# 线性代数

赵秉瑛　费英瑶　杜学孔　编著

对外贸易教育出版社

（京）新登字182号


**线 性 代 数**

赵秉瑛　费英瑶　杜学孔　编著

责任编辑　董洗印

对外贸易教育出版社出版

（北京和平街北口北土城　邮政编码　100029）

新华书店北京发行所发行・蓟县印刷厂印刷

*

开本850×1168 1/32・印张6.125・字数156千字

1992年2月第1版・1992年2月第1次印刷

印数1—2000册・定价2.10元

ISBN　7—81000—468—9/G・137

# 前　　言

经济应用数学系列教材，由《微积分》、《线性代数》、《概率论》等册组成。

这套由对外经济贸易大学国际企业管理系数学教研室组织编写的教材，是1987年上半年筹划的。它是根据经济院校的教学需要，结合本校的教学特点和经验编写的。在内容的选择上，既考虑到数学基础知识的适宜深度和体系的完整，又注意数学在经济中的应用。

《线性代数》是这套教材的第二册。它有以下特点：

1．基本概念精确而简明，例题紧扣概念及定理。

2．尽可能减少比较复杂的理论证明，强调线性代数在处理经济应用中的方法。

3．本书列入二次型一章。它在经济函数的讨论中有重要作用，同时它也是矩阵及线性变换等知识的一个很好运用。

4．例题与习题紧密配合，使学生便于掌握所学知识。

本书可供高等财经院校本科作为试用教材，也可供从事对外经济贸易工作的同志作为参考。

本书编写的指导思想和大纲由集体讨论确定。第一、二章由费英瑶编写，第三、六章由赵秉瑛编写，第四、五章由杜学孔编写，并由杜学孔纂第一稿，赵秉瑛纂第二稿。

本书的不足之处，欢迎批评指正。

编著者

1991年11月

# 目　　录

# 第一章 行 列 式

本章介绍n阶行列式的定义和基本性质。行列式的理论是由研究线性方程组的解法而产生的，在许多理论和实际应用问题中，它都发挥着重要的作用。

## § 1.1 n阶行列式的定义

在中学代数中，我们已学过二阶、三阶行列式．以此为基础，我们给出n阶行列式的定义。

为了讨论问题方便，我们补充定义一阶行列式为

$$|a_{11}|=a_{11}$$

那么，二阶行列式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=a_{11}\cdot|a_{22}|-a_{12}\cdot|a_{21}|$$

三阶行列式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})$$

$$+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

它的规律是：把该行列式（二阶或三阶）的第一行的各元素乘以划去该元素所在的行和列后剩下的行列式（一阶或二阶），然后前面冠以正负相间的符号，最后求其代数和。若把从该行列式中划去第i行，第j列后所剩的行列式记为$M_{ij}$，称为元素$a_{ij}$的余子式($i=1,2$ $j=1,2$或$i=1,2,3$, $j=1,2,3$)那么有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}$$

这里 $M_{11}=|a_{22}|$ $M_{12}=|a_{21}|$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}$$

这里

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

由此可见，二阶行列式和三阶行列式可由它们的余子式（一阶和二阶行列式）来定义。

这样我们自然想到用三阶行列式来定义四阶行列式，用四阶行列式来定义五阶行列式，等等。一般n阶行列式可用数学归纳法定义如下。

定义1.1 由$n^2$个元素$a_{ij}$（$i=1,2\cdots, n$; $j=1,2,\cdots n$）组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为n阶行列式。其中横排称为行，纵排称为列。当n＝1时

$$|a_{11}| = a_{11}$$

当n＞1时

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{n-1}a_{1n}M_{1n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{1i} M_{1i}$$

其中$M_{ij}$表示划去这个行列式第i行和第j列（i＝1,2…n；j＝1,2,…n）后所剩下的n-1阶行列式，称为$a_{ij}$的余子式。

上面我们是用行列式第一行的元素和它的余子式来定义行列式的。可以证明（用数学归纳法，因较繁，略去）：如果改用第一列的元素，也有相同的结果，即下面公式成立（n＞1）

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{n-1}a_{n1}M_{n1}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{j1} M_{j1} \qquad (1.1)$$

也就是说，n阶行列式按第一行元素展开与按第一列元素展开所得的结果是一样的。

**例1**　由定义计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 4 & -3 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 0\end{vmatrix}$$

的值

解：由定义1.1

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & -2\\ 4 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & -3 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}$$

$$+2\begin{vmatrix}2 & 1 & -2\\ 0 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 4 & -3\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$=3-(-1)\times(-10)+2\times16-3\times(-8)$$

$$=49$$

读者可以自行验证如果将D按第一列元素展开公式展开，将有相同的结果。

## §1.2　n阶行列式的性质

**性质1**　　行列式的行与列互换，其值不变。

即
$$\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}a_{1n}\\ a_{21}a_{22}a_{2n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}a_{n2}a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}a_{21}\cdots a_{n1}\\ a_{12}a_{22}\cdots a_{n2}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{1n}a_{2n}\cdots a_{nn}\end{vmatrix}\qquad(1.2)$$

证：采用数学归纳法，当n=2时，显然有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

假定对n－1阶行列式，性质1成立，于是（1.2）左端按第一行展开，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} \qquad (A)$$

而（1.2）右端按第一列展开，便有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1i} M_{i1}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} M_{j1} \qquad (B)$$

由归纳假设，$M_{1j}=M_{j1}$，于是由(A)，(B)两式便知(1.2)成立。

由性质1可知，行列式对行所具有的性质，对列也一定成立。因此，行列式的性质仅对行研究即可。

性质2　行列式任意两行（列）互换，其值变号。即

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}a_{k2}\cdots a_{kn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}a_{i2}\cdots a_{in} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}a_{i2}\cdots a_{in} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}a_{k2}\cdots a_{kn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

证：采用数学归纳法。当$n=2$时，性质 2 显然成立。假定性质 2 对$n-1$阶行列式成立证明它对n阶行列式也成立。

先考虑互换相邻两行的情况

设

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overline{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明$A=-\overline{A}$

将 A与$\overline{A}$第S行第一列元素的余子式分别记作$M_{s1}$与$\overline{M}_{1s}$，则由归纳假设，有

$$\overline{M}_{s1}=-M_{s1}\quad (S\neq i,\ i+1)$$

而且$\overline{M}_{i1}=M_{i+1\,1}$，$\overline{M}_{i+1\,1}=M_{i1}$

把$\overline{A}$按第一列展开，注意$\overline{A}$的第i行第1列元素为$a_{i+1\,1}$，第i+1行第1列元素为$a_{i1}$，故有

$$\overline{A}=\sum_{\substack{k=1\\k\neq i,i+1}}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}\overline{M}_{k1}+(-1)^{i+1}a_{i+1\,1}\overline{M}_{i1}+(-1)^{i+2}a_{i1}\overline{M}_{i+1\,1}$$

$$=\sum_{\substack{k=1\\k\neq i,i+1}}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}(-M_{k1})+(-1)^{i+1}a_{i+1\,1}M_{i+1\,1}+(-1)^{i+2}a_{i1}M_{i1}$$

$$=\sum_{\substack{k=1\\k\neq i,i+1}}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}(-M_{k1})+(-1)^{i+1}a_{i1}(-M_{i1})+(-1)^{i+2}a_{i+1\,1}$$

$$(-M_{i+1\,1})$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}(-M_{k1})=-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}M_{k1}$$

$$=-A$$

现在考虑第i行与第i+k行互换的情况。它可按下列办法由依次互换相邻两行而得到：先把第i行与第i+1行互换，再与第i+2行互换，……，经过K次这样的互换后，原来的第i行换到第i+k行的位置。此时原第i+k行已移到第i+k－1行处，再把它与第i+k－2行互换，然后再与第i+k－3行互换，……。经过

$k-1$次这样的互换后，它就变到第$i$行的位置。每互换相邻两行，行列式变一次号。现在共互换了$k+(k-1)=2k-1$次，行列式变了$2k-1$次号，相当于乘$(-1)^{2k-1}=-1$。故互换任意两行，行列式变号。由性质1，相应的性质对列也成立。

性质 3　行列式某行(列)有公因子k时，k可以提到行列式外，即

$$\begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ ka_{i1}\,ka_{i1}\cdots ka_{in} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}a_{i2}\cdots a_{in} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix} \qquad (1.4)$$

（上面的行列式中只标出有关的行，无关且始终保持不变的行用省略号代替）。

证：如$i=1$则由行列式定义有

$$\begin{vmatrix} ka_{11}ka_{12}\cdots ka_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix} = \sum_{i-1}^{n}(-1)^{i+1}ka_{1i}M_{1i}$$

$$=k\sum_{i-1}^{n}(-1)^{i+1}a_{1i}M_{1i}$$

$$=k\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}$$

如$i>1$，则由性质2，先对换第1，第$i$两行，再把第1行（原第$i$行）的公因子k提出于行列式外，然后又互换第1，第$i$两行。经两次互换后行列式恢复原来行的顺序，符号也没有变化，但提出了第$i$行的公因子k

推论：一个行列式中若有一行(列)元素全为零，则此行列式

的值为零。

性质 4　行列式中如有两行(列)元素相同，则行列式的值为零。

证：设行列式A中第i、j两行相同，则将A中这两行互换结果仍为A，但由性质2可知其结果应为－A，因此A＝－A，所以A＝0

性质 5　行列式中如有两行（列）元素成比例，则行列式的值为零。

证：设j行为i行的k倍，按性质3从j行中提出公因子k后变成与i行相同，由性质4可知，行列式的值应为零。

性质 6　如果将行列式A中的某一行（列）的每一个元素都写成两个数的和，则此行列式可以写成两个行列式的和，这两个行列式是分别以这两个数为所在行（列）对应位置的元素，其它位置的元素与A相同，即

$$A = i\text{行}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1.5)$$

证：i＝1时，由行列式定义，有

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}(b_i+c_i)M_{1i}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}b_iM_{1i}+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}c_iM_{1i}$$

$$=\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

如$i>1$，则把第i行与第1行互换，再由上面所述法则把行列式拆开成两个行列式之和，然后再把这两个行列式第i行，第1行互换，即得命题中的等式。

性质 7　行列式第j行（列）加上第i行（列）的k倍后，行列式的值不变。

证：利用性质 6 和性质 5（无关的行不写出）

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \end{vmatrix}
$$

例　下列公式成立

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\cdots a_{nn} \qquad (1.6)
$$

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\cdots a_{nn} \qquad (1.6')
$$

上面两公式中左边的两个行列式分别称为上三角形行列式和下三角形行列式。验证这两个公式只要不断利用行列式对第一列（行）的展开公式就可以了。

计算行列式时，可利用性质 2 及性质 7 将行列式化为上三角形行列式计算。步骤是：如果$a_{11}$为零，先将第一行（列）与其

它任一行（列）交换，使交换后的第一行第一列的元素不为零，然后把第一行分别乘以适当的倍数加到其它各行，使第一列除第一个元素外其余元素全为零；再用同样的方法处理除去第一行和第一列后余下的低一阶行列式；依次作下去，直至它成为上三角形行列式，这时主对角线上元素（即$a_{ii}$，$i=1,2,\cdots n$）的乘积就是行列式的值，

例1 计算行列式

$$A=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 & 18 \\ 2 & 3 & 10 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 10 & 15 & 4 \end{vmatrix}$$

解：

$$A=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 18 \\ 5 & 10 & 15 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-2) \quad \times(-5) \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 18 \\ 0 & 0 & 15 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \times(3) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 35 & 12 \\ 0 & 0 & 15 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \times(-2) \end{matrix}$$