

测量误差及数据处理

张世箕 编著

科学出版社

测量误差及数据处理

张世箕 编著

科学出版社

内 容 简 介

本书介绍了有关测量误差及数据处理的一些基本概念和理论,讨论了电子测量和计量检定中的误差问题及数据处理方法,还着重研究了非正态分布误差以及误差总合的问题。

本书可供从事电子测量工作的工程技术人员和大专院校有关专业师生参考,也可供从事其它测量工作的人员参考。

测量误差及数据处理

张世箕 编著

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

湖南省新华印刷一厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1979年7月第一版 开本: 787×1092 1/32

1979年7月第一次印刷 印张: 10 5/8

印数: 0001—42,400 字数: 239,000

统一书号: 15031·222

本社书号: 1347·15—7

定 价: 1.10元

序

测量是人类认识物质世界和改造物质世界的重要手段之一。通过测量,人们对客观事物获得了数量上的概念,做到了“胸中有数”,从对客观事物所作的大量观测结果中,总结出一般的规律,建立起各种定理和定律。测量可以说是用来打开自然科学中“未知”宝库的一把钥匙。甚至有人说:“没有测量,就没有科学。”

测量技术的水平,测量结果的可靠性,测量工作的价值,全在于其精确度,也就是在于测量误差的大小。测量的精确度不仅对工程技术和工业产品的质量起着监督和保证的作用,而且往往还是工程成败、产品优废的一项决定性因素。测量精确度的提高以及对测量误差的深入研究,往往也成为重大的科学新发现和带根本性的技术革新的前导。今天,对于一个国家的科学技术和现代化生产来说,测量技术水平是衡量其进步程度的重要标志之一。

这就不难理解为什么测量误差的问题一直受到人们的极大重视,并且很早就吸引了诸如高斯、拉普拉斯这样一些卓越数学家从事这方面的工作。现在,有关测量误差的文献典籍,可谓汗牛充栋,不可胜数。在许多开展较早的测量分支(如天文测量、大地测量等)中,无论在理论或实践上都积累了极其丰富的成果和经验。然而在较后兴起的电子测量这一测量学分支中,却有其特殊的处境和问题。现有的一些较为流行的有关测量误差的著作,例如序文末尾所列的文献[1~12],无疑是有很大参考价值的,但仍然远远不能满足电子测量实际

工作的需要。

电子测量的精确度一般比其他测量的精确度高得多，任何影响量或影响特性本身的微小变化往往都可能对测量结果产生不可忽视的影响。另一方面，电子测量仪器以及被测电子设备内部所包含的元、器件数目往往多得惊人，而这些元、器件对外界影响也常常相当敏感。这样，就使得电子测量中的误差因素特别繁多而且复杂，在测量中经常会遇到很多带有随机性的系统误差，而这类误差的概率分布又多是非正态的。同时，由于电子测量仪器和电子设备生产的批量一般不大，使人难以掌握这类误差的确切分布律。这就更加重了问题的复杂性及其解决的困难程度。

从电子测量实践中提出的许多问题，其中有相当大的一部分是目前还无法解决的，有些则离最终解决还很远。本书并不奢望能够解决这些问题，只不过是对已有书籍作一些必要的补充，同时也讲述一些尚未解决的重大问题，希望能借以引起读者的注意。

在第一章中，概略地介绍了有关的基本概念，这对大多数读者来说，可能都是很熟悉的。其中某些重要概念，如有关置信的问题等，在以后的有关章节中还要进一步详细论述。在本章中还强调了系统误差与随机误差之间的辩证关系，这对测量数据的处理是不无裨益的。

第二、三两章中关于随机误差和系统误差的基本理论和处理方法，也是不少读者所熟悉的。这里还补充介绍了一些简捷的非高效估计方法，以及对可疑数据的统计检验方法。

第四章的内容可能是比较新颖的。这里讨论了非正态分布的一些情况，特别是均匀分布和离散分布，这在处理系统误差以及在误差总合的问题中是会经常遇到的。

第五章介绍基本的统计检验方法。

第六章阐述误差总合的一般性问题，特别是对若干基本概念作了一些讨论。第七至九章则探讨了误差总合的一些具体问题，以及计算和估计方法。

第十章讨论了计量检定中的若干问题，这些问题都属于误差总合实际应用的一个方面。

第十一章阐述了最似然方法的基础，并由此导出最小二乘原理。然后在此基础上说明对非等精度测量的处理。至于最小二乘法，则着重于直线、曲线和圆图的拟合。

最后第十二章是关于测量结果的一般图解处理方法，包括所谓半精密和精密测量法中的图解和计算处理方法。

书中只对若干基本公式给予了扼要的证明，对于大部分公式，则由于其证明极为烦冗，而予以从略了。有兴趣的读者，可查考有关的概率统计学专著（例如序文末尾的参考文献[13~19]），或各章节内脚注所列举的原始文献。

书中各章节中还有一些例题，是为了帮助读者加深对有关正文的理解而编写的。所举之例力图简单扼要。

本书是以作者二十几年来在高等学校及各种短期训练班中的讲稿整理而成的，其中也包含了成都电讯工程学院103教研室及其他单位许多同志的宝贵意见和经验，于此一并致谢。鉴于本书所涉及问题的复杂性，同时也限于作者个人的实际经验与理论水平，疏漏谬误之处在所难免，敬祈读者惠予指正。

编著者

1977.7.15.

参 考 文 献

- 【1】 张启人：测定值计算基础，科学出版社，1959。
- 【2】 冯师颜：误差理论与实验数据处理，科学出版社，1964。

- [3] 张叔涵: 测量误差理论, 中国工业出版社, 1966.
- [4] М. Ф. Маликов: Основы Метрологии, Изд. Коммерприбора, Москва, 1949.
- [5] E. Wiggaker: The Calculations of Observations, Blackie & Son, London, 1st ed., 1944; 4th ed., 1958.
- [6] Y. Beers: Introduction to the Theory of Error, Addison-Wesley Publ. Co., 1956.
- [7] W. M. Smart: Combination of Observations, Cambridge Univ. Press, 1958.
- [8] К. П. Яковлев: Математическая обработка результатов измерений. Гостехиздат, 2-ое изд., 1953.
- [9] Б. М. Шиголов: Математическая обработка наблюдений, Физматгиз, 1960, 1962.
- [10] J. Mandel: The Statistical Analysis of Experimental Data, Interscience Publishers, John Wiley & Sons, 1964.
- [11] L. Jánosy: Theory and Practice of the Evaluation of Measurements, Oxford, Clarendon Press, 1965.
- [12] C. F. Dietrich: Uncertainty, Calibration and Probability, Adam Hilger, London, 1973.
- [13] Б. В. 格涅坚科: 概率论教程, 高等教育出版社, 1956.
- [14] Е. С. 温特切勒: 概率论, 上海科学技术出版社, 1961.
- [15] А. А. 史威斯尼阿夫等: 概率论题解指南, 上海科学技术出版社, 1965.
- [16] Н. 克拉美: 统计学数学方法, 上海科学技术出版社, 1966.
- [17] М. 费史: 概率论及数理统计, 上海科学技术出版社, 1962.
- [18] 王梓坤: 概率论基础及其应用, 科学出版社, 1976.
- [19] L. G. Parratt; Probability and Experimental Errors in Science, John Wiley & Sons, 1961.

目 录

第一章 一些有关的基本概念	1
1.1 测量	1
1.2 标准	1
1.3 误差与改正量	2
1.4 误差的分类	3
1.5 系统误差	7
1.6 随机误差	8
1.7 随机误差与系统误差的辩证关系	10
1.8 不确定度	11
1.9 置信限与置信概率	12
第二章 随机误差	13
2.1 随机误差的性质和特点, 正态分布	13
2.2 标准偏差与误差函数	15
2.3 算术平均与标准误差	19
2.4 标准偏差的估计	21
2.5 标准偏差估计的精密度	24
2.6 标准偏差的另一些估计	26
2.7 非高效估计	30
2.8 测量灵敏阈对标准偏差估值的影响	36
2.9 测量结果的置信度	37
2.10 标准偏差的置信度	40
2.11 可疑数据的剔除	42
第三章 系统误差	47
3.1 系统误差的性质和特点及其一般处理原则	47
3.2 消除或减弱系统误差的典型测量技术	48

3.3	误差消除的准则	57
3.4	系统误差的改正	59
3.5	系统误差存在与否的检验	60
第四章	非正态分布	69
4.1	非正态分布的现实意义	69
4.2	一些常见的非正态分布	72
4.3	离散型分布	79
4.4	均匀分布	82
4.5	均匀分布与正态分布的组合	93
4.6	离散分布与正态分布的组合	97
4.7	均匀分布中的置信问题	99
4.8	一般非正态分布中的置信问题	103
第五章	统计检验	110
5.1	统计检验的意义	110
5.2	统计直方图	111
5.3	统计概率分布图	114
5.4	平均值的一致性, t 检验	117
5.5	标准偏差的一致性, F 检验	121
5.6	假设分布的适度, χ^2 检验	122
5.7	分布的一致性, $D_{\max}$ 检验	125
第六章	误差的总合	128
6.1	误差的总合问题	128
6.2	确定性误差的总合	129
6.3	随机误差的总合	131
6.4	非线性效应	133
6.5	系统误差与随机误差的总合效应	135
6.6	精密度、准确度和精确度	139
6.7	不确定度	142
第七章	单项可测不确定度的计算	144
7.1	容许限与容许概率	144

7.2	不提置信概率时单次测量结果的不确定度	147
7.3	在明确置信概率时单次测量结果的不确定度	151
7.4	算术平均及标准偏差的不确定度	157
第八章	单项不确定度及方差的估计	162
8.1	估计的不确定度	162
8.2	置信因数的估计	163
8.3	置信概率的估计	163
8.4	在未知分布时的估计	165
第九章	不确定度的总合	168
9.1	不确定度总合的必要及其困难	168
9.2	正态分布的不确定度的总合	169
9.3	均匀分布的不确定度的总合	172
9.4	按高斯方式进行总合	175
9.5	离散分布的不确定度的总合	176
9.6	分布的假设	177
9.7	总的不确定度的估计	182
第十章	计量检定中的若干问题	186
10.1	电子仪器的计量检定	186
10.2	检定的可靠性	187
10.3	标准器误差的影响	193
10.4	标准器不确定度的处理, $(e-n)$ 和 $(e+m)$ 原则	197
10.5	非正态分布误差的情况	202
10.6	多阶检定中误差的传播	207
10.7	最佳精确度比值的考虑	213
10.8	关于检定阶数的考虑	219
第十一章	最小二乘法	223
11.1	最似然方法	223
11.2	最似然估计的精密密度	226
11.3	最小二乘法	227
11.4	非等精度测量, 加权平均	229

11.5	正规方程	233
11.6	直线的拟合	238
11.7	直线拟合的置信度	245
11.8	x 和 y 都有误差时的直线拟合	253
11.9	曲线的拟合	257
11.10	用波节位移法测量弱反射时的曲线拟合	265
11.11	双口网络数据圆的拟合	274
第十二章	图解法	284
12.1	测量结果的图解处理	284
12.2	分组平均法	292
12.3	直线的改正	298
12.4	波节位移法测量中的图解及改正	301
12.5	数据圆的改正	307
附录表 1	误差函数表, 正态分布密度	310
附录表 2	t 分布数表	314
附录表 3	χ^2 分布数表	316
附录表 4	标准偏差的置信限	318
附录表 4a	标准偏差的置信概率	320
附录表 5	F 分布数表	322
附录表 6	$D_{\max}$ 适度检验	326
附录表 6a	$D_{\max}$ 一致性检验	327

第一章 一些有关的基本概念

1.1 测 量

测量是人类认识和改造客观世界的一种必不可少的重要手段。从广泛的意义上说,测量就是对客观事物取得定量的情报,即是对事物的某种特性获得数字的表征。从计量学的意义上说,测量就是拿待测之量直接或间接地与另一个同类的已知量相比较,把这个已知量作为计量单位,定出被测量之是该单位的若干倍或几分之几。换句话说,即是求出被测之量与计量单位的比值。

1.2 标 准

从上述可见,测量总得有一个标准作参考,以便拿被测之量去同这个参考标准作比较。这样的参考标准,一般可以有三种类型:

(1) 真值 A_0

真值 A_0 或者叫做理论值或定义值。例如,可取真空中光速作为速度的计量标准。又如,可用理论安培作为电流的计量标准,其定义为:若在真空中有二根截面无限小的相距 2 米的无限长平行导体,在其上流过 1 安的恒定电流时,则在二导体间产生 10^{-7} 牛顿/米的相互作用力。

这样的参考标准实际上是不存在的,它只存在于纯理论之中。这样的真值是不可知的。你要知道它,就必须测量它;

而测量它又需要某种参考作为标准。这样就陷入无穷的循环之中。因此,绝对的真值是不可知的。但是,随着人类认识运动的推移和发展,可以无限地逐渐逼近它。“客观现实世界的变化运动永远没有完结,人们在实践中对于真理的认识也就永远没有完结。”对于真值来说,也是这样。

(2) 指定值 A ,

由于绝对的真值不可知,所以一般由国家设立各种尽可能维持不变的实物基准和标准器,指定以它的数值作为参考标准。例如,以国家计量局的铯射束原子频率标准中,铯原子的基态超精细能级跃迁频率的平均值作为 9,192,631,770 赫。

(3) 实际值 A

由于日常工作仪器(量具)不可能一一都直接与国家标准相比对,所以通常是通过多级计量检定网来进行一系列逐级比对。在每一级的比对中,常以直接上级的标准器的量值 A 当作近似真值,而称之为实际值,亦称为参考值或传递值。

1.3 误差与改正量

测量不可避免地总有误差。这首先表现为,在同一条件下对同一对象进行重复测量,就会得到不同的结果。这是因为无数因素在影响着测量的过程,而且各种影响因素还在经常不断地变化着。其次,被测之量要对仪器施加作用,才能使仪器给出测量结果。这就意味着测量过程必然会改变被测对象的原有状态,因而测量结果并不完全准确地反映被测对象的本来面貌。最后,当测量的精确度和分辨力不断提高时,最终势必观察到电子的无规起伏;于是,在不同瞬间所测量到的结果,也就不尽相同。

总之, 测得之值 x 并非被测之量的真值 A_0 (或实际值 A). x 与 A_0 (或 A) 之差, 就称为误差或绝对误差 Δ_x , 即

$$\Delta_x = x - A_0. \quad (1.3.1)$$

误差值乘以 (-1) , 则称为改正量 c , 即

$$c = -\Delta_x = A_0 - x. \quad (1.3.2)$$

显然

$$A_0 = x + c = x - \Delta_x. \quad (1.3.3)$$

在实际中, 若 Δ_x 小得可以忽略不计, 则认为 x 就等于 A_0 . Δ_x 小到什么程度才认为可以忽略, 这主要取决于测量的目的. 因此, 有人建议不用真值这个词, 而采用目的值这个术语.

顺便说明一点, 中华人民共和国第四机械工业部颁布的标准 SJ-943-75 «电子测量仪器误差的一般规定(暂行)» 以及国际电工委员会 IEC 359 号公告中, 对绝对误差还有一个附加定义: 供给量仪器的绝对误差是供给量的真实值减去其标称值、指示值或预置数值. 亦即

$$\Delta_x = A'_0 - x'. \quad (1.3.4)$$

这个附加定义与基本定义 (1.3.1) 并不矛盾. 因为在使用中一般把供给量仪器 (例如信号发生器) 输出的标称值 (或指示值, 或预置值) x' 作为参考, 即认为是准确无误的值, 亦即作为真值 A_0 . 仪器的实际输出值 A'_0 其实是有误差的. 若用一个误差小得可以忽略的标准电表测量出其实际输出值为 $A'_0 = x$, 则从电表测量的角度着眼, 供给量的误差为

$$\Delta_x = x - A_0 = A'_0 - x'.$$

1.4 误差的分类

从不同角度出发, 误差可以有各种分类方法.

例如, 可以分为绝对误差和相对误差, 而相对误差则视其

所取的相对参考值(即指定值,如满刻度值 $x_{\max}$, 真值 A_0 , 测得值 x , 等等)而异, 又可以分为

$$\text{额定相对误差} = \frac{\Delta_x}{x_{\max}} \times 100\%, \quad (1.4.1)$$

$$\text{实际相对误差} = \frac{\Delta_x}{A_0} \times 100\%, \quad (1.4.2)$$

$$\text{标称相对误差} = \frac{\Delta_x}{x} \times 100\%. \quad (1.4.3)$$

由于一般有 $\Delta_x \ll x$, $x \simeq A_0$, 故最后二种误差基本上没有区别, 但与额定相对误差值则可能相差颇大. 因为 $x \leq x_{\max}$, 所以

$$\frac{\Delta_x}{A_0} \simeq \frac{\Delta_x}{x} \geq \frac{\Delta_x}{x_{\max}}. \quad (1.4.4)$$

一般电工仪表常按额定相对误差的大小来分级. 但电子仪器则较多以标称相对误差作表征, 或者用一个标称相对误差与一个绝对误差之和来表征, 如 $\pm 0.1\% \pm 2$ 微亨之类.

此外, 电子仪器的误差也可以分为工作误差和固有误差, 还有影响误差以及稳定误差等(见 SJ-943-75). 影响误差是由于影响量而产生的. 所谓影响量是指可能影响仪器工作性能的那些量, 通常来自仪器外部, 如电源电压、环境温度等等. 若仪器的某个工作特性的变化会影响到其另一个工作特性, 则称前者为影响特性. 例如, 信号发生器的频率改变时, 输出电压也会受到影响而随之变化; 对于输出电压, 输出频率就是一个影响特性.

对各影响量指定一定的数值范围, 要求在该范围内仪器的误差不超过一定数值, 这些范围的总体就称为仪器的额定使用范围. 例如, 对 II 类仪器的额定使用范围规定为: 环境温度 -10°C 至 $+40^\circ\text{C}$, 相对湿度 $\leq 80\%$ (40°C 时), 电源电压 $220\text{V} \pm 10\%$, 电源频率 50 赫 $\pm 4\%$, 等等(详见 SJ-944-75). 仪器本身的测量量(示值)或供给量的范围, 称为仪器的额定

范围(即量程)。例如某信号发生器的额定范围为: 输出频率 100 千赫至 30 兆赫, 输出电压 1 微伏至 1 伏, 调幅系数 0 至 100%, 调制频率 20 赫至 20 千赫, 等等。有时, 在额定范围内的一部分规定了误差极限, 而其余部分(一般在范围两端)则不予规定, 那么这个规定了误差的部分范围就称为仪器的有效范围。若不加说明, 则认为有效范围就是额定范围。仪器的额定使用范围以及仪器的有效范围, 总起来称为仪器的额定工作条件。仪器在其额定工作条件下的误差(总误差), 称为仪器的工作误差。

为了便于进行比对和校准, 往往还对各影响量(必要时还对各影响特性)规定一个基准条件, 基准条件的范围比额定使用范围窄得多, 并有公差的要求。SJ-943-75 规定, 在不予特

表 1.4.1 电子测量仪器的基准条件¹⁾

影 响 量	基准数值或范围	公 差
环境温度	20°C	±2°C
相对湿度	45% 至 75%	
大气压强	650 至 800 毫米汞柱	
交流供电电压	220 伏	±2%
交流供电频率	50 赫	±1%
交流供电波形 ²⁾	正 弦 波	失真因子 $\beta=0.05$
直流供电电压	额 定 值	±1%
直流供电电压的纹波	$\frac{\Delta V}{V_0} \leq 0.1\%^{3)}$	
外电磁场干扰	应 避 免	
通风	良 好	
阳光照射	避 免 直 射	
工作位置	按制造厂规定	±1°

1) 影响特性的基准条件就是它的额定值(在各类仪器技术标准中统一规定)。

2) 即交流供电电压波形应保持在 $(1+\beta)A \sin \omega t$ 与 $(1-\beta)A \sin \omega t$ 所形成的包络之内。

3) ΔV 是纹波电压的峰至峰值, V_0 是额定供电电压之值。

别指明时,电子测量仪器的基准条件如表 1.4.1 所列。仪器在基准条件下测定的误差,称为仪器的固有误差。

某一个影响量(在其额定使用范围内)或某一个影响特性(在其有效范围内)取任一值,而其余各影响量和影响特性均处于基准条件下时,所测定的仪器误差,称为影响误差。

在一切条件保持恒定的情况下,仪器的示值或供给量在规定的時間间隔内的变化量(相对值或绝对值)的极限,称为仪器在该時間间隔内的稳定误差。SJ-943-75 所规定的电子测量仪器稳定误差的时间间隔选取值列于表 1.4.2 中。

SJ-943-75 规定,一切电子仪器都应给出工作误差极限。在仪器的额定工作条件以内各影响量及各影响特性的最不利的组合情况下,应仍能滿足工作误差极限值。至于固有误差极限,则可以给出,也可以不给出。一般地说,精确度较高的仪器,最好能给出固有误差极限。当某一个影响量或影响特性改变所引起的影响误差在工作误差中占重要成分时,则也应给出该项影响误差的极限(也可以给出其方程式,图解曲线,或线性方程的系数)。稳定误差可以包含在工作误差极

表 1.4.2 电子测量仪器的稳定误差的时间间隔选取值

15 分钟	10 天
1 小时	30 天
3 小时	3 个月
7 小时	6 个月
24 小时	1 年

限之内而不单独给出,但此时应给出仪器的额定连续工作时间。

最后,按照误差的最基本的性质和特点,可以把误差分为三大类:系统误差,随机误差和差错(疏失误差)。差错是由于测量过程中操作错误而造成的,常表现为巨大的误差。含有