

杭顺清 汪绳祖 主编

上海远东出版社

奥林匹克 竞赛指南

小学数学



◆ 责任编辑：方梦龙
◆ 视觉设计：戚亮轩
◆ 责任出版：晏恒全

ISBN 7-80613-941-9



9 787806 139417 >

ISBN 7-80613-941-9

G · 705 定价:19.80 元

奥林匹克竞赛指南

小学数学

杭顺清 汪绳祖 主编

上海遠東出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克竞赛指南 小学数学/杭顺清主编. —上海:
上海远东出版社, 1999. 11

ISBN 7-80613-941-9

I. 奥… II. 杭… III. 数学课—小学—教学参考资料
IV. G624

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 50918 号

奥林匹克竞赛指南 小学数学

主 编/杭顺清 汪绳祖

责任编辑/方梦龙

装帧设计/戚亮轩

责任制作/晏恒全

责任校对/吴明泉

出 版/上海远东出版社
(200336) 中国上海市仙霞路 357 号
<http://www.ydbook.com>

发 行/新华书店上海发行所
上海远东出版社

排 版/上海希望电脑排印中心

印 刷/上海望新印刷厂

装 订/上海望新印刷厂

版 次/1999 年 12 月第 1 版
印 次/2001 年 11 月第 6 次印刷
开 本/787 × 1092 1/32
字 数/426 千字
印 张/19
印 数/25501 - 31500

ISBN 7-80613-941-9

G·705 定价: 19.80 元

编 者 的 话

中小学数学奥林匹克竞赛,是世界各国中小学界最为普及的一项竞赛活动。这项竞赛活动推动了不少学有余力的学生参加数学奥林匹克竞赛知识的学习。在学好课内数学教学内容的基础上参加这类学习,“对于扩大学生的视野,拓宽知识,培养兴趣、爱好,发展数学才能,有着积极作用”(九年义务教育全日制小学数学教学大纲);也有利于学生养成认真审题,勤于思考的良好学习习惯,进一步提高理解、表达、分析、推理的能力。

《奥林匹克竞赛指南·小学数学》一书,是为适应参加各类小学数学竞赛需要而编写的小学生数学课外读物。它可供学有余力的小学生课外阅读,也可作为小学数学竞赛辅导班的训练参考书或家长辅导子女学习小学数学竞赛知识的参考材料。

本书按小学数学竞赛题分类编排。每个单元均有“要点提示”、“解题指引”、“试一试”和“练习”等部分。书末附有较详细的习题参考解答。

“要点提示”:简要说明解答本单元竞赛题所需的知识要

点和基本思路。

“解题指引”:根据竞赛要求,精选若干典型题作为范例,点明解题思路,指出解题的关键所在,帮助学生理解、掌握本单元内容,提高解题能力。

“试一试”是典型的基础题,“练习”则是编者从多年积累的国内外小学数学竞赛题中精选出来的,题型新颖多样,富有新意。题目按由易到难的顺序编排,其中难度较大的题目,均有*号标明。

本书由杭顺清、汪绳祖主编。参加本书编写的有郭凯福(一~六)、陈毓明(七~十一)、周百里(十二~十六)、何强(十七~二十一)、庄国志(二十二~二十六)、沈军(二十七~三十一)。

编 者

1999年6月

目 录

一、简算与巧算	1
二、十进制与二进制	12
三、数列与数阵	21
四、数字谜	36
五、定义新运算	54
六、和差问题	62
七、和倍、差倍问题	72
八、年龄问题	83
九、还原问题	90
十、盈亏问题	100
十一、鸡兔问题	109
十二、植树问题	118
十三、行程问题	127
十四、包含和排除	144
十五、周期问题	158
十六、排列组合	174
十七、数的整除	185
十八、质数、合数、分解质因数	196

十九、最大公约数和最小公倍数	205
二十、奇数和偶数	216
二十一、带余除法	226
二十二、图形的计数和计算	234
二十三、分数和百分数应用题	257
二十四、比和比例应用题	272
二十五、不定方程	282
二十六、最大与最小	295
二十七、逻辑推理	301
二十八、最佳选择	316
二十九、抽屉原理	331
三十、杂题	341
三十一、自测试题	353
参考解答	367

一、简算与巧算

要点提示

四则运算是小学数学的重要组成部分,也是数学竞赛的重要内容之一。

学生在进行计算时既有知识要求又有能力培养。定律、性质、法则是进行计算的依据,要使计算快速、准确,关键在于掌握运算技巧。对算式进行认真观察,剖析算式的特点及各数之间的关系,巧妙地、灵活地运用运算律,改变运算程序,使计算简便易行,既快又准。这对拓宽知识、启迪思维,培养学生综合分析、推理能力,灵活、快速、准确的运算能力,使知能得到协调的发展,都有很大的帮助。

大家都非常熟悉德国著名数学家高斯 10 岁时,巧算前 100 个自然数和的故事吧!从某种意义上说,计算方法的巧妙,在一定程度反映一个人智商的高低。我们就这个问题给同学们提供一些帮助,愿你能较好地掌握巧算妙解的方法。

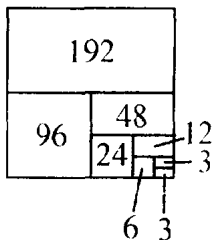
解题指引

【例 1】 用简便方法计算: $3333 \times 4444 + 6 \times 5555 \times 2222$

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= 12 \times 1111 \times 1111 + 60 \times 1111 \times 1111 \\
 &= 72 \times 1111 \times 1111 \\
 &= 8888 \times 9999 \\
 &= 8888 \times (10000 - 1) \\
 &= 88871112
 \end{aligned}$$

【例 2】 计算: $3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192 + 384$

解: 本题从第二个加数起, 每一个数都是前一个数的 2 倍, 我们不妨用图法来解。设 384 为一个正方形, 它的一半是 192; 192 的一半是 96, ... (如图所示)



$$\begin{aligned}
 \text{所以 原式} &= 384 - 3 + 384 \\
 &= 765
 \end{aligned}$$

【例 3】 计算: $0.1^3 + 0.2^3 + 0.3^3 + 0.4^3 + 0.5^3 + 0.6^3 + 0.7^3 + 0.8^3$

解: 根据 $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n)^2$ 使本题计算简便。

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3) \div 1000 \\
 &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)^2 \div 1000 \\
 &= 36^2 \div 1000 \\
 &= 1.296
 \end{aligned}$$

【例 4】 计算: $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{49 \times 50}$

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots \\
 &\quad + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{50} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} \\
&= 1 - \frac{1}{50} \\
&= \frac{49}{50}
\end{aligned}$$

【例 5】 计算： $\frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{4 \times 6} + \frac{1}{6 \times 8} + \cdots + \frac{1}{98 \times 100}$

$$\begin{aligned}
\text{解：原式} &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) + \cdots + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{100} \right) \\
&= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{98} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{100} \right) \\
&= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{100} \right) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{49}{100} \\
&= \frac{49}{200}
\end{aligned}$$

【例 6】 计算：

$$1 - \left(\frac{101010}{202020} \right)^2 \times \left(\frac{202020}{303030} \right)^2 \times \left(\frac{333033}{555055} \right)^2 \times \left(\frac{555555}{777777} \right)^2$$

解：仔细观察，可以发现每个分数都可以约简，于是

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times \left(\frac{2}{3} \right)^2 \times \left(\frac{3}{5} \right)^2 \times \left(\frac{5}{7} \right)^2 \\
&= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \\
&= 1 - \frac{1}{49}
\end{aligned}$$

$$= \frac{48}{49}$$

【例 7】 计算： $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{98 \times 99 \times 100}$

解：因为 $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} = \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} \right) \times \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2 \times 3 \times 4} = \left(\frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} \right) \times \frac{1}{2}$$

.....

$$\frac{1}{98 \times 99 \times 100} = \left(\frac{1}{98 \times 99} - \frac{1}{99 \times 100} \right) \times \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 原式} &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} \right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} \right) \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{98 \times 99} - \frac{1}{99 \times 100} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{98 \times 99} - \frac{1}{99 \times 100} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{99 \times 100} \right) \\ &= \frac{4949}{19800} \end{aligned}$$

【例 8】 计算： $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \cdots$
 $+ \frac{1}{1+2+3+\cdots+99+100}$

$$\begin{aligned} \text{解：原式} &= 1 + \frac{1}{\frac{(1+2) \times 2}{2}} + \frac{1}{\frac{(1+3) \times 3}{2}} + \frac{1}{\frac{(1+4) \times 4}{2}} + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{\frac{(1+100) \times 100}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{2}{2 \times 3} + \frac{2}{3 \times 4} + \frac{2}{4 \times 5} + \cdots + \frac{2}{100 \times 101} \\
&= 2 \times \left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \cdots \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{100 \times 101} \right) \\
&= 2 \times \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right. \\
&\quad \left. - \cdots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101} \right) \\
&= 2 \times \left(1 - \frac{1}{101} \right) \\
&= 1 \frac{99}{101}
\end{aligned}$$

【例 9】 计算： $\frac{1}{2} + \frac{1}{2+3} + \frac{1}{2+3+4} + \frac{1}{2+3+4+5} + \cdots$
 $+ \frac{1}{2+3+4+\cdots+200}$

解：原式 $= \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{(2+3) \times 2}{2}} + \frac{1}{\frac{(2+4) \times 3}{2}} + \frac{1}{\frac{(2+5) \times 4}{2}}$
 $+ \cdots + \frac{1}{\frac{(2+200) \times 199}{2}}$
 $= \frac{1}{2} + \frac{2}{2 \times 5} + \frac{2}{3 \times 6} + \frac{2}{4 \times 7} + \cdots + \frac{2}{199 \times 202}$
 $= \frac{1}{2} + 2 \times \left(\frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{3 \times 6} + \frac{1}{4 \times 7} + \cdots \right.$
 $\quad \left. + \frac{1}{199 \times 202} \right)$
 $= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \cdots \right.$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{199} - \frac{1}{202} \Big) \\
& = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{199} \right) - \left(\frac{1}{5} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{202} \right) \right] \\
& = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{200} - \frac{1}{201} - \frac{1}{202} \right) \\
& = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \left(\frac{99}{200} + \frac{66}{201} + \frac{99}{404} \right) \\
& = 1 \frac{430933}{2030100}
\end{aligned}$$

【例 10】 计算： $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$
 $- \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$

解：令 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = B$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = A$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= (1 + B) \times A - (1 + A) \times B = A + AB - B - AB \\
&= A - B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{所以原式} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

【例 11】 计算： $99\frac{3}{4} + 199\frac{3}{4} + 2999\frac{3}{4} + 39999\frac{3}{4} + 1$

解：因为 $1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

$$\text{原式} = \left(99\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(199\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(2999\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &+ \left(39999 \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) \\
 &= 100 + 200 + 3000 + 40000 \\
 &= 43300
 \end{aligned}$$

【例 12】 比较： $\frac{666665}{666667}$ 和 $\frac{777776}{777778}$ 的大小

解：因为 $1 - \frac{666665}{666667} = \frac{2}{666667}$

$$1 - \frac{777776}{777778} = \frac{2}{777778}$$

并且 $\frac{2}{666667} > \frac{2}{777778}$

所以 $\frac{666665}{666667} < \frac{777776}{777778}$

试 一 试

1. 观察下面算式的计算过程

$$\begin{aligned}
 &24^2 - 11^2 \\
 &= (24 + 11) \times (24 - 11) \\
 &= 35 \times 13 \\
 &= 455
 \end{aligned}$$

计算： $1234567888^2 - 1234567887 \times 1234567889$

2. 计算： $1999 \times 1999 + 1998 \times 1998 - 1999 \times 1998 - 1998 \times 1999$

3. 计算： $627 \times 8.8 + 37.3 \times 88$

4. 计算： $5975.5975 \div 5.975 \times 597.5$

5. 计算： $1992 \frac{1}{2} - 1 \frac{1}{3} + 2 \frac{1}{2} - 3 \frac{1}{3} + 4 \frac{1}{2} - 5 \frac{1}{3} + \dots$

$$+ 1990 \frac{1}{2} - 1991 \frac{1}{3}$$

$$6. \text{ 计算: } 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{20} - \frac{1}{200} - \frac{1}{2000} - \frac{1}{20000}$$

$$7. \text{ 计算: } \left(1 + \frac{7}{33}\right) + \left(1 + \frac{7}{33} \times 2\right) + \left(1 + \frac{7}{33} \times 3\right) + \cdots \\ + \left(1 + \frac{7}{33} \times 10\right) + \left(1 + \frac{7}{33} \times 11\right)$$

8. 把下列分数按从小到大排列起来。

$$\frac{5}{12}, \frac{12}{19}, \frac{10}{23}, \frac{6}{17}, \frac{15}{22}$$

$$9. \text{ 计算: } \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56}$$

$$10. \text{ 计算: } 7\frac{5}{6} - 6\frac{7}{12} + 5\frac{9}{20} - 4\frac{11}{30} + 3\frac{13}{42} - 2\frac{15}{56} + 1\frac{17}{72}$$

$$11. \text{ 计算: } \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \cdots \\ + \frac{1}{1995} + \frac{2}{1995} + \cdots + \frac{1995}{1995} + \frac{1994}{1995} + \cdots + \frac{2}{1995} + \frac{1}{1995}$$

$$12. \text{ 计算: } \frac{3}{1 \times 4} + \frac{3}{4 \times 7} + \frac{3}{7 \times 10} + \frac{3}{10 \times 13} + \frac{3}{13 \times 16} \\ + \frac{3}{16 \times 19} + \frac{3}{19 \times 22}$$

13. 有 30 个数: $1.65, 1.65 + \frac{1}{30}, 1.65 + \frac{2}{30}, \cdots, 1.65 + \frac{28}{30}, 1.65 + \frac{29}{30}$ 。如果取每个数的整数部分, 并将这些数相加, 那么其和是多少?

$$14. \text{ 计算: } \frac{1994}{1994^2 - 1993 \times 1995} + 6$$

$$15. \text{ 计算: } \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{60} + \frac{1}{40}$$

练 习

1. 计算: $2222 \times 100002 + 66666 \times 6666$

2. 若 $A = 1998^2 - 1998 + 1$, $B = 1998^2 - 1997 \times 1998 + 1997^2$, 比较 A 与 B 的大小。

3. 计算: $(0.1^2 + 0.2^2 + 0.3^2 + 0.4^2 + 0.5^2)^2 \div (0.1^3 + 0.2^3 + 0.3^3 + 0.4^3)^3$

4. 不求和比较 $1995 \frac{1993}{1994} + 1994 \frac{1992}{1995}$ 与 $1996 \frac{1993}{1994} + 1993 \frac{1992}{1995}$ 的大小。

5. 计算: $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$

6. 计算: $\frac{1995}{1 \times 2} + \frac{1995}{2 \times 3} + \frac{1995}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1995}{1994 \times 1995}$

7. 计算: $0.2\dot{1} + 0.2\dot{2} + 0.2\dot{3} + \cdots + 0.2\dot{7} + 0.2\dot{8}$

8. 计算: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \cdots + \frac{1}{50} + \frac{2}{50} + \cdots + \frac{49}{50}$

9. 计算: $\frac{2}{21} + \frac{2}{77} + \frac{2}{165} + \cdots + \frac{2}{1677} + \frac{2}{2021}$

10. 计算: $2 \times \left(1 - \frac{1}{1995^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{1994^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{1993^2}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)$

11. 计算: $1949 \times \left(\frac{1}{47} - \frac{1}{1996}\right) + 47 \times \left(\frac{1}{1949} - \frac{1}{1996}\right)$