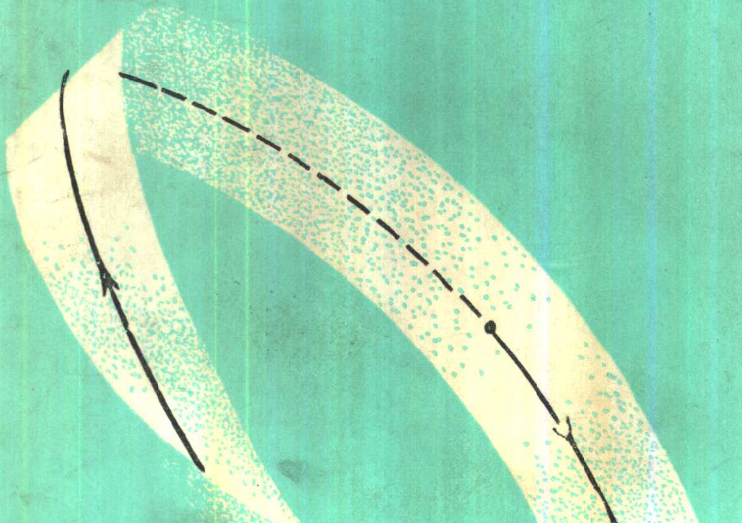
〔美〕ARNOLD 著

初等拓扑的直观概念

王阿雄译



人民教育出版社

初等拓扑的直观概念

〔美〕 ARNOLD 著

王 阿 雄 译

人 民 教 育 出 版 社

初等拓扑的直观概念

〔美〕 ARNOLD著

王阿雄 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷二厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 5.5 字数 129,000

1980年4月第1版 1980年11月第1次印刷

印数 00,001—10,300

书号 13012·0456 定价 0.50 元

序

本书是从一学季[†]的拓扑学课程讲稿,经过陆续修改演变而成的. 这门课是给具有初等微积分基础的学生讲授的. 书中增加了一些内容, 使得本书适用于一学期的课程. 这种课程现正在俄勒冈州立大学 2-3 年级里讲授. 这里所讲的拓扑学,更确切的说,是从直觉的观点而不是从公理的观点来阐述的. 其中某些概念是基于学生的经验而非正式地引入、讨论和使用的. 只当直觉的基础显得不够精确时,才给出这些概念的正式定义. 例如,尽管在我们的许多例子中,通常的三维空间图形占着极显著的地位,但却没给出三维空间的定义. 在对集合进行较为正式的讨论(第 6 章)之前,"集合"一词就已被非正式的使用着.我们几次都未作任何引证而使用了 Jordan 曲线定理,只是到了第 5 章才给出一个特例.

在这本简明教程中,不可能阐述拓扑学的所有方面;说实话,只介绍给学生少许经选择的题目, 使他们能够对这一学科中的一些结果的类型和证明方法有所了解. 第零章简明地讨论了包括数学归纳法在内的一些数学的证明方法. 也许最好的方法是将这一内容做为课程进行中的参考资料, 而不在学生尚未感到需要这些证明方法之前就讨论它.开始时,我们把拓扑考虑成"橡皮几何". 第 1,2,4 章讨论网络与地图中的一些问题. 所有这些问题的叙述

†原文为 one-quarter,当今美国许多大专院校把一学年分成三个或四个quarter,每个 quarter 比一学期的时间略短, —— 译者注

都是浅显而易于理解的，但是其中有些问题，尽管一些一流的数学家多年来付出了相当大的努力，直到现在还未获得解答．第3章给出一些识别拓扑等价图形的实际事例，这些仍然完全是从直觉观点出发的．

第5章给出在多边形特例中的Jordan定理的证明．这个定理在关于平面的拓扑研究中具有很基本的重要性．学生们可以领会到不同的公理基础能够应用于这种研究的乐趣．第6章给出集合论的一个引论．

最后两章是这本入门书的主要部分．第七章讨论了变换，定义了拓扑变换(或称同胚)，证明了Brouwer的不动点定理；与学生以前获得的经验保持接触是通过经常引用他们所熟悉的一些函数来维持的．本章还定义了变换的标数，这个概念被用来证明代数的基本定理．第8章将三维空间的直觉概念一般化，从而给出距离空间的定义，并且进一步地将距离空间的概念一般化，得出拓扑空间的定义．本章里有许多例子．第八章的最后三节讨论了连通性、紧致性及完备性．

在本书的准备过程中我借助了许多书籍和论文．本书中的某些问题及证明均来源于这些书籍和论文中的资料．图2-3.12引自Burton W. Jones的《数学基本概念》(*Elementary Concepts of Mathematics*; New York: Macmillan, 1947)；图3-2.5*b*引自《数学与想象》(*Mathematics and the Imagination*; Copyright 1940. 由于其版权所有者善意的许可，这里再次使用了它们．

作者尤其感谢Harry E. Goheen教授，Patricia Prenter小姐，以及Sheldon T. Rio教授，他们分别读了本书原稿的某些章节并提出了一些宝贵的建议．当然，书中仍然存在的所有错误由作者本人负责．

本书使用了一些特殊符号：其结果在后面的章节里要提到的习题记以符号“#”；特别难的习题用星号“*”标记；符号“≪”用来表明证明完毕。

B. H. ARNOLD

目　　录

零

数学命题与证明

0-1 命题

我们不打算对“真”与“假”的意义进行哲学式的讨论，而是认为这两个字的意义是已知的．我们将命题定义为任一组符号，这组符号构成一个有意义的论断，且具有性质：这一论断确切地为真或确切地为假，但不能既真又假．

例 1.1 下列三项各为一命题：

(*a*) 乔治·华盛顿是个卖国贼．

(*b*) $2+2=4$．

(*c*) 月亮是绿乳酪制成的．

例 1.2 下列三项都不是命题：

(*a*) 所有的 *minsy* 从前都是 *borogrove*[†]．

(*b*) 小偷，站住！

(*c*) 这个命题是假的．

可以用几种不同的方式把几个命题组合起来而构成新的命题．由于这种组合在数学里经常出现，所以有必要把它们弄明白，以便认识特定的句子或句子组所表达的信息．

否定也许是最简单的命题演算．如果 p 为任一命题，我们可以建立一组符号“非 p”．如果我们约定：在与 p 为假完全相同的条件下，“非 p”为真，并且在和 p 为真完全相同的条件下，“非 p”为假，那么“非 p”这组符号就成为一个命题．这是因为 p 是作为一

---

†原文“*All minsy were the borogroves*”出自《爱丽丝奇遇记》，该书作者爱生造字．其中 *minsy* 和 *borogrove* 乃是英语中不存在的字．在数学中是认为无意义的．——译者注

个命题给出的，它不是真就是假，不会既真又假，而上面所提到的约定赋予了“非 p”这同样的性质，所以“非 p”就成为一个命题.

这个约定归结为图 1.1. 其中字母“T”与“F”分别用来表示“真”与“假”. 因为这个图表说明了在什么情况下命题“非 p”为真，所以称它为“非 p”的真值表. 当然，此表也说明了“非 p”为假的那些情况.

p	非 p
T	F
F	T

图 1.1 “非 p”真值表

这里只提一下与否定有关的另一件事. 根据语法†，一个命题 p 的否定式可由在命题 p 内部的某处添上一个“非”†† 字来构成. 也有可能用其它的迂回说法，如象使用“这是假的……”这种句式，然而这些都很容易看出来，不会造成混乱的.

否定演算是作用于单个命题的. 图 1.2 描述两种演算，它们可作用于两个命题而产生另一个新命题. 若 p 是一个命题且 q 也是一个命题，我们可以建立一组符号“p 并且 q”以及另一组符号“p 或 q”. 如果我们做如图 1.2 中给出的真与假的约定的话，这两组符号都成为命题. 以上所说的基本上是我们所熟悉的，但有一点必须加以注意，即“或”(or)这个词在英文的一般用法中有两种不同的意思. 有的时候，它意味着两种可选择的情况中，恰有一种(两者不能同时均可)发生，有的时候，它意味着两种可供选择的情况中至少一种发生. (例如：我要和玛丽或珍妮去跳舞. 当我教课时，我总是穿着上衣或结个领带.) 在数学里以“或”的第二种意思做为

---

†此指英语语法.

††原文为 “*not*”. ——译者注

其标准意义.即我们将总是在"两种可供选择的情况中至少一种发生"这个意义上使用"或"这个词,这正象图 1.2 中所表示的那样.

p	q	p 并且 q	p 或 q
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	F

图 1.2 "p 并且 q"和"p 或 q"的真值表

此外还有两种特别重要的演算可作用于两个命题. 这两种演算给出的结果分别为:"若 p 则 q"和"p 当且仅当 q". 它们由图 1.3 描述出来. 由于许多数学定理都是用这两种形式之一表达的, 所以仅仅为了在尝试证明之前理解一个定理的意义(或理解某人的证明),就需要知道这两种形式.

p	q	若 p 则 q	p 当且仅当 q
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	F
F	F	T	T

图 1.3 "若 p 则 q"与"p 当且仅当 q"的真值表

可认为命题"若 p 则 q"有以下的要求: 在每一使命题 p 为真的情况下, 它要求命题 q 也为真. 这就是这个命题的全部要求. 特殊的是,在每一使命题 p 为假的情况下,这一命题不要求任何东西. 要强调的是命题"若 p 则 q"既不表明命题 p 为真, 也不表明存在一个过程,使人能够从 p 出发,通过一定的演算而最终达到 q. 此命题所表明的只是:每当 p 为真时 q 也为真.

例 1.3 下列命题为真:

(a) 若 $2+2=5$, 则 $3+4=7$.

(b) 若 $2+2=5$, 则 $3+4=6$.

(*c*) 若 $2+2=4$，则 $3+4=7$.

例 1.4 下列命题为假:

(*a*) 若 $2+2=4$，则 $3+4=6$.

任一具有"若 p 则 q"形式的命题称为**蕴涵**(*implication*).在英语中,这种命题可以用多种不同的方式来表达,图 1.4 给出了其中几个常用的表达方式.读者应该能够认识:这些表达方式中的每一个都与命题"若 p 则 q"表达同样的意思.

建议每个学生都要非常熟悉每个特定命题的各种不同的形式. 这样他就能以这些形式做为比较的标准，去决定任一其他这样命题的意义,这命题具有与他的标准形式之一相同的表达形式.例如考虑命题"如果我有 1000 美元，那么我就能与 *Yvette* 约会."

(*a*) 若 p 则 q
(*b*) p 是 q 的充分条件
(*c*) q 是 p 的必要条件
(*d*) p 蕴涵 q
(*e*) q 由于 p
(*f*) p 仅当 q
(*g*) q 除非"非 p"
(*h*) q 若 p

图 1.4 相同蕴涵的不同表达式

(*a*) p 当且仅当 q
(*b*) p *iff* q†
(*c*) p 是 q 的充分必要条件
(*d*) 若 p 则q,反之亦然
(*e*) q 当且仅当 p

图 1.5 等价命题的不同表达式

†简略写法"*iff*"意指"当且仅当"("*if and only if*"). 这种写法经常被使用，以便获得比用其他形式容易读的效果. ——原著者注

图 1.3 中的最后一列中命题“p 当且仅当 q”是“p 若 q 并且 p 仅当 q”的一个简略表达方式，参照图 1.4的等价形式表，此命题可表达为“若 p 则 q，并且若 q 则 p.”如图 1.3 所示，这个命题所说的是：p 与 q 具有相同的真值，意即：或者两者皆真，或者两者均假. 两个具有相同真值的命题 p、q 称为等价. 若 p、q 为等价并且想要证明 p 为真，那么只须证明 q 为真就行了. 与蕴涵一样，等价命题有几种表达方式. 图 1.5 列出了那些最常用的形式.

将命题“若 p 则 q”和命题“若非 q 则非 p”各作一真值表，很容易看出这两个命题是等价的. 由此，若把命题“若非 q 则非 p”的各种表达形式包括进去，图 1.4 所示的表达形式数目就得增加一倍.

在数学中我们经常考虑诸如 $x^2>-1$ 这种含有一个或多个变量的表达式. 这种表达式不是命题，因为我们不能说出这种表达式是真或假，除非我们了解所含变量的数值是怎么回事(若 x 代表“狗”，我们所举的例子就成为无意义的). 当这些变量有某些适当的辅助条件时，这种表达式就成为句子. 这些辅助条件称为量词(*quantifier*). 我们将对量词的两种不同类形感兴趣. 就例子 $x^2>-1$ 来说，我们能够得到两个句子：

$$\text{对所有的实数 } x,\ x^2>-1 \tag{1}$$

和

$$\text{有一个实数 } x,\ \text{使得 } x^2>-1. \tag{2}$$

这两个句子都为真. 注意：若我们考虑的不是实数而是复数的话，那么第一个句子为假，但第二个句子仍为真. 显然句子(1)能够表达为：如果 x 为一实数，则 $x^2>-1$. 有的时候则要求读者从上下文或经验出发去理解量词所包含的部分条件. 这样，如果上文指出考虑的是实数时，上面的句子(1)可简单地写作：

$$\text{对所有的 } x,\ x^2>-1.$$

其他三种具有完全相同的意义的形式是：

对任一x, $x^2>-1$.

对每个[†] x, $x^2>-1$.

对每一[††] x, $x^2>-1$.

同样，在适当的上文中，句子(2)可写为：

有一个x使得　$x^2>-1$.

其他三种具有完全相同的意义的形式是：

存在一个x，使得$x^2>-1$.

对某个x, $x^2>-1$.

至少有一个x，使得$x^2>-1$.

将一个量词作用在含有一个变量的表达式，由此而构成句子，似乎不会引起混乱. 但是学生们经常在理解上的困难是：对于同一个表达式相继地使用了两个不同的量词，所表示的意思是什么？有一个协定(下面将要说明)，它非常有助于解释这种表达式. 例如，考虑下面两个句子：

对任何正数x，有一个正数y，使得

$$x^2-y^2>0.$$

有一个正数y，使得对任何正数x，有

$$x^2-y^2>0.$$

这两个命题是不相同的. 我们约定：句子中变量的顺序规定着我们对变量的值进行选择(或决定)的次序. 由此，在上面的第一个句子中，x先被提及，然后再提到y；这就意味着先选择x的值，然后，在知道了对x的选择后，再对y的值加以选择. 当然，这两个选择还有另一个不同之处，即我们必须对所有可能的x值加以验证，而只须验证一个y值；且y的值可随x值的改变而改变. 上面的第一个命题为真，这是很容易看出的. 不管正数x如何选取，我们可选y

---

†原文为 *for each*.

††原文为 *for every*.

为$\frac{1}{2}x$;这个 y 值是个正数,并且可有:

$$x^2-y^2=x^2-\frac{1}{4}x^2=\frac{3}{4}x^2>0.$$

现在我们来考虑上述的第二个句子. 在这个句子里,先提及y再提到 x, 因此 y 值必须先选定, 在选定 y 值之后再选取 x 的值. 再则,虽然一个 y 的值就够了,但必须验证所有可能被选取的 x 的值. 这第二个命题是假的. 因为不可能找出一个 y 值, 使得当 y 等于此值并保持不变时,将所有可能的 x 值代入式子 x^2-y^2, 使 $x^2-y^2>0$ 恒为真. 事实上,假如有人建议用正数 y_0 做为 y 的一个值,那么我们一定会考虑 x 值中的一个值$\frac{1}{2}y_0$,而由这两个值就有:

$$x^2-y^2=\frac{1}{4}y_0^2-y_0^2=-\frac{3}{4}y_0^2<0.$$

上面的例子说明包含量词的命题的证明过程. 注意, 如果我们考虑的是一个具有形如"对所有的 x ……"的命题时, 为了证明这个命题为真,就需要依次考虑 x 的每个值,或者给出一个对每个许可的 x 值都有效的讨论. 在证明这个命题为假时, 则只须找出一个 x 的许可值不满足命题中由虚点所表示的条件就行了. 这样的 x 值称为命题的*反例*.

如果我们考虑形如"有一个 x, 使得……"的命题,那么为了证明此命题为真,只要给出一个 x 的许可值作为例子,使它满足由虚点所表示的条件就行了. 为了证明此命题为假, 就需要考虑每一个 x 的许可值.

还有一点需要注意. 情况有时候是这样的, 假定量词可以从上下文中看出来,而不把它写出来. 例如,等式

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

可能应该理解为：

$$\text{对所有的正整数 } n,\ 1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

关于与变量出现的顺序相关的约定以及关于量词命题的证明，习题中将给出进一步的练习．学生必须透彻地理解这一约定，因为这整本书里处处用到它(注意：并不是所有的作者都接受这一约定)．

习题

1. 下列哪些是命题？在这些命题里哪些为真？对某些题可能需要由经验或句子的上下文做出某些假设，如果需要，就做些假设．但记住，这些假设是由你作出来的．

   (a) $1+2=3$.

   (b) $\triangle+\square=\bigcirc$.

   (c) 我漂亮.

   (d) 多好啊!

   (e) 我漂亮或者我丑.

   (f) 我漂亮并且我丑.

   (g) 若我漂亮则我丑.

   (h) 我漂亮当且仅当我丑.

   (i) π 的十进小数点后第 10,000 位的数字为 3.

   (j) π 写成十进小数时，在它的数字里有无穷个 3.

   (k) 如果那是真的，我就是猴子的叔叔.

   (l) 如果火星上有生命，那么这门课程就很有趣了.

   (m) 让那里平静.

   (n) 我身高七英尺多除非我二百多岁.

   (o) 身高超过七英尺是年过二百的充分条件.

   (p) 只有七英尺高的人才二百多岁.

   (q) 所有七英尺高的人都二百多岁.

   (r) 若 $2+2=4$，则不是 $3+2=5$ 就是 $3+6=7$.

   (s) 不是 $3+6=7$，就是若 $2+2=4$，则 $3+2=5$.

(t) 若 $2+2=4$，则 $3+2=5$ 且 $3+6=7$.

(u) $3+6=7$，且若 $2+2=4$，则 $3+2=5$.

(v) 若 $3+6=7$，则 $2+2=5$ 且 $3+2=5$.

(w) $3+2=5$，且若 $3+6=7$，则 $2+2=5$.

(x) 若 $2+2=4$ 且 $3+6=7$，则 $2+2=5$.

(y) 若 $2+2=4$ 或 $3+6=7$，则 $2+2=5$.

(z) 若 $2+2=4$ 或 $3+6=7$，则 $3+2=5$ 且 $2+2=5$.

2. 准确说出下列情况中命题的意义并决定命题为真或为假. 利用本书中所解释的关于出现顺序的约定并注意你自己从经验或上下文中所加的假设.

(a) 每个男人都有一个好妻子.

(b) 有一个对每一个男人都是完美的妻子.

(c) 对每个 x，有一 y，使得 $x+y=5$.

(d) 有一个 y，使得对每个 x 有 $x+y=5$.

(e) 对每个 x，有一 y，使得 $xy=x$.

(f) 有一个 y，使得对每个 x 有 $xy=x$.

(g) 每一天都有一天跟在它后面.

(h) 有一天跟在每一天的后面.

(i) 对每个数字 x，$(0<x<1)$，有一数字 $y(1<y<2)$，使得 $x+y<2$.

(j) 有一数字 $y(1<y<2)$，使得对每一数字 $x(0<x<1)$ 有 $x+y<2$.

(k) 有一数字 $y(1<y<2)$，使得对每个数字 $x(0<x<1)$ 有 $x+y\leq 2$.

(l) 每个父亲有一个孩子，使得：若孩子超过 10 岁，则父亲超过 20 岁.

(m) 有一个孩子使得：对每个父亲，若这个孩子超过 10 岁，则父亲超过 20 岁.

(n) 有一个孩子，使得：若这个孩子超过 10 岁，则每个父亲都超过 20 岁.

(o) 对每一个 $x(0<x<1)$ 有一个 $y(1<y<2)$，使得：若 $0<z<y$，则 $x+z<2$.

(p) 有一个 $y(1<y<2)$，使得：对每个 $x(0<x<1)$，若 $0<z<y$，则 $x+z<2$.

(q) 对每个实数 x_0 和每个 $\varepsilon>0$，有一个 $\delta>0$，使得：若 $|x-x_0|<\delta$，则 $|x^2-x_0^2|<\varepsilon$.