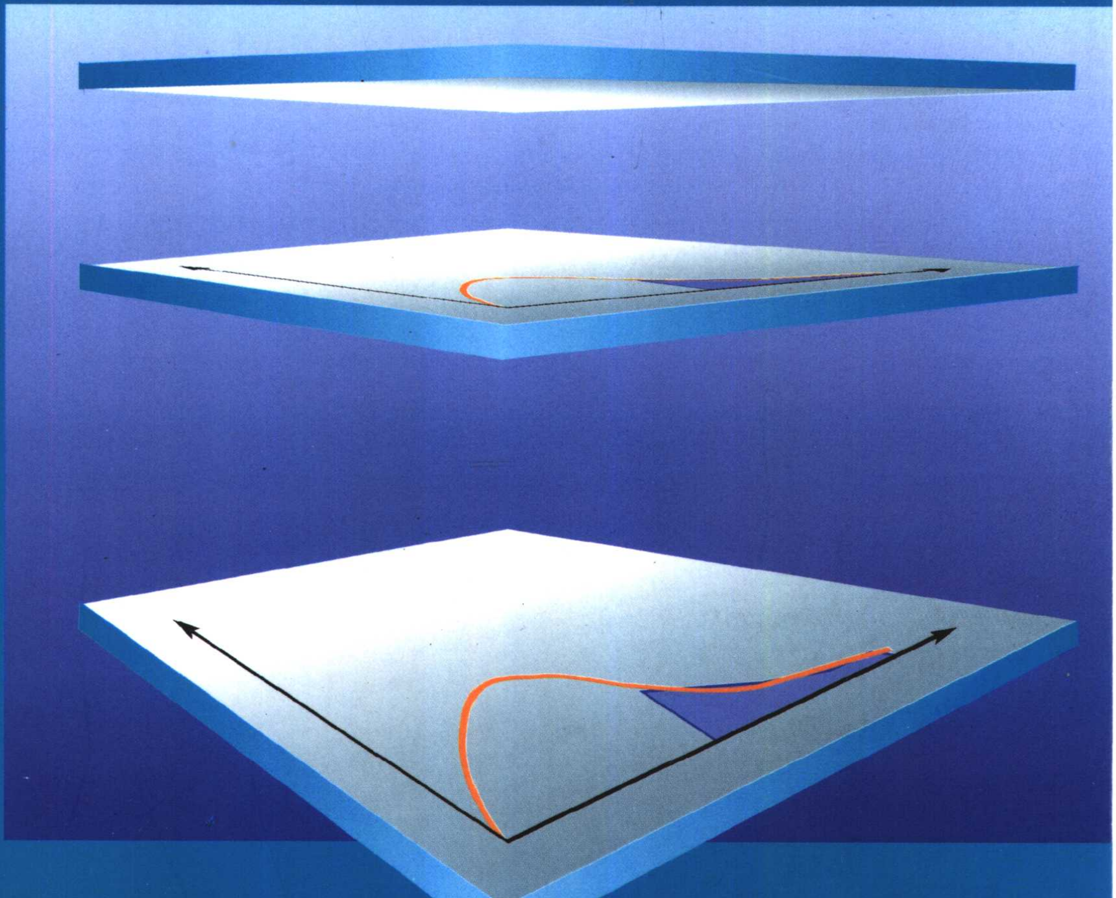
线性代数与概率统计习作课教程

主编 谢兴武 刘安平
副主编 刘小雅 向东进 奚先



国防工业出版社

线性代数与概率统计习作课教程

主编　谢兴武　刘安平
副主编　刘小雅　向东进　奚先

国防工业出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与概率统计习作课教程/谢兴武,刘安平主编.—北京:国防工业出版社,2001.6
ISBN 7-118-02508-9

Ⅰ.线… Ⅱ.①谢…②刘… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材②概率论-高等学校-教材③数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2②O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 12840 号

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)
(邮政编码 100044)
涿中印刷厂印刷
新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 10 228 千字
2001 年 6 月第 1 版 2001 年 6 月北京第 1 次印刷
印数:1—6000 册 定价:15.00 元

前　　言

线性代数与概率统计习作课是线性代数与概率统计课程的重要组成部分。它能加深学生对课程基本概念的理解、基础理论的掌握和加强对基本运算技能的训练；是学生灵活运用所学知识，理论联系实际，提高分析问题和解决问题能力的重要环节。为编写一本适合工科院校学生学习线性代数与概率统计课程的习作课教程，我们进行了积极的探索，组织教研室长期从事该课程教学的教师，汇集多年丰富的教学经验，以国家教委颁发的《高等工科学校线性代数、概率论与数理统计课程教学基本要求》为依据，群策群力编写了《线性代数与概率统计习作课教程》。2000 年下学期在我校 98 级学生中使用，普遍反映较好，对提高教学质量效果显著。在此基础上我们进行了修改和完善。

本书共 14 讲，每讲提出了教学要求，根据教学内容，每讲分为几个阶段，重视基本概念的讨论，基本运算方法的总结、归纳、提高，加强基础理论知识的剖析；选择了大量国内外最新试题，特别精选了历届全国研究生入学数学考试部分试题，例题一题多解，典型新颖。每讲除了典型例题分析，课堂练习讨论外，还有供学生课后练习，有一定难度的综合性强的参考题，并在书后附有近三年全国研究生入学考试数学试题和期终考试模拟试题，供学生复习和巩固。书末还附有练习题与参考题及全国考研试题的答案与提示供学生核对正误，便于学生自学。

本书既可以作为工科院校学生学习线性代数与概率统计课程的同步教材，也可以作为报考硕士研究生考生的复习参考资料，也可供大专院校数学教师及其有关人员参考。

本书上篇线性代数，第一、二、三、六讲由刘小雅编写，第四、五讲由向东进编写；下篇概率统计，第一、二、三讲由谢兴武编写，第四、五、六讲由刘安平编写，第七、八讲由奚先编写。全书由谢兴武统稿。我们希望本书对提高课程教学质量有所裨益，受到广大读者的喜爱。但限于作者水平，疏漏与不足之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2000 年 12 月

内 容 简 介

本书是为配合本科生、专科生学习《线性代数》与《概率统计》课程而编写的习作课教程。其内容安排紧密配合教学，汇集了作者长期从事该课程教学的丰富经验。

全书共分 14 讲。每讲不仅指出教学要求，而且指出学生应注意的问题和易出现的错误；对每讲要点、典型问题、解题方法进行了分析与小结，取材具有很强的典型性和针对性。本书例题、习题、参考题均是从国内外习题集、各院校考试题和历届全国考研题中精选出来的。这些题目新颖、灵活多样、有代表性。书末还附有这些题目的答案与提示，以供学生核对正误，便于学生自学。

本书既可作为各类本科生、专科生学习"线性代数与概率统计"课程的同步教材，又可作为报考硕士研究生的复习参考教材，也可供大专院校数学教师及有关人员参考。

目　　录

上篇　线性代数

第一讲　行列式的定义及其计算…… 1
第二讲　矩阵及其运算 …… 13
第三讲　向量组的线性相关性与矩阵的秩 …… 22
第四讲　线性方程组 …… 31
第五讲　相似矩阵及二次型 …… 40
第六讲　线性空间与线性变换 …… 52

下篇　概率统计

第一讲　随机事件及其概率 …… 58
第二讲　随机变量及其函数的概率分布 …… 67
第三讲　多维随机变量及其分布 …… 78
第四讲　随机变量的数字特征 …… 88
第五讲　大数定律与中心极限定理 …… 99
第六讲　数理统计的基本概念…… 104
第七讲　参数估计…… 110
第八讲　假设检验…… 117

附　　录

附录一　线性代数考试模拟试题…… 124
附录二　概率统计考试模拟试题…… 127
附录三　1998～2000 年全国研究生入学考试数学试题 …… 130
附录四　课堂练习题、参考题和试题答案与提示 …… 140

上篇 线性代数

第一讲 行列式的定义及其计算

要 求

1. 理解 n 阶行列式的定义。
2. 了解行列式的性质,掌握行列式的计算。
3. 掌握克莱姆(Cramer)法则。

讨论与思考

1. 只能用行列式的定义计算行列式吗?
2. 课本中列出的关于行列式的性质或定理(以下统称为性质)共有几个? 其中有几个可以降低行列式的阶?
3. 计算行列式的常用方法有哪些?

要点与例题分析

一、n 元排列与逆序数

1. n 元排列:由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 元排列。

2. 逆序数:n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中一对数,大的数在小的数左边称构成一个逆序,逆序总数称为该排列的逆序数,记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$。

3. 奇、偶排列:τ 为奇数称 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列,τ 为偶数称 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列,n 元排列中奇、偶排列各占一半。

4. 对换:一个排列中任意两个元素对换,排列改变奇偶性。

例 1 求 $2n$ 元排列 $1,3,\cdots,(2n-1),2,4,\cdots,2n$ 的逆序数。

解

	1	3	$\cdots$	$2n-1$	2	4	$\cdots$	$2n$
τ_i	0	0	0	0	$n-1$	$n-2$	$\cdots$	0

所求逆序数 $\tau=1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$。

例 2 设 n 元排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 的逆序数为 k，求 n 元排列 $a_na_{n-1}\cdots a_2a_1$ 的逆序数。

解 a_ia_j 只在 $a_1a_2\cdots a_n$ 与 $a_na_{n-1}\cdots a_2a_1$ 中一个构成逆序，

设 $a_na_{n-1}\cdots a_2a_1$ 的逆序数为 τ，则 $\tau+k=\dfrac{n(n-1)}{2}$，所以 $\tau=\dfrac{n(n-1)}{2}-k$。

二、行列式的定义、性质及其计算

1. 定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 τ 为 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数，Σ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和。

2. 性质

记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，　$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$称为 D 的转置行列式。

r_i 表示第 i 行，c_j 表示第 j 列，$r_i\leftrightarrow r_j$ 表示互换第 i 行与 j 行，kr_i 表示 i 行所有元素都乘以同一数 k，r_j+kr_i 表示第 i 行的各元素乘以 k 然后加到第 j 行对应元素上。

(1)$D=D^{\mathrm{T}}$

(2)$D\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}D_1$，则 $D_1=-D\Rightarrow$推论 **1**，若 $\exists\, i,j$ 使 $r_i=r_j$，则 $D=0$。

(3)$D\xrightarrow{kr_i}D_1$，则 $D_1=kD$。

(4)若 r_i 与 r_j 元素成比例，则 $D=0$。

(5)$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_1+c_1 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_1 & \cdots & c_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

(6)$D\xrightarrow{r_j+kr_i}D_1$，则 $D_1=D$。

(7)$D=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$，$i=1,2,\cdots,n$，其中 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，M_{ij}为 a_{ij}的余子式。

或 $D=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$，$j=1,2,\cdots,n$，而$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=0(i\neq k)$。

关于 n 阶行列式的定义与计算是课本第一章的难点，其中 n 阶行列式的计算是重点。

计算行列式时,可以直接用定义,但更多的是利用行列式的性质,尤其是可使行列式降阶的性质:行列式可按某行(或某列)展开。计算行列式的常用方法小结如下。

方法1 直接用定义计算行列式。

用定义计算行列式的典型例题有下面四个。

1. 对角形行列式: $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

2. 次对角形行列式: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$

3. 上(下)三角形行列式: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

注意上面1、3的计算结果,居然相等!它们简洁的结论给我们以醒目的提示:如果行列式中的很多元素有规律地是零,那么计算很简单。因此,利用行列式的性质把待计算的行列式变成以上四种形式的行列式中的一种,成为我们计算行列式的基本方法,详见方法2。下面先另外介绍两个用定义计算行列式的例题。

例3 设一个 n 阶行列式中零元素的个数多于 n^2-n 个,试证这个行列式等于零。

证 注意到一个 n 阶行列式中共有 n^2 个元素。当零元素的个数多于 n^2-n 个时,不等于零的元素最多只有 $n-1$ 个,因而行列式中至少有一行(或一列)的元素全为零,所以这个行列式等于零。

例4 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$。

解 因为行列式中只有下列元素不为零:

$$a_{12}=1,\ a_{23}=2,\ a_{34}=3,\ \cdots,\ a_{n-1,n}=n-1,\ a_{n1}=n$$

注意列序号分别是2、3、4、…、n、1,又逆序数 $\tau(234\cdots n1)=n-1$,

所以,由行列式的定义可得,原式 $=(-1)^{\tau(234\cdots n1)}1\times2\times\cdots\times(n-1)\times n=(-1)^{n-1}n!$。

方法2 化为上(或下)三角形计算行列式。

为了把 n 阶行列式化成上三角形行列式,需要将主对角线下方的元素全部变成零。其次序是:首先把主对角线下方的第一列各元素全变成零,再把主对角线下方的第二列各

元素全变成零,…,依次类推,最后把主对角线下方第 $n-1$ 列的那个元素变成零。一般地,如果不按这个次序作,往往达不到化为上三角形行列式的目的。在把行列式化成上三角形行列式时,主要用到行列式的性质(2)、(3)、(6)。

例5 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & a & bc\\ 1 & b & ca\\ 1 & c & ab\end{vmatrix}$,设 a、b、c 互异且皆不为零。

解 我们用化为上三角形的方法

$$D=\begin{vmatrix}1 & a & bc\\ 0 & b-a & c(a-b)\\ 0 & c-a & b(a-c)\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & a & bc\\ 0 & 1 & -c\\ 0 & 1 & -b\end{vmatrix}=$$

$$(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & a & bc\\ 0 & 1 & -c\\ 0 & 0 & c-b\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$$

行列式的计算方法比较灵活,同一个行列式可以有多种计算方法,有时还需要几种方法综合运用。因此计算前要先仔细观察行列式在构造上的特点,以便采用适合的方法迅速求解。

例6 记行列式 $\begin{vmatrix}x-2 & x-1 & x-2 & x-3\\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3\\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5\\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3\end{vmatrix}$ 为 $f(x)$,试求方程 $f(x)=0$ 的根。

解 此题的主要任务是求出行列式 $f(x)$。由行列式的性质知

$$f(x)=\begin{vmatrix}x-2 & x-1 & x-2 & x-3\\ 2 & 1 & 2 & 3\\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5\\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}x & x & x & x\\ 2 & 1 & 2 & 3\\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5\\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2 & 3\\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5\\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3+(-3)r_1\\ r_4+(-4)r_1}]{r_1\div x(x\neq 0)}x\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 3\\ -3 & -2 & x-5 & -5\\ 0 & -3 & x-7 & -3\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+3\times r_1]{r_2+(-2)r_1}x\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & x-2 & -2\\ 0 & -3 & x-7 & -3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第一列展开}}x\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & x-2 & -2\\ -3 & x-7 & -3\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+(-3)r_1]{r_2+r_1}x\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & x-2 & -1\\ 0 & x-7 & -6\end{vmatrix}=5x(x-1)$$

令 $f(x)=0$,得根为 $x=0$ 或者 $x=1$。

例7 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$。

解 当 $x=0$ 时，用方法一易得 $D_n=a_n$；当 $x\neq 0$ 时，将其化成下三角形行列式：

$$D_n \xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{c_{i+1}+c_i\div x} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ a_n & \left(a_{n-1}+\dfrac{a_n}{x}\right) & \left(a_{n-2}+\dfrac{a_{n-1}}{x}+\dfrac{a_n}{x^2}\right) & \cdots & \cdots & \left(x+a_1+\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{a_k}{x^{k-1}}\right) \end{vmatrix}=$$

$$x^{n-1}\left(x+a_1+\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{x^{k-1}}\right)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

综合上述两种情况可知：$D_n=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$。

方法3 按某一行(或列)展开。

例8 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & y & y \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$

解 根据此行列式的特点，先尽量使得更多的元素化成零，再按行(或列)展开。

$$\text{原式}\xlongequal[c_4+(-1)c_3]{c_2+(-1)c_1}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -y \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & -y \end{vmatrix}=x(-x)\begin{vmatrix} y & 0 \\ 1 & -y \end{vmatrix}=x^2y^2$$

方法4 数学归纳法。

例9 计算下列 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x_{n-2} & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}$$

解 我们先计算其低阶行列式

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 + x_1 & a_2 \\ -x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2(a_1 + x_1) + a_2 x_1 = x_1 x_2\left(1 + \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2}\right)$$

据此推测，$D_k = x_1 x_2 \cdots x_k\left(1 + \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \cdots + \frac{a_k}{x_k}\right)$；用数学归纳法，因为

$$D_{k+1} \xlongequal{\text{按末列展开}} x_k D_{k-1} + (-1)^{1+k} a_k(-x_1)(-x_2)\cdots(-x_{k-1}) =$$

$$x_k \times x_1 x_2 \cdots x_{k-1}\left(1 + \frac{a_1}{x_1} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{x_{k-1}}\right) + (-1)^{1+k+k-1} a_k x_1 \cdots x_{k-1} =$$

$$x_1 x_2 \cdots x_{k-1} x_k\left(1 + \frac{a_1}{x_1} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{x_{k-1}} + \frac{a_k}{x_k}\right)$$

结论真，所以原行列式 $D_n = x_1 x_2 \cdots x_n\left(1 + \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \cdots + \frac{a_n}{x_n}\right)$。

方法 5 递推法。

在举出例题之前，我们先介绍方法的思想和结论。设计算 n 阶行列式 D_n 时，得到了递推关系式

$$D_n = \alpha D_{n-1} + \beta D_{n-2}, n > 2 \tag{1-1}$$

①若 $\beta = 0$，则 $D_n = \alpha D_{n-1} = \alpha^2 D_{n-2} = \cdots = \alpha^{n-1} D_1$，算出 D_1 即可；

②若 $\alpha = 0$，则 $D_n = \beta D_{n-2} = \beta^2 D_{n-4} = \cdots = \begin{cases} \beta^{\frac{n}{2}-1} D_2, & n = 2k \\ \beta^{\frac{n-1}{2}} D_1, & n = 2k+1 \end{cases}$；

③若 $\beta \neq 0$，设 $\alpha = p + q$，$\beta = -pq$，即 p 和 q 是二次方程 $x^2 - \alpha x - \beta = 0$ 的两个根，那么式(1-1)为 $D_n = (p+q)D_{n-1} - pqD_{n-2}$。如果 $p \neq q$，可得：

$$D_n - qD_{n-1} = p(D_{n-1} - qD_{n-2}) \tag{1-2}$$

或者

$$D_n - pD_{n-1} = q(D_{n-1} - pD_{n-2}) \tag{1-3}$$

递推可得

$$D_n - qD_{n-1} = p^2(D_{n-2} - qD_{n-3}) = \cdots = p^{n-2}(D_2 - qD_1) \tag{1-4}$$

或者

$$D_n - pD_{n-1} = q^2(D_{n-2} - pD_{n-3}) = \cdots = q^{n-2}(D_2 - pD_1) \tag{1-5}$$

算出 D_1 和 D_2，视 D_n 和 D_{n-1} 为未知量，联立式(1-4)、式(1-5)，可解得：

$$D_n = \frac{p^{n-1}(D_2 - qD_1) - q^{n-1}(D_2 - pD_1)}{p - q} \tag{1-6}$$

如果 $p = q$，则式(**1-1**)可写成：

$$D_n - pD_{n-1} = p(D_{n-1} - pD_{n-2}) \tag{1-7}$$

与上面的方法相同，可递推得：

$$D_n - pD_{n-1} = p^2(D_{n-2} - pD_{n-3}) = \cdots = p^{n-2}(D_2 - pD_1) \tag{1-8}$$

注意到数 $D_2 - pD_1$ 与 n 无关，记为 C，由式(1-8)递推可得：

$$D_n = pD_{n-1} + p^{n-2}C = p(pD_{n-2} + p^{n-3}C) + p^{n-2}C =$$

$$p^2 D_{n-2} + 2p^{n-2}C = p^2(pD_{n-3} + p^{n-4}C) + 2p^{n-2}C =$$

$$p^3 D_{n-3} + 3p^{n-2}C = \cdots = p^{n-1}D_1 + (n-1)p^{n-2}C \tag{1-9}$$

上面我们针对四种可能出现的情况推得了行列式 D_n 的计算结果，下面看例题。

例 10 计算行列式：$D_n=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$

解 先按第一行展开，再对第二个行列式按第一列展开，得：

$$D_n = 2D_{n-1}-(-1)^3\begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1}+(-1)D_{n-2} \quad (1\text{-}10)$$

与式(1-1)比较，这里 $\alpha=2,\beta=-1$；方程 $x^2-\alpha x-\beta=x^2-2x+1=0$ 的两个根为 $p=q=1$；因为 $p=q$，又 $D_1=2,D_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3,C=D_2-pD_1=1$，代入式(1-9)可得：

$$D_n = p^{n-1}D_1+(n-1)p^{n-2}C = 2+(n-1) = n+1 \text{ 为所求。}$$

此例比较简单，可另解为：

因为 $D_1=2,D_2=3$，故由式(1-10)可得 $D_3=2D_2-D_1=2\times3-2=4$，用数学归纳法，设 $D_k=k+1$，则

$$D_{k+1} = 2D_k-D_{k-1} = 2(k+1)-k = k+2 = (k+1)+1$$

所以 $$D_n = 2D_{n-1}-D_{n-2} = 2n-(n-1) = n+1$$

方法 6 利用一些已知结论。

常用结论有：①范德蒙行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$

② $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

例 11　计算行列式：$D_n=\begin{vmatrix} \lambda & a & a & \cdots & a & a \\ b & s & t & \cdots & t & t \\ b & t & s & \cdots & t & t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & t & t & \cdots & s & t \\ b & t & t & \cdots & t & s \end{vmatrix}$

解　此题不可能直接用方法六。我们先根据此行列式的特点，以第二行为基础行，将其它各行尽量多的元素化成零，然后再用方法六中的结论②。

$$D_n \xlongequal[i=3,4,\cdots,n]{r_i-r_2} \begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \cdots & a \\ b & s & t & t & \cdots & t \\ 0 & t-s & s-t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t-s & 0 & s-t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & t-s & 0 & 0 & \cdots & s-t \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2+(c_3+\cdots+c_n)} \begin{vmatrix} \lambda & (n-1)a & a & a & \cdots & a \\ b & s+(n-2)t & t & t & \cdots & t \\ 0 & 0 & s-t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s-t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & s-t \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & (n-1)a \\ b & s+(n-2)t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s-t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s-t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s-t \end{vmatrix} =$$

$$[\lambda s+(n-2)\lambda t-(n-1)ab](s-t)^{n-2}$$

方法 7　扩充法。

所谓扩充法是在待求行列式的基础上，扩充出一个与之有关系的更高阶行列式，以求完成计算任务。

例 12　计算行列式　$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$

解　计算此行列式，可将各列加到第一列上，然后从第一列中提出公因子，很易化成上三角形行列式。可用扩充法，即构造出一个与 D_n 有关系的新的 $n+1$ 阶行列式 A_{n+1}，然后进行计算。这里构造的 A_{n+1} 以及其与 D_n 的关系是：

$$A_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}=D_n$$

又 $$A_{n+1}\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{r_i+(-1)r_1}\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+(c_2+\cdots c_{n+1})}\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}=1+\sum_{i=1}^{n}a_i$$

所以 $$D_n=1+\sum_{i=1}^{n}a_i$$

例 13 计算行列式：$D_4=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4\end{vmatrix}$

解 这个行列式与方法六中的范德蒙行列式相比较，很像，但又不是。为了能够利用范德蒙行列式的结论，下面采用扩充法构造新行列式：$A_5=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d & x\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2\\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3\\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4\end{vmatrix}$

一方面，这是一个范德蒙行列式，由已知结论，

$$A_5=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a) \tag{1-11}$$

另一方面，将其按第五列展开，有

$$A_5=M_{15}-xM_{25}+x^2M_{35}-x^3M_{45}+x^4M_{55} \tag{1-12}$$

A_5 与待求行列式 D_4 的关系是：$M_{45}=D_4$，而式(1-12)中$(-M_{45})$又是 x^3 的系数，在式(1-11)中求出 x^3 的系数为：$(-a-b-c-d)(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)$，所以 $D_4=(a+b+c+d)(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)$。

三、克莱姆法则

1. 对于方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$,若系数行列式 $D\neq 0$,则有唯一解。

$x_i=D_i/D$,其中 $D_i(i=1,2,\cdots,n)$是 D 中第 i 列用方程组右端的自由项代替所得到的 n 阶行列式。

2. 对于齐次方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$,若系数行列式 $D\neq 0$,则仅有零解。

例 14 设齐次方程组$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$只有零解,则 λ 满足条件__________。

解 由已知条件系数行列式 $D\neq 0$,即 $D=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2\neq 0$,故 $\lambda\neq 1$。

课堂练习题 1

1. 试确定下列排列的奇偶性：

(1)196325478　　(2)$n(n-1)\cdots 321$

2. 写出 4 阶行列式　$D_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$中含 $a_{13}a_{21}$的项。

3. 计算行列式:(1)$A_4=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$　(2)$B_4=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

4. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$

5. 已知 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 2t \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-1$,求 $D=\begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 & t+1 \\ 0 & -2 & -b & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

6. 求 $n+1$ 阶行列式 $D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$,其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$。

参 考 题 1

1. 计算行列式:

(1)$C_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (2)$D_4=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

2. 已知 $f(x)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & x^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & x^3 \end{vmatrix}$,其中 a_1,a_2,a_3 各不相同,求 $f(x)=0$ 的全部根。

3. 解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix}=0$

4. 证明行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=(a+b+c)(c-a)(c-b)(b-a)$