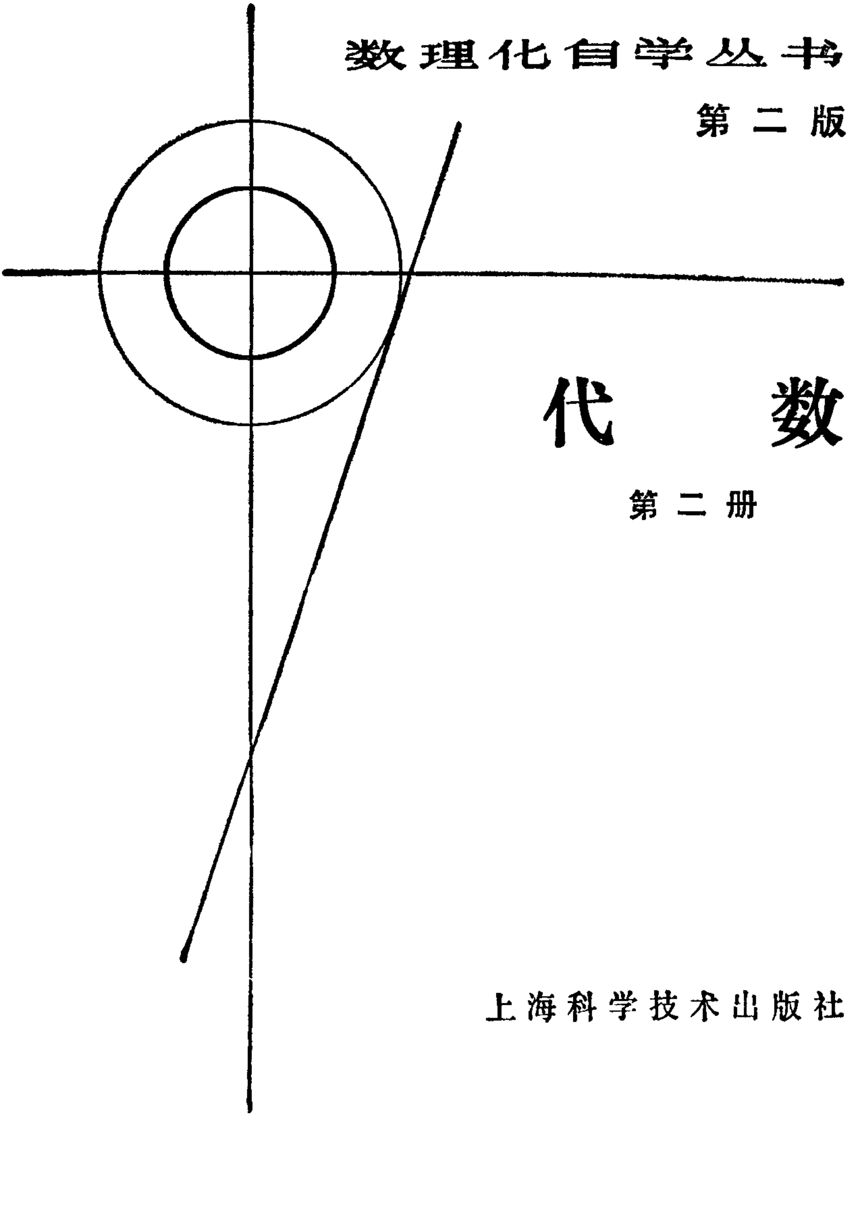
数理化自学丛书

第二版



代　数

第二册

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书是数理化自学丛书中的代数第二册，内容包括一元一次方程，一元一次不等式，一次方程组，数的开方与实数，根式，有理数指数幂，一元二次方程，二元二次方程组等八章，书中对重点、难点及关键性的内容都作了详细说明或分析，并配有大量的例题和习题，以适应自学的需要。书中带有* 号的内容，初次接触感到困难时，可以暂时不读。

本书供学完本丛书代数第一册的知识青年和在职干部自学之用，也可供中等学校青年教师教学参考。

数理化自学丛书

第 二 版

代 数

第 二 册

周朋寿 编

数理化自学丛书编委会审定

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本787×1092 1/32 印张12.25 字数325,000

1964年2月第1版

1982年10月第2版 1983年6月第10次印刷

印数 909,501—10,69,500

统一书号：13119·561 定价：(科二) 0.84 元

目　录

1

一元一次方程和可以化为一元一次方程的分式方程

§1·1 等　　式

1. 等式的意义

我们来看下面这些式子：

(1) $m+2m=3m$；　　(2) $\frac{4x^2}{2x}=2x$；

(3) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；

(4) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$；

(5) $x-5=8$；　　(6) $x^2=9$。

在代数第一册里，我们知道，用运算符号把由数字或者字母表示的数连结起来所得的式子，叫做代数式．单独的一个用数字或者字母表示的数，也可以看做是代数式．所有上面这些式子，都是用等号(=)把两个代数式连结起来构成的。

用等号连结两个代数式所成的式子叫做等式．

在等式里，等号左边的代数式叫做等式的**左边**；等号右边的代数式叫做等式的**右边**．例如，在等式 $m+2m=3m$ 里，左边是 $m+2m$，右边是 $3m$。

2. 恒等式和条件等式

考察上面的第一个等式 $m+2m=3m$．容易看出，这个等式的右边，是等式左边的两个项合并同类项的结果，所

以不论等式里的字母等于什么数值，等式两边的值总是相等的.例如，当 $m=-3$ 时，左边等于 -9，右边也等于 -9.

同样的，等式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 是多项式乘法的结果，不论 a 和 b 等于任何数值，左边和右边的值总是相等的；等式 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 是因式分解中常用的一个立方和公式，不论 a 和 b 等于任何数值，左边和右边的值也总是相等的.

我们再来考察上面的第二个等式 $\frac{4x^2}{2x}=2x$，这是根据分式的基本性质，从约分所得的结果．当 $x=0$ 时，分母 $2x$ 等于 0，分式没有意义，所以 x 的数值不允许等于 0．但是除了 $x=0$ 时分式没有意义以外，不论 x 等于其他任何数值，左边的值总是等于右边的值.

这就是说，在上面的四个等式里，不论用任何允许取的数值代替其中的字母，等式总是成立的.

一个等式，如果不论未知数的值如何，它的左右两边的值总是相等的，这样的等式叫做**恒等式**．例如，上面所讲的四个等式都是恒等式.

由数字组成的等式，也都是恒等式．例如，下面这些等式，都是恒等式：

$$-(7-2)=-7+2;\quad (-2)^3=-8.$$

但是，并不是所有含有字母的等式都是恒等式．例如，对于等式 $x-5=8$ 来说，容易看出，当 $x=13$ 时，这个等式是成立的；但是当 x 代表 13 以外的其它的数值时，左边的值就和右边的值不相等．这也就是说：当 $x\neq13$ 时，这个等式不成立(这里符号 $\neq$ 读做“不等于”).

同样的，当 $x=3$ 或者 $x=-3$ 时，等式 $x^2=9$ 是成立的，但是当 $x\neq\pm3$ 时，这个等式就不成立(这里 ±3 是“3 或者 -3”的简便记法).

所以等式 $x-5=8$ 和 $x^2=9$ 都不是恒等式. 象这类只有用某些数值代替式子中的字母才能使左右两边的值相等的等式,叫做**条件等式**.

例 判别下列等式是不是恒等式:

(1) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

(2) $2x+5=3x-1$;

(3) $(x+1)^2-x(x+1)=x+2$.

[解] (1) 这是两数和的立方公式, 不论 a 和 b 等于任何数值,左右两边的值总相等. 所以它是恒等式.

(2) 因为 x 并不是取任何数值都能使左右两边的值相等,例如,当 $x=5$ 时,左边等于 15, 而右边等于 14, 两边的值就不相等. 所以 $2x+5=3x-1$ 不是恒等式.

(3) 等式的左边化简后可得

$$左边=x^2+2x+1-(x^2+x)=x+1.$$

因为 x 不论取什么数值, $x+1$ 的值总不会和 $x+2$ 的值相等,所以 $(x+1)^2-x(x+1)=x+2$ 不是恒等式.

〔注意〕 例题(3)中的式子 $(x+1)^2-x(x+1)=x+2$, 因为它也是用等号把两个代数式连结起来构成的, 所以我们也把它叫做等式. 但是在这个等式中,不论 x 取什么数值,左右两边这两个代数式的值都不会相等,也就是说,不论 x 取什么数值, 这个等式总不能成立. 象这样的等式是假等式,通常也把它叫做**矛盾等式**.

习题 1·1

1. 等式和代数式有什么区别?举两个例子来说明.
2. 什么叫做恒等式?举两个例子.
3. 指出下列等式中,哪些是恒等式?哪些不是恒等式?

(1) $4+7=11$; (2) $-(x-4)=4-x$;

(3) $3x-5=-2$; (4) $x^2=x\cdot x$;

(5) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$; (6) $x^2=2x$;

(7) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;

(8) $x^2+y=x+y^2$; (9) $(x-2)(x+1)=x^2+x-2$;

(10) $(x-2)(x+1)=0$;

(11) $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$;

(12) $x^3-y^3=1$.

4. 什么叫做条件等式?举两个例子。

§1·2 方　　程

我们来看下面这个问题:

什么数减去 2 等于 3?

如果用 x 表示这个数,那末这个问题也就是问:当 x 是什么数值时,等式

$$x-2=3$$

能够成立.

在这个等式里, 2 和 3 是问题中已经告诉我们的数,这种数叫做**已知数**. 而字母 x 的值,需要根据它与等式里的已知数 2 和 3 之间的关系来确定.

等式里字母的值,需要根据它与等式里的已知数之间的关系来确定的,这样的字母叫做**未知数**.

含有未知数的等式,叫做**关于这个(这些)未知数的方程**,简称**方程**. 方程中的未知数也叫做**元**. 方程中不含未知数的项叫做**常数项**.

例如 $x-2=3$ 和 $x^2=9$ 都是关于未知数 x 的方程; $x+y=10$ 是关于未知数 x、y 的方程.

在方程 $x-2=3$ 里,如果用 5 代替未知数 x, 那末方程左右两边的值相等.

能够使方程左右两边的值相等的未知数的值,叫做方程的**解**.

例如, 5 是方程 $x-2=3$ 的解. 又如,在方程 $x^2=9$ 里,用 3 或者 -3 代替未知数 x, 方程左右两边的值都相等,所

以3和-3都是方程$x^2=9$的解.

只含有一个未知数的方程的解，也叫做方程的**根**. 例如，方程$x-2=3$的解是5，也可以说，方程$x-2=3$的根是5. 同样可以说，方程$5y=2$的根是$\frac{2}{5}$；方程$x^2=9$的根是3和-3.

求方程的解(或根)的过程，叫做**解方程**.

例 检验下列各数是不是方程$x^2=x+2$的根：

(1) 1；　　(2) -1；　　(3) 2.

[解] (1) 用1代替方程$x^2=x+2$里的x，这时，

$$左边=1^2=1,\quad 右边=1+2=3,$$

$\because$ 左边$\neq$右边，$\therefore$ 1不是方程$x^2=x+2$的根.

(2) 用-1代替方程$x^2=x+2$里的x，这时，

$$左边=(-1)^2=1,\quad 右边=-1+2=1,$$

$\because$ 左边$=$右边，$\therefore$ -1是方程$x^2=x+2$的根.

(3) 用2代替方程$x^2=x+2$里的x，这时，

$$左边=2^2=4,\quad 右边=2+2=4,$$

$\because$ 左边$=$右边，$\therefore$ 2是方程$x^2=x+2$的根.

习题 1·2

1. 用方程来表示下列数量关系：

(1) x的2倍加上7等于它的5倍减去8；

(2) x的3倍比x的5倍小4；

(3) y比y的$\frac{1}{4}$大12；

(4) x的$\frac{1}{3}$与x的$\frac{2}{5}$的和等于22；

(5) x与2的差的5倍等于15；

(6) x与3的和的平方等于x的10倍与6的和.

2. 什么叫做方程的根？用下列方程后面括号里的数值一一代替方程中的未知数，指出哪些是方程的根？哪些不是方程的根？

(1) $2x-5=1$, (3, 4)；　　(2) $x^2=9$, (3, -3)；

(3) $x^2-x=6$, (3, -2)；

(4) $(x-3)(x+3)=0$, (-3, 3, 0)；

(5) $3x+8=\frac{x}{4}-14$, $(8,\ -8)$;

(6) $2x(3x+2)=0$, $\left(-\frac{2}{3},\ 0,\ \frac{2}{3}\right)$;

(7) $x(x-2)=8$, $(-2,\ 2,\ -4,\ 4)$;

(8) $x^3-7x=6$, $(1,\ 2,\ -3)$.

§1·3 同解方程

我们来看下面的两个方程:

$$3x-2=4, \tag{1}$$

$$3x=6. \tag{2}$$

如果用 $x=2$ 代入方程(1)时, 方程两边的值都等于 4, 所以 2 是方程(1)的根. 如果用 2 以外的任何数值代替方程(1)里的 x, 例如用 5 代替 x, 左边的值等于 13, 右边的值等于 4, 这时方程两边的值就不相等, 所以 5 不是方程(1)的根. 因此,方程(1)只有一个根 2.

用同样的方法, 我们可以知道方程(2)也只有一个根 2. 这就是说,方程(1)的根和方程(2)的根完全相同.

两个方程,如果第一个方程的解都是第二个方程的解, 并且第二个方程的解也都是第一个方程的解, 那末这两个方程叫做**同解方程**.

例如,方程(1)和方程(2)是同解方程.

又如方程 $x^2=9$ 有两个根 -3 和 3, 方程 $(x-3)(x+3)=0$ 也有两个根 -3 和 3, 所以方程 $x^2=9$ 和方程

$$(x-3)(x+3)=0$$

是同解方程.

但是,方程 $x+2=0$ 的根是 -2, 方程 $(x+2)(x-3)=0$ 的根是 -2 和 3, 虽然方程 $x+2=0$ 的根是方程

$$(x+2)(x-3)=0$$

的根，但是方程$(x+2)(x-3)=0$的两个根里，只有一个根-2是方程$x+2=0$的根，而另一个根3却不是方程$x+2=0$的根，所以这两个方程就不是同解方程.

例 已知方程$(x+2)(2x-1)=0$有而且只有两个根：-2和$\frac{1}{2}$，方程$2x^2+3x=2$有而且只有两个根：$\frac{1}{2}$和-2，判别这两个方程是同解方程吗？

[解] 因为方程$(x+2)(2x-1)=0$有两个根，它们都是方程$2x^2+3x=2$的根，并且方程$2x^2+3x=2$有两个根，它们也都是方程$(x+2)(2x-1)=0$的根，所以这两个方程是同解方程.

习题 1·3

1. (1) 什么叫做同解方程？

   (2) 方程$5x=10$和方程$x+1=3$是不是同解方程？

2. (1) 第一个方程的根是3和5，第二个方程的根是5和3，这两个方程是不是同解方程？

   (2) 第一个方程的根是3和5，第二个方程的根是3和-5，这两个方程是不是同解方程？

   (3) 第一个方程的根是3和5，第二个方程的根是5，这两个方程是不是同解方程？

   (4) 第一个方程的根是3和5，第二个方程的根是3，5和6，这两个方程是不是同解方程？

3. 下列方程后面的括号里的数是这个方程全部的根，指出下列方程中哪些是同解方程：

   (1) $2x-3=x$，(3)；　　(2) $2x-1=3x$，(-1)；

   (3) $(x+1)(x-3)=0$，$(-1, 3)$；

   (4) $5x-8=2x+1$，(3)；　　(5) $x^2-3x=0$，(0, 3)；

   (6) $x^2-3=2x$，$(3, -1)$.

4. (1) $\frac{1}{2}$和-3是方程$(2x-1)(x+3)=0$的根吗？

   (2) 方程$2x-1=0$和方程$(2x-1)(x+3)=0$是不是同解方程？

   (3) 方程$(2x-1)(x+3)=0$和方程$x+3=0$是不是同解方程？

5. (1) 5是方程$2x+1=3x-4$的根吗？4是方程$2x+4=3x-1$的

根吗？

(2) 方程 $2x+1=3x-4$ 和方程 $2x+4=3x-1$ 是不是同解方程？

§1·4 方程的两个基本性质

在上一节里，要判别一个方程和另一个方程是不是同解方程，我们需要把两个方程的根一一代入检验，这样的方法是比较麻烦．为了解决这个问题，并且能够正确地掌握后面解方程的方法，我们先来研究方程的两个基本性质．

1. 方程的第一个基本性质

我们看下面一个问题：

什么数减去 3 等于 7？

如果设某数为 x，可以列出方程

$$x-3=7.$$

如果用算术方法来考虑：某数减去 3 所得的差是 7，大家都知道，这个某数(即被减数)等于差 7 与减数 3 的和．列出方程，可以得到

$$x=7+3.$$

这里，当 $x=10$ 的时候，方程 $x-3=7$ 的两边都等于 7，方程 $x=7+3$ 的两边都等于 10．这就是说，10 是方程 $x-3=7$ 的根，也是方程 $x=7+3$ 的根．所以方程 $x-3=7$ 和方程 $x=7+3$ 是同解方程．

再看下面这个方程：

$$3x-2=10.$$

从这个方程的两边都减去同一个整式 $2x-1$，得到

$$3x-2-(2x-1)=10-(2x-1).$$

当 $x=4$ 的时候，方程 $3x-2=10$ 的两边相等，这时 $2x-1=7$，所以两边都减去整式 $2x-1$，实际上就是两边

都减去7，因此方程 $3x-2-(2x-1)=10-(2x-1)$ 的两边也相等．所以方程 $3x-2=10$ 和方程 $3x-2-(2x-1)=10-(2x-1)$ 也是同解方程．

根据上面所说的，我们得到**方程的第一个基本性质**：

方程的两边都加上(或者都减去)同一个数或者同一个整式，所得的方程和原方程是同解方程．

例 1　利用方程的第一个基本性质，把下列方程变形成它的同解方程，使方程的左边只留下一个未知数 x，而右边是用数字表示的数：

(1) $x-5=8$；　　(2) $9x-\frac{7}{10}=8x+\frac{3}{5}$．

[解]　(1) $x-5=8$．

方程的两边都加上5，得 $x=8+5$，

就是
$$x=13.$$

(2) $9x-\frac{7}{10}=8x+\frac{3}{5}$．

方程的两边都加上一个整式 $-8x+\frac{7}{10}$，得

$$9x-8x=\frac{3}{5}+\frac{7}{10}.$$

合并同类项，得 $x=1\frac{3}{10}$．

〔注意〕　把方程逐步变形成它的同解方程时，应该按照上面例题中那样一步一步分开写．而不能用“=”把前后两个方程连结起来．例如，从方程 $x-5=8$ 得出它的同解方程 $x=8+5$，不能错误地写成 $x-5=8=x=8+5$，很明显，如果照 $x-5=8=x=8+5$ 这样的写法，就会得出 $8=8+5$ 这样一个错误的结论．

我们来观察一下：在上面例1(1)中的两个方程 $x-5=8$ 和 $x=8+5$ 里，含有 -5 的一项原来在方程的左边，符号

是负的；后来在方程的右边，符号变成正的了．再看例1(2)中的两个方程 $9x-\frac{7}{10}=8x+\frac{3}{5}$ 和 $9x-8x=\frac{3}{5}+\frac{7}{10}$ 里，含有 $-\frac{7}{10}$ 的一项，原来在方程的左边，符号是负的，后来在方程的右边，符号变成正的；而含有 $8x$ 的一项原来在方程的右边，符号是正的，后来在方程的左边，符号变成负的了．

从上面的例题可以看出：

方程中的任何一项，都可以把它的符号改变后，从方程的一边移到另一边．

把方程中的项改变符号后，从方程的一边移到另一边，这种变形，叫做**移项**．移项以后所得的方程和原方程是同解方程．

移项的法则是：

要把方程中的项从等号的一边移到另一边，必须改变这个项的符号．

移项法则在以后解方程中经常要用到，必须熟练掌握．

例 2 利用移项的方法，把下列方程变形成左边只留下一个未知数 x，而右边是数字表示的数的方程：

(1) $\frac{4}{7}x=3-\frac{3}{7}x$；　　(2) $8x+5=10x+1-3x$．

［解］ (1) $\frac{4}{7}x=3-\frac{3}{7}x$．

移项，得 $\frac{4}{7}x+\frac{3}{7}x=3$．

合并同类项，得 $x=3$．

(2) $8x+5=10x+1-3x$．

移项，得 $8x-10x+3x=1-5$．

合并同类项，得 $x=-4$．