$。于是 $H(A)(y)\leqslant\bigvee_{a\in M_1}\{g(a)\wedge f(A_{(a)})(y)\}$。

另外，若 $e\in\beta(\bigvee_{a\in L_1}\{g(a)\wedge f(A_{[a]})(y)\})$，则存在 $a\in L_1$ 使 $e\in\beta(g(a))$ 且 $y\in f(A_{[a]})$，进而存在 $x\in f^{-1}(y)$ 使 $x\in A_{[a]}$。于是 $g(A(x))\geqslant g(a)\geqslant e$。故 $H(A)(y)\geqslant\bigvee_{a\in L_1}\{g(a)\wedge f(A_{[a]})(y)\}$。从而(1)与(2)得证。

定理2 设 $H=g^f: L_1\to L_2$ 是双诱导映射且 g 是完备格同态，则 $\forall A\in L_1^X$，

(1) $H(A)=\bigwedge_{a\in L_1}\{g(a)\wedge f(A^{(a)})\}=\bigwedge_{a\in P_1}\{g(a)\vee f(A^{(a)})\}$。

(2) $H(A)=\bigwedge_{a\in L_1}\{g(a)\vee f(A^{[a]})\}=\bigwedge_{a\in P_1}\{g(a)\vee f(A^{[a]})\}$。

证明 (1) 设 $y\in Y$ 且 $H(A)(y)=\vee\{g(A(x))\mid f(x)=y\}=b$。则 $\forall x\in f^{-1}(y)$, $g(A(x))\leqslant b$，于是 $\forall x\in f^{-1}(y)$，$A(x)\leqslant g^{-1}(b)$，从而 $\forall x\in f^{-1}(y)$，$x\notin A^{(g^{-1}(b))}$. 这样 $y\notin(A^{(g^{-1}(b))})$。因此 $\bigwedge_{a\in L_1}\{g(a)\vee f(A^{(a)})(y)\}\leqslant g(g^{-1}(b))\leqslant b$. 故 $H(A)(y)\geqslant\bigwedge_{a\in L_1}\{g(a)\vee f(A^{(a)})(y)\}$.

反之，设 $e\in\alpha(\bigwedge_{a\in L_1}\{g(a)\vee f(A^{(a)})(y)\})$，则存在 $a\in L_1$，使 $e\in\alpha(g(a))$ 且 $y\notin f(A^{(a)})$，于是 $g(a)\leqslant e$ 且 $\forall x\in\vee f^{-1}(y)$，$x\notin A^{(a)}$。从而 $\forall x\in f^{-1}(y)$，$A(x)\leqslant a$ 且 $g(a)\leqslant e$. 故 $H(A)(y)\leqslant g(a)\leqslant e$。因此 $H(A)(y)\leqslant\bigwedge_{a\in L_1}\{g(a)\vee f(A^{(a)})(y)\}$. 得证 $H(A)=\bigwedge_{a\in L_1}\{g(a)\vee f(A^{(a)})\}$。

(2) 因为 $\bigwedge_{a\in L_1}\{g(a)\vee f(A^{(a)})\}\leqslant\bigwedge_{a\in P_1}\{g(a)\vee f(A^{(a)})\}\leqslant\bigwedge_{a\in P_1}\{g(a)\vee f(A^{[a]})\}$ 且 $\bigwedge_{a\in L_1}\{g(a)\vee f(A^{(a)})\}\leqslant\bigwedge_{a\in L_1}\{g(a)\vee f(A^{[a]})\}\leqslant\bigwedge_{a\in P_1}\{g(a)\vee f(A^{[a]})\}$，所以为证(1)与(2)，只须证 $\forall y\in Y$，$\bigwedge_{a\in P_1}\{g(a)\vee f(A^{[a]})(y)\}\leqslant\bigwedge_{a\in L_1}\{g(a)\vee f(A^{(a)})(y)\}$。

设 $e\in\alpha(\bigwedge_{a\in L_1}\{g(a)\vee f(A^{(a)})(y)\}$，则存在 $a\in L_1$ 使 $e\in\alpha(g(a))$ 且 $y\notin f(A^{(a)})$。由 $a=\wedge(\alpha(a)\cap P_1)$ 与 g 保交知存在 $b\in\alpha(a)\cap P_1$ 使 $e\in\alpha(g(b))$，而 $f(A^{(a)})\supset f(A^{[b]})$，所以 $y\notin f(A^{[b]})$，于是有 $\bigwedge_{a\in P_1}\{g(a)\vee f(A^{[a]})(y)\}\leqslant g(b)\leqslant e$。故 $\bigwedge_{a\in P_1}\{g(a)\vee f(A^{[a]})(y)\}\leqslant\bigwedge_{a\in L_1}\{g(a)\vee f(A^{(a)})(y)\}$。证毕。

定理3 设 $H=g^f: L_1^X\to L_2^Y$ 是双诱导映射且 g 保并，则 $\forall B\in L_2^Y$。

(1) $H^{-1}(B)=\bigwedge_{b\in L_2}\{g^{-1}(b)\vee f^{-1}(B^{[b]})\}=\bigwedge_{b\in P_2}(g^{-1}(b)\vee f^{-1}(B^{[b]})\}$。

(2) $H^{-1}(B)=\bigwedge_{b\in L_2}\{g^{-1}(b)\vee f^{-1}(B^{(b)})\}=\bigwedge_{b\in P_2}(g^{-1}(b)\vee f^{-1}(B^{(b)})\}$。

证明 由命题1知 g^{-1} 是保交映射，设 $x\in X$。

(1) 由 $H^{-1}(B)(x)=g^{-1}(B(f(x)))=\bigwedge_{b\in L_2}\{g^{-1}(b)\mid b\in\alpha(B(f(x)))\}=\bigwedge_{b\in L_2}\{g^{-1}(b)\mid f(x)\notin f^{-1}(B^{[b]})\}=\bigwedge_{b\in L_2}\{g^{-1}(b)\mid x\notin f^{-1}(B^{[b]})\}=\bigwedge_{b\in L_2}\{g^{-1}(b)\vee f^{-1}(B^{[b]})(x)\}$ 可证(1)中前一等式，而由 $B(f(x))=\wedge(\alpha(B(f(x)))\cap P_2)$ 可证另一等式。

(2) 由 $H^{-1}(B)(x)=g^{-1}(B(f(x)))=\bigwedge_{b\in P_2}\{g^{-1}(b)\mid B(f(x))\leqslant b\}=\bigwedge_{b\in P_2}\{g^{-1}(b)\mid f(x)\notin$

$B^{(b)}\}$ $\bigwedge_{b\in P_2}\{g^{-1}(b)\mid x\notin f^{-1}(B^{(b)})\}=\bigwedge_{b\in P_2}\{g^{-1}(b)\vee f^{-1}(B^{(b)})(x)\}$，可证（2）中后一等式。类似可证前一等式。证毕。

定理 4　设 $H=g^f: L_1^X\to L_2^Y$ 是双诱导映射且 g^{-1} 保并，则 $\forall B\in L_2^Y$，

（1）　$H^{-1}(B)=\bigvee_{b\in L_2}\{g^{-1}(b)\wedge f^{-1}(B_{[b]})\}=\bigvee_{b\in M_2}\{g^{-1}(b)\wedge f^{-1}(B_{[b]})\}$。

（2）　$H^{-1}(B)=\bigvee_{b\in L_2}\{g^{-1}(b)\wedge f^{-1}(B_{(b)})\}=\bigvee_{b\in M_2}\{g^{-1}(b)\wedge f^{-1}(B_{(b)})\}$。

证明　（1）$\forall x\in X$，由 $H^{-1}(B)(x)=g^{-1}(B(f(x)))=\bigvee_{b\in M_2}\{g^{-1}(b)\mid B(f(x))\geqslant b\}=\bigvee_{b\in M_2}\{g^{-1}(b)\mid f(x)\in B_{[b]}\}=\bigvee_{b\in M_2}\{g^{-1}(b)\mid x\in f^{-1}(B_{[b]})\}=\bigvee_{b\in M_2}\{g^{-1}(b)\wedge f^{-1}(B_{[b]})(x)\}$ 可证（1）中后一等式，类似同证前一等式。

（2）$\forall x\in X$，由 $H^{-1}(B)(x)=g^{-1}(B(f(x)))=\bigvee_{b\in M_2}\{g^{-1}(b)\mid b\in\beta(B(f(x)))\}=\bigvee_{b\in M_2}\{g^{-1}(b)\mid f(x)\in B_{(b)}\}=\bigvee_{b\in M_2}\{g^{-1}(b)\mid x\in f^{-1}(B_{(b)})\}=\bigvee_{b\in M_2}\{g^{-1}(b)\wedge f^{-1}(B_{(b)})(x)\}$ 可证（2）中后一表达式，同理可证前一表达式。

参　考　文　献

[1]　何明，L不分明集上的双诱导映射，科学通报，6(1986)，475。

[2]　王国俊，L-fuzzy拓扑空间论，西安：陕西师范大学出版社，1988。

[3]　史福贵，LF导算子与LF拓扑，烟台师范学院学报(自)，3(1994)，161－166。