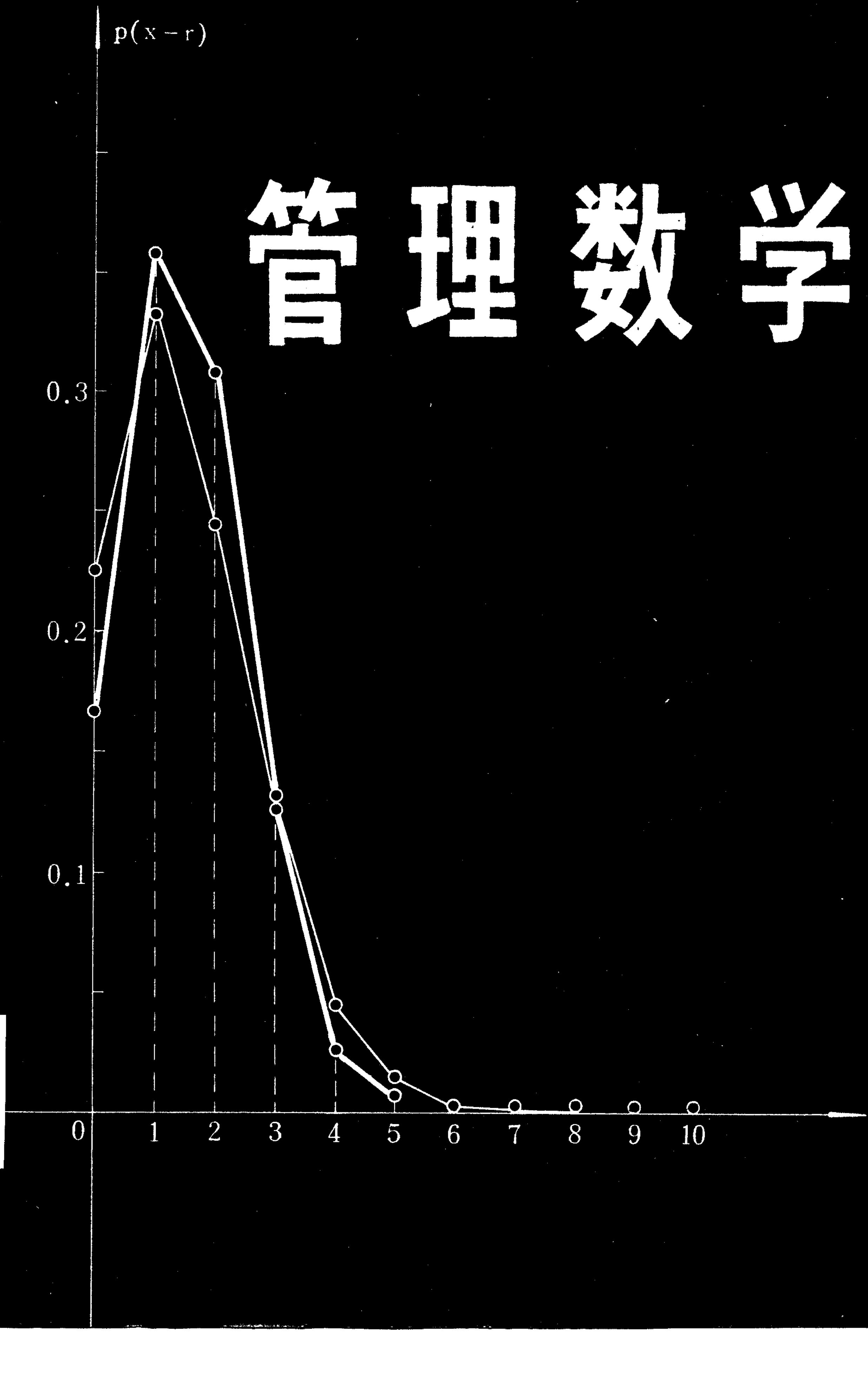
管理数学



管 理 数 学
Guanli Shuxue
王希贤 王庆田 主编

辽宁人民出版社出版 辽宁省新华书店发行
（沈阳市南京街6段1里2号） 东北工学院印刷厂 印刷

字数：533,000 开本：787×1092 1/16 印张：24
印数：1—10,000
1986年3月第1版 1986年3月第1次印刷

责任编辑：邵连凯 责任校对：许振学
封面设计：欧阳范和

统一书号：4090·229 （委托出版） 定价：4.65元

前　　言

管理现代化是实现四个现代化的必要条件．管理现代化最重要的特点之一是把数学方法运用到企业管理中去．当前，为了有效地推进企业管理现代化，提高企业素质和经济效益，不仅要求广大管理干部和工程技术人员掌握经济管理知识，而且还必须掌握管理数学知识，并能在实践中运用它解决各种管理的实际问题．为了提高广大管理干部和工程技术人员的管理数学水平，我们在企业管理干部专修科和管理干部培训班教学实践的基础上编写了“管理数学”一书．

该书包括：线性代数、概率论基础、数理统计、线性规划、投入产出模型、网络计划技术和排队论等七章，每章附有习题，书中有附录和附表．其主要特点是（1)对数学理论多用具体实例说明，着重讲清数学方法；(2) 密切联系企业管理实际；(3) 概念明确，层次清楚，文字简明，通俗易懂．因此，它不仅可作为企业管理专业两年制专修科的教材，而且还可作为厂长（经理）全国统一考试的教学参考书、企业管理专业及经济各类专业学生的参考书，并且特别适合广大工程技术人员和管理干部自学管理数学的教材．

本书由东北工学院王希贤、王庆田主编．参加本书编写的成员（按各章顺序）有：沈阳机电学院尚文斗、鞍山钢铁公司管理干部学校李久[illegible]、东北工学院王庆田、[illegible]

目　　录

第一章 线 性 代 数

第一节 行 列 式

二元一次方程的图象是一条直线，所以二元一次方程又叫线性方程．借用这个名词，对任何一次方程都叫线性方程，而一次方程组都叫线性方程组．

线性方程组的应用很广，通常用消元法和代换法解线性方程组．但是对三元以上的线性方程组的求解是很麻烦的，为此，引进行列式来计算线性方程组却很方便．

一、 二、三阶行列式

二元线性方程组的一般形式为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & (1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & (2) \end{cases}$$

式中，x_1、x_2 表示两个不同的未知数，a_{11} 表示第一个方程中第一个未知数的系数，a_{21} 表示第二个方程中第一个未知数的系数，b_1 表示第一个方程右边的常数，…等等．字母右下角的数字叫做下标．

用加减消元法解上面方程组：

$$(1)\times a_{22}-(2)\times a_{12}$$

得 $$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

$$(2)\times a_{11}-(1)\times a_{21}$$

得 $$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}$$

若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，便得方程组的解为：

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

$$x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

其中两个分母相同，可用对角线法计算：

$$\begin{matrix} a_{11} & & a_{12} \\ & \times & \\ a_{21} & & a_{22} \end{matrix} \longrightarrow a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

实线上两个数的积取正号，虚线上两个数的积取负号．用同样方法可计算两个分子：

$$\begin{matrix} b_1 & & a_{12} \\ & \times & \\ b_2 & & a_{22} \end{matrix} \longrightarrow b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

$$\begin{array}{cc} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{array} \longrightarrow a_{11}b_2-a_{21}b_1$$

为了便于记忆，可以把 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

对这个记号叫做二阶行列式，其中 a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22} 叫行列式的元素；横排叫做行，竖排叫做列；每一个元素的两个下标，左边一个表示该元素所在的行，右边一个表示该元素所在的列。

根据上述二阶行列式的定义，得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

把 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 叫做二阶行列式的展开式，或叫做二阶行列式的值。

这样，二元线性方程的解可表示为：

$$x_1=\frac{D_1}{D}$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}$$

式中

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

D 叫做二元线性方程组的系数行列式，如果 $D\neq 0$，可用上述公式计算二元线性方程组的解，并把这种方法叫做行列式法。

例 1 解下列方程组

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2=5 \\ 2x_1-x_2=8 \end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-3-4=-7$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix}=-5-16=-21$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}=24-10=14$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-21}{-7}=3$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{14}{-7}=-2$$

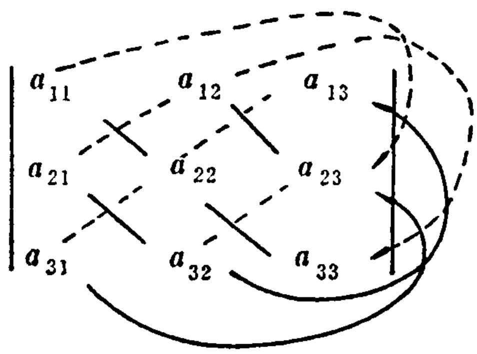
三元线性方程组的一般形式为：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}$$

如果仍用加减消元法去求解，则计算太麻烦，可仿照二阶行列式定义，将方程组的系数记作

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

叫做三阶行列式，或叫做方程组的系数行列式.对三阶行列式的值可用如下的方法求得：



实线上三数的积取正号，即

$$+a_{11}a_{22}a_{33},\quad +a_{12}a_{23}a_{31},\quad +a_{13}a_{21}a_{32}\cdot$$

虚线上三数的积取负号，即

$$-a_{13}a_{22}a_{31},\quad -a_{12}a_{21}a_{33},\quad -a_{11}a_{23}a_{32}$$

然后相加就得到三阶行列式的展开式，即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

类似地，可以得到

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\qquad D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}$$

当 $D\neq 0$时，三元线性方程组的解可记作

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

例 2 解下列方程组

$$\begin{cases}3x+2y+z=14\\ x+y+z=10\\ 2x+3y-z=1\end{cases}$$

解 $$D=\begin{vmatrix}3&2&1\\1&1&1\\2&3&-1\end{vmatrix}=-3+3+4-2-9+2=-5$$

$$D_1=\begin{vmatrix}14&2&1\\10&1&1\\1&3&-1\end{vmatrix}=-14+30+2-1-42+20=-5$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3&14&1\\1&10&1\\2&1&-1\end{vmatrix}=-30+1+28-20-3+14=-10$$

$$D_3=\begin{vmatrix}3&2&14\\1&1&10\\2&3&1\end{vmatrix}=3+42+40-28-90-2=-35$$

所以方程组的解为：

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{-5}{-5}=1$$

$$y=\frac{D_2}{D}=\frac{-10}{-5}=2$$

$$z=\frac{D_3}{D}=\frac{-35}{-5}=7$$

由二阶和三阶行列式的展开式可以看出：每一次是从不同的行与不同的列各取一个元素的乘积组成各项，它们的代数和即为该行列式的值；二阶行列式为 $2!=2$ 项，其中一项为正，一项为负；三阶行列式有 $3!=6$ 项，其中三项为正，三项为负。

二、n 阶行列式的概念

如果将三阶行列式的展开式改写成下列形式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

则由上述的三阶行列式的展开式可以看出：任一个三阶行列式都可降阶为二阶行列式来计算。

例

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 207$$

类似地可将四阶行列式的展开式降阶为三阶行列式来计算。

例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 7 & 4 & 1 & -6 \\ -3 & -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -6 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & -6 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 7 & 4 & -6 \\ -3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$-2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

这样，以逐次递推的方式可将 n 阶行列式的展开式降阶为 $n-1$ 阶行列式来计算。

例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{n+1}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix}$$

n 阶行列式有 n 行和 n 列，由 n^2 个元素组成，如果继续展开有 $n!$ 项， 其中 $\frac{n!}{2}$ 项为正，$\frac{n!}{2}$ 项为负，每一项都是 n 个不同的行与列的元素的乘积。

三、行列式的性质

性质 1 如果将行列式的行与列互换，而不改变各行与列的顺序，则行列式的值不变。

例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

D' 叫做 D 的转置行列式。

性质 2 交换行列式的任意两行或两列，行列式的值只改变符号。例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

性质 3 如果行列式有两行（列）完全相同，则行列式的值等于零。例如

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

性质 4 将行列式的某行（列）的所有元素乘以常数 k，所得行列式的值等于原行列式值的 k 倍。例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22}a_{33}+ka_{13}a_{21}a_{32}+ka_{12}a_{23}a_{31}-ka_{13}a_{22}a_{31}-ka_{11}a_{23}a_{32}-ka_{12}a_{21}a_{33}$$

$$=k(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33})$$

$$=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

推论 1 行列式中某一行（列）各元素的公因子可以提到行列式记号的外面。例如

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \\ 10 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 5\times 2\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -30$$

推论 2 如果行列式中某行（列）的元素都是零，则行列式的值等于零。例如

$$\begin{vmatrix} -7 & -6 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

性质 5 如果行列式的两行（列）的对应元素成比例，则行列式的值等于零。例如

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -4 & 4 & -6 \\ 10 & -8 & 15 \end{vmatrix} = 2\times 3\begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 5 & -8 & 5 \end{vmatrix} = 6\times 0 = 0$$

性质 6 如果行列式的某行（列）的元素都是二项式，则这个行列式可以分解为两个行列式的和。例如

$$\begin{vmatrix} a_{11}+l & a_{12}+m & a_{13}+n \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l & m & n \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 7 将行列式的某行（列）所有元素乘以常数，加到另一行（列）的对应元素上，行列式的值不变。例如

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 5 \\ -2 & -4 & -3 \end{vmatrix} \oplus = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 16$$

利用行列式的性质，可以把高阶行列式化为低阶行列式来进行计算。

四、行列式的计算方法

为了计算高阶行列式，可以把行列式中某元素所在的行与列划去，剩下的元素组成的行列式，叫做这个元素的余子式。例如，下列行列式中 a_{23} 的余子式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

为了说明方便，用记号 a_{ij} 来代表行列式中第 i 行第 j 列的元素；a_{ij} 的余子式乘以 $(-1)^{i+j}$ 计算所得的式子，叫做这个元素的代数余子式，记作 A_{ij}。例如， 三阶行列式中 a_{23} 的代数余子式为

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

定理 1 行列式等于它的任意一行（列）的各元素与其代数余子式乘积之和。例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

按第一行展开，得

$$\begin{aligned} D=&a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &+a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ =&a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \end{aligned}$$

如果四阶行列式按第三列展开，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}+a_{43}A_{43}$$

例 1 按第三行展开并计算下列行列式的值。

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 7\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 8 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+(-5)\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 207$$

例 2 计算下列行列式的值

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 7 & 4 & 1 & -6 \\ -3 & -2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

解 利用行列式的性质，先将行列式中某行（列）化成只有一个元素不为零，其余元素都是零，这样计算更简便。例如，使第二行为 0 、 1 、 0 、 0 ，即

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 7 & 4 & 1 & -6 \\ -3 & -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

按第二行展开，得

$$\begin{vmatrix} -5 & 7 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 16$$

例 3 证明

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = abcd(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

证 先分别提出各列的公因子 a，b，c，d，得

$$D = abcd\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

第二行减去第一行的 a 倍，第三行减去第二行的 a 倍，第四行减去第三行的 a 倍，得

$$D=abcd\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & b-a & c-a & d-a\\ 0 & b^2-ab & c^2-ac & d^2-ad\\ 0 & b^3-ab^2 & c^3-ac^2 & d^3-ad^2\end{vmatrix}$$

$$=abcd\begin{vmatrix}b-a & c-a & d-a\\ b(b-a) & c(c-a) & d(d-a)\\ b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a)\end{vmatrix}$$

$$=abcd(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ b & c & d\\ b^2 & c^2 & d^2\end{vmatrix}$$

第二行减去第一行的 b 倍，第三行减去第二行的 b 倍，得

$$D=abcd(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & c-b & d-b\\ 0 & c(c-b) & d(d-b)\end{vmatrix}$$

$$=abcd(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix}c-b & d-b\\ c(c-b) & d(d-b)\end{vmatrix}$$

$$=abcd(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix}1 & 1\\ c & d\end{vmatrix}$$

$$=abcd(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

定理 2 行列式的某一行（列）的各元素与另一行（列）对应的元素的代数余子式的乘积之和等于零．例如

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

其代数余子式的乘积为

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}$$

$$=-a_{11}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{13}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=0$$

类似地有：

$a_{11}A_{13}+a_{21}A_{23}+a_{31}A_{33}=0$；　　　$a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}=0$；

$a_{12}A_{13}+a_{22}A_{23}+a_{32}A_{33}=0$;

……

例 下列行列式第一行各元素与第二行对应各元素的代数余子式的乘积之和等于零。

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+(-2)(-1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}=0$$

五、克莱姆法则

设 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

只要系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

……

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

这个法则叫做克莱姆法则。

例 解下列方程组

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3-x_4=1 \\ x_1+3x_2+x_3-2x_4=0 \\ 3x_1-5x_2-2x_3+x_4=4 \\ 4x_1+x_2-5x_3-x_4=-1 \end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & -5 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -5 & -1 \end{vmatrix}=60 \qquad D_1=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & -5 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -5 & -1 \end{vmatrix}=180$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & -5 & -1 \end{vmatrix}=60 \qquad D_3=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & -5 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=120$$

$$D_4=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -5 & -1 \end{vmatrix}=240$$

$$\therefore \quad x_1=\frac{180}{60}=3, \quad x_2=\frac{60}{60}=1, \quad x_3=\frac{120}{60}=2, \quad x_4=\frac{240}{60}=4$$

常数项为 0 的 n 个 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \cdots \qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

叫做齐次线性方程组。当它的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

按克莱姆法则，方程组有唯一的一组零解，即：$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$，当 $D=0$ 时，方程组有非零解。