二进制与逻辑代数

李忠傧　编著

一九八〇年四月

二进制与逻辑代数

李忠傧 编著

☆

广西人民出版社出版
（南宁市河堤路14号）
广西新华书店发行　桂林漓江印刷厂印刷
*
开本 787×1092 1/32　7.75印张　158千字
1982年4月第1版　1982年4月第1次印刷
印 数1—12,500 册

书号：7113·433　定价：0.64元

序　　言

十九世纪中叶，著名的英国学者乔治·布尔(G.Boole)发表了逻辑代数的奠基性文件《逻辑的数学分析》和《思维规律研究》，在这两篇论文中，他巧妙地将逻辑对象符号化、运算化，并运用数学方法进行处理，从此数学开始进入思维的领域，这就为进一步认识思维规律、揭示人脑奥秘提供了有力的工具。一百多年来经过很多学者的努力，这门学科已建立了牢固的基础，丰富了抽象代数学和促进了符号逻辑的发展；本世纪三十年代中后期，美、苏、日三国学者几乎同时发现了它在接点电路中的应用；由于逻辑代数的应用及电、磁等具有双稳态物质的存在，促使人们运用二进制数进行电子技术计量，信息论创始人商农(C.E.Shannon)早在1938年就曾指出，演绎逻辑在布尔代数中能够用二进制数处理，这为逻辑代数的研究提供了有力的工具，目前它已发展成为数字工程等应用分支，并广泛地应用到控制论、自动学、电子技术、人工智能等重要领域，当代科技最伟大成果之一的电子数字计算机的设计和研制，就是与二进制数及逻辑代数的研究分不开的。

为了介绍这门应用广泛的学科，使它在我国的四个现代化建设中发挥应有的作用，我在近年来讲授这门课程的基础上编写了这本小册子，内容除包含1977年公布的《全日制中学数学教学大纲(试行草案)》所规定的有关内容外，还加进

了逻辑式的化简及逻辑代数的应用等章节，写成后曾先后在广西教育学院及南宁市教师进修学校等院校讲授过，由于这个册子的实例较多，而且所用方法又是初等的，学习时不会有大的困难。根据部分教师的要求，由陈寿勤、梁传铣二同志将全日制十年制学校高中课本数学第三册第六章中的练习与习题全部解答附于书末，供备课时参考。

在编写本书过程中，得到了南宁师院、广西教育学院、广西大学、南宁市教师进修学校及广西数学会同志们的支持和帮助，在这里特致谢意。

编　者

1980年4月

于南宁师院

目　录

第一章 二进制数

历史上使用过各种不同的计数制，例如十进制、十二进制、二十进制以及六十进制，其中最常用的是十进制，在现代电子数字计算机及电子技术的计量中则大量使用二进制。所谓二进制就是“逢二进一”的计数制，这种数制只有两个数码，一个是“0”，一个是“1”，十进制的前十个自然数一、二、三、四、五、六、七、八、九、十在二进制里被表成1、10、11、100、101、110、111、1000、1001、1010。

为什么现代电子技术计量要采用二进制呢？这是因为十进制计量要使用十个数码，而每个数码需要用一种物理状态来表示，十个数码就要用十种物理状态来表示，但在实际中却很难找到能表示十种物理状态的电子元件，当然我们也可以采用电子线路组合的器件来表示，但是这种器件的电路都是很复杂的。与此相反，在自然界中，却大量存在着具有两种明显稳定物理状态的现象和物质材料，例如电灯的“亮”和“熄”、开关的“开”和“关”、电压的“高”和“低”、“正”和“负”、晶体管的“导通”和“截止”、纸带上的“有孔”和“无孔”、磁性材料的“北极”和“南极”、磁芯的两种剩磁状态等等，利用它们都能表示二进制数码的“0”和“1”；此外，用二进制表示的数运算起来特别简单，也特别容易用电子线路实现。因此，在现代电子技术里较多采

用二进制作为基本的计数制度。

二进制虽有以上的优点，但是因为我们用惯了十进制，对于较简便的二进制反而觉得不习惯；其次，表示同一个数，二进制往往要用一长串的二进制数码，读写都不方便，而且容易产生错误；为了克服这些缺点，电子数字计算机还要采用八进制、十六进制以及二——十进制等过渡数制。

本章将对比十进制介绍二进制及其它数制。

§1 二进制

1. 数的各种进位制度

(1) 十进制

所谓十进制，就是"逢十进一"的数制，一般的十进制数表为

$$S=a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0\cdot a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m},$$

这里的m，n为非负整数，a_i表示十进制数码0，1，2，…，9。

其位值表达式为：

$$S=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots+a_2\times10^2+a_1\times10$$
$$+a_0\times1+a_{-1}\times10^{-1}+a_{-2}10^{-2}+\cdots+a_{-m}10^{-m}.$$

例如

$$1969.12=1\times10^3+9\times10^2+6\times10+9\times1+1\times10^{-1}$$
$$+2\times10^{-2}.$$

我们把这个式子中各个幂的底数"十"称为这个数制的基数，而把"十"的各个方幂称为该位的位值。例如小数点左端第一位的位值是"一"，第二位的位值是"十"，第三位的位值是"百"，…，而小数点右端第一、二、三位的位值则分别是"十分一"、"百分一"、"千分一"。

（2）二进制

如果计数制度的基数是二，那么这个计数制度就称为二进制，也就是“逢二进一”的进位制度，它的每两个低级单位构成一个高级单位，每两个高级单位构成一个更高级单位，…，它的各级单位的位值用十进制表出时是…，$2^3, 2^2, 2, 2^0(=1), 2^{-1}(=0.5), 2^{-2}(=0.25), 2^{-3}(0.125)$，….

在二进制中我们同样可以利用位值和数码0，1记数。现将几个简单的数字列出十进制与二进制的对照表如下：

	十进制	二进制			十进制	二进制	
	0	0	0		0.5	0.1	2^{-1}
	1	1	2^0		0.25	0.01	2^{-2}
整	2	10	2^1	小	0.125	0.001	2^{-3}
	3	11			0.0625	0.0001	2^{-4}
	4	100	2^2		0.03125	0.00001	2^{-5}
	5	101					
	6	110					
	7	111					
	8	1000	2^3				
	9	1001					
	10	1010					
	16	10000	2^4				
数	32	100000	2^5	数			
	64	1000000	2^6				
	128	10000000	2^7				

为了避免混乱，我们在数的右下角写一个(2)表示它是二进制的数，例如$111_{(2)}$及$1010_{(2)}$；如果意义明显，也可以省去不写。今后我们对于其它进位制数也用同样的方法处理。

一般的二进制数

$$S=a_n a_{n-1}\cdots a_2 a_1 a_0\cdot a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m(2)}$$

这里的a_i表示二进制数码0，1，m和n则为非负整数。

其位值表达式为

$$S=a_n\times 2^n+a_{n-1}\times 2^{n-1}+\cdots+a_2\times 2^2+a_1\times 2+a_0\times 1$$
$$+a_{-1}\times 2^{-1}+a_{-2}\times 2^{-2}+\cdots+a_{-m}\times 2^{-m}.$$

例如

$$11011.101_{(2)}=1\times 2^4+1\times 2^3+0\times 2^2+1\times 2^1+1\times 2^0$$
$$+1\times 2^{-1}+0\times 2^{-2}+1\times 2^{-3}.$$

（3）R进制

设R是一个大于1的正整数，我们可以选定它作为基数而建立R进制数。在R进制下，每个非负数S都能表成以下形式：

$$S_{(R)}=a_n a_{n-1}\cdots a_2 a_1 a_0\cdot a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m(R)}$$

这里的a_i是R进制数码0，1，2，…，$R-1$中的某一个；n，m则是非负整数。

其位值表达式为

$$S_{(R)}=a_n\times R^n+a_{n-1}\times R^{n-1}+\cdots+a_2\times R^2+a_1\times R$$
$$+a_0\times 1+a_{-1}\times R^{-1}+a_{-2}\times R^{-2}+\cdots+a_{-m}\times R^{-m}.$$

例如当$R=8$时，我们可以建立八进制的数制，数$561.3_{(8)}$写成8的方幂之和的形式是

$$561.3_{(8)}=5\times 8^2+6\times 8^1+1\times 1+3\times 8^{-1}.$$

2. 十进制数化二进制数

我们分整数和纯小数两种情况讨论，然后再研究一般的

十进制数化二进制数的方法。

(1) 十进整数化二进整数

化十进制整数为二进制可以用除法进行，就是用基数 2 连续去除：第一次除得的余数（是 0 或 1）就是二进制数的最低位数码；然后用 2 除第一次所得的商，余数（0 或 1）就是二进制数低位上倒数第二位的数码；再用 2 除第二次所得的商；继续上面的操作，直到不能除为止，最后一个小于 2 的商就是二进制数的最高位数码。

现在以 $179_{(10)}$ 为例说明这种化法。我们可以列出竖式如下：

2|179	……1	（第一位数码）
2|89	……1	（第二位数码）
2|44	……0	（第三位数码）
2|22	……0	（第四位数码）
2|11	……1	（第五位数码）
2|5	……1	（第六位数码）
2|2	……0	（第七位数码）
1		（第八位数码）

$\therefore\quad 179_{(10)}=10110011_{(2)}$。

现在来证明这种化法的合理性：

设 $179_{(10)}=a_n a_{n-1}\cdots a_3 a_2 a_1 a_{0(2)}$

$$=a_n\times 2^n+a_{n-1}\times 2^{n-1}+\cdots+a_2\times 2^2+a_1\times 2^1+a_0$$

$$=2(a_n\times 2^{n-1}+a_{n-1}\times 2^{n-2}+\cdots+a_2\times 2+a_1)+a_0,$$

用 2 除等式的左右两端：

$$\frac{179}{2}=(a_n\times 2^{n-1}+a_{n-1}\times 2^{n-2}+\cdots+a_2\times 2+a_1)+\frac{a_0}{2}$$

即 $$89+\frac{1}{2}=(a_n\times 2^{n-1}+a_{n-1}\times 2^{n-2}+\cdots+a_2\times 2+a_1)+\frac{a_0}{2}$$

如果把分子是 0 的分数也看作真分数，那么这个等式左右两端都是一个整数与一个真分数之和，这只在它们的整数部分与整数部分、分数部分与分数部分相等时等式才能成立。

即 $\frac{1}{2}=\frac{a_0}{2}$，

由此得 $a_0=1$。

消去两边的分数得：

$$\begin{aligned}89&=a_n\times 2^{n-1}+a_{n-1}\times 2^{n-2}+\cdots+a_2\times 2+a_1\\&=2(a_n\times 2^{n-2}+a_{n-1}\times 2^{n-3}+\cdots+a_2)+a_1\end{aligned}$$

再用 2 除得：

$$44+\frac{1}{2}=(a_n\times 2^{n-2}+a_{n-1}\times 2^{n-3}+\cdots+a_2)+\frac{a_1}{2}$$

经过比较，又可得： $a_1=1$

消去上式两边的分数后可得：

$$\begin{aligned}44&=a_n\times 2^{n-2}+a_{n-1}\times 2^{n-3}+\cdots+a_2\\&=2(a_n\times 2^{n-3}+a_{n-1}\times 2^{n-4}+\cdots+a_3)+a_2,\end{aligned}$$

继续用 2 除可得：

$$22=a_n\times 2^{n-3}+a_{n-1}\times 2^{n-4}+\cdots+a_3+\frac{a_2}{2},$$

经过比较可得： $a_2=0$。

这样继续下去我们就可以将各个a_i确定下来，它们就是用 2 累除时所得的各个余数。这样就得到前面所讲的化法。

当数S的值较大时，要把它化成二进制数，需要连除多次才能达到目的，这时也可改用方幂系数法解决。仍以$179_{(10)}$为例说明之：

先把它表成 2 的方幂之和：

$$179_{(10)}=1+2^7+0\times2^6+1\times2^5+1\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$$

然后由高次幂到低次幂写下各项的系数，得10110011，这就是所求的二进制数。

这个方法的优点是化得较快，但缺点是要熟记 2 的各次幂，如果记错了就会影响结果的正确性。

(2) 十进小数化二进小数

可用连乘法求之。

这种方法是连续用 2 去乘十进制小数：第一次乘积中的整数部分就是二进制小数点后第一位；把乘积的小数部分再乘以 2 ，所得乘积的整数部分是小数点后第二位；这样，一直乘到小数部分为零或达到要求的位数为止。现举例如下：

将十进制小数0.78125转换成二进制数

$$
\begin{array}{lcr|r}
 & & 0 & .78125 \\
 & & & 2 \\
\hline
\text{二进制小数第一位} & \longleftarrow & 1 & 56250 \\
 & & & 2 \\
\hline
\text{二进制小数第二位} & \longleftarrow & 1 & 12500 \\
 & & & 2 \\
\hline
\text{二进制小数第三位} & \longleftarrow & 0 & 25000 \\
 & & & 2 \\
\hline
\text{二进制小数第四位} & \longleftarrow & 0 & 50000 \\
 & & & 2 \\
\hline
\text{二进制小数第五位} & \longleftarrow & 1 & 00000
\end{array}
$$

$\therefore\quad 0.78125_{(10)}=0.11001_{(2)}$

为了叙述方便，我们就以0.78125为例，证明这种化法的合理性：

设$0.78125_{(10)}$化成的二进小数是

$$0.a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m(2)},$$

即 $0.78125=0.a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m(2)}$

$$=\frac{a_{-1}}{2}+\frac{a_{-2}}{2^2}+\cdots+\frac{a_{-m}}{2^m},$$

用2乘这个等式的左右两端得：

$$1+0.56250=a_{-1}+\left(\frac{a_{-2}}{2}+\cdots+\frac{a_{-m}}{2^{m-1}}\right),$$

这个等式的左右两端都是一个整数与一个纯小数之和，只当它们的整数部分与整数部分、小数部分与小数部分相等时，等式方才成立，

故有：$a_{-1}=1$

去掉整数部分后有：

$$0.56250=\frac{a_{-2}}{2}+\frac{a_{-3}}{2^2}+\cdots+\frac{a_{-m}}{2^{m-1}},$$

仍在两端乘以2得：

$$1+0.12500=a_{-2}+\left(\frac{a_{-3}}{2}+\cdots+\frac{a_{-m}}{2^{m-2}}\right),$$

同理得：$a_{-2}=1$

消去两端的整数部分后继续乘以2得：

$$0+0.25000=a_{-3}+\left(\frac{a_{-4}}{2}+\frac{a_{-5}}{2^2}+\cdots+\frac{a_{-m}}{2^{m-3}}\right),$$

$$\therefore\quad a_{-3}=0$$

又因 $0.25000=\frac{a_{-4}}{2}+\frac{a_{-5}}{2^2}+\cdots+\frac{a_{-m}}{2^{m-3}},$

可得：$0+0.50000=a_{-4}+\left(\frac{a_{-5}}{2}+\frac{a_{-6}}{2^2}+\cdots+\frac{a_{-m}}{2^{m-4}}\right),$

$\therefore \quad a_{-4}=0$

由 $$0.50000=\frac{a_{-5}}{2}+\frac{a_{-6}}{2^2}+\cdots+\frac{a_{-m}}{2^{m-4}},$$

可得： $$1+0.0000=a_{-5}+\left(\frac{a_{-6}}{2}+\cdots+\frac{a_{-m}}{2^{m-5}}\right)$$

$\therefore \quad a_{-5}=1$

由于 $\frac{a_{-6}}{2}+\cdots+\frac{a_{-m}}{2^{m-5}}=0 \qquad \therefore a_{-6}=a_{-7}=\cdots=a_{-m}=0$

至此我们得到最后结果：

$$0.78125_{(10)}=0.11001_{(2)}$$

此外，我们还可用2的方幂系数法化十进小数为二进小数：由于$2^{-1}=0.5$，$2^{-2}=0.25$，$2^{-3}=0.125$，$2^{-4}=0.0625$，$2^{-5}=0.03125$，…，先将该十进小数写成这些方幂之和的形式，然后依次写下各系数即得所求的二进小数。例如：

$$0.78125_{(10)}=1\times2^{-1}+1\times2^{-2}+0\times2^{-3}+0\times2^{-4}+1\times2^{-5},$$

由高到低写下各加项的系数，就得到所求的二进小数 $0.11001_{(2)}$。

(3) 一般十进制数化二进制数

如果一个十进制数既有整数又有小数，只须对其整数部分和小数部分分别求出其对应的二进制数，然后合并一起就行了。

例1. 化$46.78125_{(10)}$为二进制数。

解 $\because \quad 46_{(10)}=101110_{(2)}$,

又 $0.78125_{(10)}=0.11001_{(2)}$

$\therefore \quad 46.78125_{(10)}=101110.11001_{(2)}$

例2. 化$1012.875_{(10)}$为二进制数。

解 用连除法及连乘法分别求出整数和小数部分相应的

二进制数，可列竖式如下：

$$
\begin{array}{r|l l}
2 & 1012 & \cdots\cdots\ 0 \\
2 & 506 & \cdots\cdots\ 0 \\
2 & 253 & \cdots\cdots\ 1 \\
2 & 126 & \cdots\cdots\ 0 \\
2 & 63 & \cdots\cdots\ 1 \\
2 & 31 & \cdots\cdots\ 1 \\
2 & 15 & \cdots\cdots\ 1 \\
2 & 7 & \cdots\cdots\ 1 \\
2 & 3 & \cdots\cdots\ 1 \\
 & 1 &
\end{array}
$$

$\therefore \quad 1012_{(10)} = 1111110100_{(2)}$

$$
\begin{array}{r|l}
0 & .875 \\
\times & \quad\ \ 2 \\
\hline
1 & .750 \\
\times & \quad\ \ 2 \\
\hline
1 & .500 \\
\times & \quad\ \ 2 \\
\hline
1 & .000
\end{array}
$$

$\therefore \quad 0.875_{(10)} = 0.111_{(2)}$

$\therefore \quad 1012.875_{(10)} = 1111110100.111_{(2)}$

有些十进制小数在化成二进制数时小数点后往往有很多个位，我们可以根据精确度要求只写出其若干个位。

例 3 ．化$5.101_{(10)}$为二进制数，要求精确到小数点后第十位。

解 $\because \quad 5_{(10)} = 101_{(2)}$，而$0.101_{(10)}$化二进制可列竖式如下：

$$
\begin{array}{rl}
 & \quad 0.101 \\
 & \times \qquad 2 \\
\cline{2-2}
a_{-1} & \longleftarrow 0.202 \\
 & \times \qquad 2 \\
\cline{2-2}
a_{-2} & \longleftarrow 0.404 \\
 & \times \qquad 2 \\
\cline{2-2}
a_{-3} & \longleftarrow 0.808 \\
 & \times \qquad 2 \\
\cline{2-2}
a_{-4} & \longleftarrow 1.616 \\
 & \times \qquad 2 \\
\cline{2-2}
a_{-5} & \longleftarrow 1.232 \\
 & \times \qquad 2 \\
\cline{2-2}
a_{-6} & \longleftarrow 0.464 \\
 & \times \qquad 2 \\
\cline{2-2}
a_{-7} & \longleftarrow 0.928 \\
 & \times \qquad 2 \\
\cline{2-2}
a_{-8} & \longleftarrow 1.856 \\
 & \times \qquad 2 \\
\cline{2-2}
a_{-9} & \longleftarrow 1.712 \\
 & \times \qquad 2 \\
\cline{2-2}
a_{-10} & \longleftarrow 1.424
\end{array}
$$

$$\therefore \quad 0.101_{(10)} \approx 0.0001100111_{(2)}$$

$$5.101_{(10)} \approx 101.0001100111_{(2)}$$

3. 二进制数化十进制数

可以利用位值法化，由记数法

$$N = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0 \cdot a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-m(2)}$$

$$= a_n \times 2^n + a_{n-1} \times 2^{n-1} + \cdots + a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2$$

$$+ a_0 \times 2^0 + a_{-1} \times 2^{-1} + a_{-2} \times 2^{-2} + \cdots + a_{-m} \times 2^{-m},$$

$$\because \quad 2^0 = 1, \quad 2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8, \quad \cdots$$

$$2^{-1} = 0.5, \quad 2^{-2} = 0.25, \quad 2^{-3} = 0.125, \quad \cdots$$

把各位的位值代入展开式后相加就得到所求的十进制数.

要将二进制数化成十进制数，只要用各位上的数码与各

该位上的位值相乘后求和即可。

例1．化$1011.011_{(2)}$为十进制数。

解 $$1011.011_{(2)}=1\times8+0\times4+1\times2+1\times1+0\times0.5$$
$$+1\times0.25+1\times0.125$$
$$=11.375_{(10)}.$$

例2．化$101011.1001_{(2)}$为十进制数。

解 $$101011.1001_{(2)}=1\times32+1\times8+1\times2+1\times1$$
$$+1\times0.5+1\times0.0625$$
$$=32+8+2+1+0.5+0.0625$$
$$=43.5625$$

由本节的2、3两部分可见：十进制数和二进制数都是可以相互转化的，而且转化后的结果都是唯一的。

§2 二进制数的算术运算

我们在本章开始时已经谈过，在现代电子技术中，二进制的数不但易于在机器上实现，而且它的运算也易于利用机器来完成，这是因为二进制数的运算方法非常简单，下面就可以看到它们最后可归结为机器的几种简单操作，从而能由机器来实现。

1．加法

两个一位的二进制数的加法规则是：

$$0+0=0$$
$$0+1=1$$
$$1+0=1$$
$1+1=10$（即等于2时要向高位进位）

由这个表可见，它的规则基本上是与十进制的加法规则相同