高等学校试用教材

高等数学讲义

下册

南开大学

史瑞鳌 眭洁 孙澈 编

高等教育出版社

高等学校试用教材

高等数学讲义

下册

南开大学

史瑞鳌 眭洁 孙澈 编

内容提要

本书系参照原教育部审订的《综合大学物理专业高等数学教学大纲》编写的.

全书分上、下两册. 上册包括函数与极限,微分学及其应用, 不定积分,定积分及其应用,微分方程初步;下册包括无穷级数,空间解析几何, 多元函数微分学,重积分,曲线积分和曲面积分,场论初步,广义积分和含参变量积分及傅里叶分析等.

本书可以作为综合大学,高等师范院校物理、电子、计算机与系统科学等专业的教材,也可作为其它理工科专业的参考书和自学者用书.

高等学校试用教材

高等数学讲义

下 册

南 开 大 学

史瑞鳌 眭洁 孙澈 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

二二〇七工厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 14 字数 330 000

1989 年 5 月第 1 版 1989 年 8 月第 1 次印刷

印数 0001—3 220

ISBN7-04-002016-5/O·729

定价 3.20 元

目　　录

第八章　无穷级数……………………………………………1

§1　数项级数…………………………………………1

1.1　数项级数的收敛性和基本性质……………………1

1.2　正项级数敛散性的判别……………………………6

1.3　任意项级数…………………………………………17

1.4　收敛级数的性质……………………………………26

习题………………………………………………………32

§2　函数项级数………………………………………35

2.1　函数项级数的收敛和一致收敛……………………35

2.2　一致收敛性判别法…………………………………40

2.3　和函数的分析性质…………………………………44

习题………………………………………………………50

§3　幂级数……………………………………………52

3.1　幂级数的敛散性和收敛半径………………………52

3.2　幂级数的分析性质…………………………………56

3.3　幂级数的运算………………………………………60

3.4　函数的幂级数展开…………………………………61

3.5　幂级数在近似计算中的应用………………………69

习题………………………………………………………75

第九章　矢量代数与空间解析几何……………………78

§1　空间直角坐标系…………………………………78

1.1　空间直角坐标系……………………………………78

1.2　两点间的距离………………………………………80

1.3　有向线段与定比分割………………………………81

习题………………………………………………………84

§2　矢量代数…………………………………………84

2.1　矢量的概念…………………………………………84

2.2 矢量的线性运算……………………………………86
2.3 矢量的坐标表示法…………………………………88
2.4 矢量的数积…………………………………………94
2.5 矢量的矢量积………………………………………96
2.6 矢量的混合积………………………………………100
习题……………………………………………………102
§3 空间平面……………………………………………104
3.1 平面的一般方程……………………………………104
3.2 平面的法式方程. 点到平面的距离………………107
3.3 两平面之间的位置关系……………………………110
习题……………………………………………………112
§4 空间直线……………………………………………113
4.1 直线方程的一般形式………………………………113
4.2 直线的参数方程和标准方程………………………113
4.3 点到直线的距离……………………………………116
4.4 两直线的位置关系…………………………………117
习题……………………………………………………119
§5 空间曲面与曲线……………………………………120
5.1 曲面方程的建立……………………………………120
5.2 由方程研究曲面……………………………………124
5.3 空间曲线……………………………………………131
习题……………………………………………………133
第十章 多元函数微分学……………………………135
§1 多元函数. 极限与连续……………………………135
1.1 R^n空间……………………………………………135
1.2 多元函数……………………………………………137
1.3 函数的极限…………………………………………138
1.4 函数的连续性………………………………………141
1.5 多元向量值函数……………………………………142
习题……………………………………………………144
§2 偏导数和全微分……………………………………146

2.1 函数的偏导数……146
2.2 函数的全微分……149
2.3 复合函数的偏导数和全微分……152
习题……155
§3 高阶偏导数和高阶全微分. 多元泰勒公式……156
3.1 高阶偏导数……156
3.2 高阶全微分……159
3.3 多元函数的泰勒公式……160
习题……162
§4 隐函数及其微分法……163
4.1 隐函数存在定理……165
4.2 函数的雅可比(Jacobi)式……168
4.3 方程组的隐函数存在定理……170
习题……173
§5 微分学在几何上的应用……174
5.1 空间曲线的切线和法平面……174
5.2 曲面的切平面和法线……176
习题……178
§6 多元函数的极值……179
6.1 极值的必要条件……179
6.2 极值的充分条件……183
6.3 条件极值……186
习题……190
第十一章 重积分……192
§1 重积分的概念和性质……192
1.1 重积分的概念……192
1.2 重积分的性质……196
习题……197
§2 重积分在直角坐标系下的计算……198
2.1 在直角坐标系下二重积分的计算……198
2.2 在直角坐标系下三重积分的计算……204

习题……………………………………………………………………208
§3 重积分的换元法……………………………………………………210
3.1 重积分的换元公式………………………………………………210
3.2 极坐标系下二重积分的计算……………………………………213
3.3 柱坐标系下三重积分的计算……………………………………217
3.4 球坐标系下三重积分的计算……………………………………220
习题……………………………………………………………………223
§4 重积分的应用…………………………………………………224
4.1 曲面面积的计算…………………………………………………224
4.2 重积分在物理上的某些应用……………………………………228
习题……………………………………………………………………232
第十二章 曲线积分与曲面积分……………………………………234
§1 曲线积分……………………………………………………………234
1.1 第一类曲线积分的定义和性质…………………………………234
1.2 第一类曲线积分的计算…………………………………………235
1.3 第二类曲线积分的定义和性质…………………………………238
1.4 第二类曲线积分的计算…………………………………………240
1.5 两类曲线积分的联系……………………………………………242
习题……………………………………………………………………244
§2 曲面积分……………………………………………………………245
2.1 第一类曲面积分的定义…………………………………………245
2.2 第一类曲面积分的计算…………………………………………246
2.3 第二类曲面积分的定义…………………………………………250
2.4 第二类曲面积分的计算…………………………………………255
习题……………………………………………………………………258
§3 三个积分公式………………………………………………………259
3.1 格林公式…………………………………………………………260
3.2 斯托克斯公式……………………………………………………264
3.3 高斯公式…………………………………………………………267
习题……………………………………………………………………272

第十三章　场论初步……………………………………………275
§1　数量场的方向导数和梯度……………………………………275
1.1　数量场的等位面……………………………………………275
1.2　方向导数……………………………………………………276
1.3　梯度…………………………………………………………278
习题……………………………………………………………………281
§2　向量场的通量与散度…………………………………………281
2.1　向量场的通量………………………………………………281
2.2　散度…………………………………………………………283
习题……………………………………………………………………286
§3　向量场的环量与旋度…………………………………………286
3.1　向量场的环量………………………………………………286
习题……………………………………………………………………289
§4　有势场和无源场………………………………………………290
4.1　有势场与势函数……………………………………………290
4.2　无源场与向量势……………………………………………297
习题……………………………………………………………………300
*§5　正交曲线坐标系………………………………………………301
5.1　空间曲线坐标系……………………………………………301
5.2　曲线坐标系的坐标向量……………………………………303
5.3　正交曲线坐标系的弧长、面积和体积元…………………304
5.4　正交曲线坐标系中的梯度、散度与旋度公式……………305
第十四章　广义积分……………………………………………310
§1　无穷限积分的收敛判别法……………………………………310
1.1　柯西收敛准则和绝对收敛积分……………………………310
1.2　无穷限积分和无穷级数的联系……………………………311
1.3　绝对收敛的判别法…………………………………………312
1.4　阿贝尔判别法和狄利克雷判别法…………………………314
习题……………………………………………………………………320
§2　无界函数的积分（瑕积分）…………………………………321
习题……………………………………………………………………325

§3 广义重积分大意……326
3.1 无界区域上的二重积分……326
3.2 无界函数的二重积分……329
习题……333
第十五章 含参变量的积分……335
§1 含参变量的常义积分……335
习题……340
§2 含参变量的广义积分……341
2.1 含参变量广义积分的一致收敛性……341
2.2 一致收敛积分的性质……345
习题……351
§3 尤拉积分……353
3.1 $\Gamma(s)$的简单性质……353
3.2 $\mathrm{B}(p,q)$的简单性质……354
习题……357
第十六章 傅里叶(Fourier)分析……358
§1 周期函数的傅里叶级数……358
1.1 三角级数……358
1.2 周期函数的傅里叶级数……360
1.3 傅里叶级数的复数形式……368
1.4 巴什瓦尔(Parseval)不等式和平方平均收敛……369
习题……372
*§2 广义傅里叶级数……373
2.1 正交函数系……373
2.2 广义傅里叶级数……376
2.3 巴什瓦尔不等式和平方平均收敛……377
§3 傅里叶变换……378
3.1 傅里叶积分……378
3.2 傅里叶变换的概念……381
3.3 傅里叶变换的性质……387
3.4 傅里叶变换简表……394

习题……397
附录 欧氏空间的微分形式……400
§1 线性空间和欧氏空间……400
1.1 线性空间的定义……400
1.2 线性空间的维数、基与坐标……401
1.3 欧氏空间……403
1.4 同构……404
§2 斜对称多重线性形式……405
2.1 线性形式……405
2.2 多重线性形式……407
2.3 斜对称多重线性形式……409
2.4 外乘积……410
2.5 $\Lambda^k[V^*]$空间的基……411
§3 微分形式……412
3.1 切空间 T_x……412
3.2 余切空间 T_x^*……415
3.3 $\Lambda^k(T_x^*)$ 空间……417
3.4 微分 k-形式……418
3.5 外微分……418
3.6 闭微分形式和恰当微分形式……421
§4 微分映射……424
4.1 微分映射的定义……424
4.2 微分映射的性质……425
§5 微分形式的积分．斯托克斯公式……428
5.1 微分形式的积分……428
5.2 边界上的积分……432
5.3 斯托克斯公式……434

第八章 无 穷 级 数

§1 数 项 级 数

1.1 数项级数的收敛性和基本性质

设$\{u_n\}$为给定数列. 形式和

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1.1}$$

称为由数列$\{u_n\}$构成的**无穷级数**，简称为**级数**，记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, u_n称为级数的**通项**. 因(1.1)式的每一项$u_k(k=1,2,\cdots)$皆为常数，故(1.1)式又称为**数项级数**.

例如,级数 $1-1+1-1+\cdots$,其通项$u_n=(-1)^{n+1}$，这个级数可表示为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$；级数$\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\cdots$，其通项为$u_n=\frac{n}{n^2+1}$, 该级数可表示为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$.

为了说明形式和(1.1)的确切含义,我们给出级数收敛与发散的定义.

对给定的级数(1.1),即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,令

$S_1=u_1$, $S_2=u_1+u_2,\cdots$, $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,\cdots$,称$S_n$为级数(1.1)的$n$**项部分和**,简称为**部分和**.

定义 设S_n为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和，如果数列$\{S_n\}$存在极

限 S，即

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}u_i=S,$$

则称级数(1.1)收敛，且称它的和为 S，记为

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S.$$

若级数(1.1)的部分和数列$\{S_n\}$没有极限，则称级数(1.1)发散.

因此，级数(1.1)的敛散性可由其部分和数列$\{S_n\}$有无极限来判定. 反之，对于已给数列$\{a_n\}$，令

$$u_1=a_1,u_2=a_2-a_1,u_3=a_3-a_2,\cdots,u_n=a_n-a_{n-1},\cdots,$$

则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的 n 项部分和恰好是数列$\{a_n\}$的第 n 项 a_n. 因此级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与数列$\{a_n\}$有相同的敛散性. 并且当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛于$S$时，则$S$也是$\{a_n\}$的极限.

例 1.1 讨论几何级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}(a\neq0)$的敛散性.

解 当 $r\neq1$ 时，$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}ar^{i-1}=\dfrac{a-ar^n}{1-r}=\dfrac{a}{1-r}(1-r^n)$. 如果 $|r|<1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a}{1-r}$，故级数收敛，其和为$\dfrac{a}{1-r}$；如果$|r|>1$，$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=\infty$，数列$\{S_n\}$发散，故级数发散.

当 $r=1$ 时，$S_n=na$，数列$\{S_n\}$发散，级数也发散.

当 $r=-1$ 时

$$S_n=a-a+a-\cdots+(-1)^{n-1}a=\begin{cases}a, & n\text{ 为奇数},\\ 0, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在，级数也发散.

综上所述，几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$，当 $|r|<1$ 时收敛，当 $|r|\geqslant 1$ 时发散.

例 1.2 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$ 收敛.

证明 该级数的部分和

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{i+2}-2\sqrt{i+1}+\sqrt{i})\\&=\sum_{i=1}^{n}[(\sqrt{i+2}-\sqrt{i+1})-(\sqrt{i+1}-\sqrt{i})]\\&=1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}.\end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1-\sqrt{2}$，故级数收敛，且其和为 $1-\sqrt{2}$.

由于级数的敛散性等价于其部分和数列的敛散性，所以我们不难从数列的柯西收敛准则推出级数的柯西收敛准则.

定理 1.1（柯西收敛准则） 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件是：对任给的 $\varepsilon>0$，总存在自然数 N，使得当 $n>N$ 时，对任意自然数 m，有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+m}|<\varepsilon.$$

例 1.3 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

证明 对任意自然数 m、n

$$
\begin{aligned}
&|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+m}|\\
&=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+m}\\
&>\frac{1}{n+m}+\frac{1}{n+m}+\cdots+\frac{1}{n+m}\\
&=\frac{m}{n+m}.
\end{aligned}
$$

特别取 $m=n$，得

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+m}|>\frac{1}{2}.$$

由柯西收敛准则，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

例 1.4 试证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收敛.

证明 对任意自然数 m，有

$$
\begin{aligned}
&|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+m}|\\
&=\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+(-1)^{n+m+1}\frac{1}{n+m}\right|. \qquad (*)
\end{aligned}
$$

当 m 为奇数时，由 (*) 式得

$$\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{n+m-1}-\frac{1}{n+m}\right)<\frac{1}{n+1};$$

当 m 为偶数时，由 (*) 式得

$$\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{n+m-2}-\frac{1}{n+m-1}\right)$$

$$-\frac{1}{n+m}<\frac{1}{n+1}.$$

因此，对任何 $\varepsilon>0$，只需取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于一切

自然数m，皆有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+m}|<\frac{1}{n+1}<\varepsilon.$$

由柯西收敛准则，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$收敛.

从定义或柯西收敛准则，不难证明收敛级数具有下列基本性质：

1° 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，a为任一常数，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}au_n$也收敛，且$\sum_{n=1}^{\infty}au_n=a\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

2° 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$及$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$皆收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$也收敛，且$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}v_n$.

3° 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则在不改变级数各项顺序的条件下，对其任意项添加括号所组成的级数仍收敛，且和不变.

注意结论3°之逆不成立. 即：如果加括号后的级数收敛，不能断定原来的级数也收敛. 例如$(1-1)+(1-1)+\cdots$收敛于零，而原来未加括号的级数$1-1+1-1\cdots$是发散的. 但是，如果加括号后的级数收敛且满足这样的条件：在同一括号内的各项同为非负，或同为非正，则未加括号的级数也收敛，且和相同(见习题4).

4° 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

注意$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$是级数收敛的必要条件，不是充分条件. 例如级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，然而它是发散的.

5° 对级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$去掉或增加有限项不影响级数的敛散性.

1.2 正项级数敛散性的判别

各项都是非负的级数称为**正项级数**. 正项级数是级数中最简单也是最基本的一类，它是讨论一般级数的基础.

1. 基本定理和比较准则

定理 1.2 (正项级数收敛的基本定理) 正项级数收敛的充要条件是它的部分和数列有界.

证明 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和数列为$\{S_n\}$. 因$u_n\geqslant 0$，故$\{S_n\}$是单调增加的数列. 所以$\{S_n\}$收敛的充要条件是$\{S_n\}$有界.

定理 1.3(正项级数的比较准则) 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都是正项级数. 若从某项开始，满足$u_n\leqslant v_n$，则

(i) 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，那么级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛;

(ii) 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，那么级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$也发散.

证明 由于级数的敛散性与其前面的有限项无关，所以不妨假设对所有自然数n成立$u_n\leqslant v_n$.

记 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i$，$T_n=\sum\limits_{i=1}^{n}v_i$. 因为$u_n\leqslant v_n$，可知$S_n\leqslant T_n(n=1,$

$2,\cdots)$.

如果$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\{T_n\}$有上界，因而$\{S_n\}$也有上界，故$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

如果$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\{S_n\}$无上界，因而$\{T_n\}$也无上界，故$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

推论（比较准则的极限形式）　设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$均为正项级数，且$v_n>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k$. 那么

(i)　当$0<k<+\infty$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$同时收敛或同时发散；

(ii)　当$k=0$时，如果$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛；

(iii)　当$k=+\infty$时，如果$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也发散.

证明　(i) 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k>0$.

根据极限定义，对$\varepsilon_0=\frac{k}{2}$，存在自然数$N$，当$n>N$时，有$\left|\frac{u_n}{v_n}-k\right|<\frac{k}{2}$，即

$$\frac{k}{2}=k-\frac{k}{2}<\frac{u_n}{v_n}<k+\frac{k}{2}=\frac{3}{2}k.$$

因此，当$n>N$时，$\frac{k}{2}v_n<u_n<\frac{3}{2}kv_n$. 由比较准则，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$