Math. Monthly, Vol. 77, 1970, pp. 182-187.)

假設$\{f_n\}$是 R^1 上單調漸增函數的序列，且對所有x及所有 n，$0\leq f_n(x)\leq 1$，

(a) 試證存在一函數f及序列$\{n_k\}$，使得對所有$x\in R^1$

$$f(x)=\lim_{k\to\infty}f_{nk}(x).$$

〔這樣一個逐點收斂部份列之存在，通常稱爲 Helly 選擇定理(Helly's selection theorem.)〕

(b) 此外，若f是連續，試證在 R^1 上 $f_{nk}\longrightarrow f$ 均勻地。

提示：(i) 某個部份列$\{f_{nk}\}$在所有有理點r上收斂到，譬如說，$f(r)$。(ii)對任意$x\in R^1$，定義 $f(x)$ 爲 $\sup f(r)$，這 sup 是對所有 $x\leq r$ 來取的。(iii) 證明在所有f的連續點x上，$f_{n_i}(x)\longrightarrow f(x)$ （這就是充分用到單調性的地方。）(iv)有一$\{f_{n_i}\}$的部份列在每個f不連續的點上，都收斂，蓋這類點最多是可數。這就證明了(a)。要證明(b)，將你對(iii)的證明適當地修飾一下。

令f爲 R^1 上的連續實值函數，具有下列性質：對每個t，$0\leq f(t)\leq 1$，$f(t+2)=f(t)$ 且

$$f(t)=\begin{cases}0 & \left(0\leq t\leq \frac{1}{3}\right)\\ 1 & \left(\frac{2}{3}\leq t\leq 1\right)\end{cases}$$

取 $\Phi(t)=(x(t),y(t))$，其中

$$x(t)=\sum 2^{-n}f(3^{2n-1}t),\quad y(t)=\sum 2^{-n}f(3^{2n}t).$$

試證Φ是連續，且Φ將$I=[0,1]$映成單位正方形 $I^2\subset R^2$。事實上，證明Φ將 Cantor 集合映成 I^2。

提示：每個 $(x_0,y_0)\epsilon I^2$ 都具有這種型式。

$$x_0=\sum 2^{-n}a_{2n-1},\quad y_0=\sum 2^{-n}a_{2n}.$$

其中的每個 a_i 都是0或1。若

$$t_0=\sum_{i=1}^{\infty}3^{-i-1}(2a_i)$$

試證 $f(3^kt)=a_k$，而因此得出 $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$.

（這個簡單的例是所謂的「塡滿空間的曲線」(Space-filling curve)，歸功於 I. J. Schoenberg, Bull. A. M. S., Vol. 44, 1938, pp. 519.）

假設f是 R^1 上的實值連續函數，當 $n=1,2,3,\cdots\cdots$，$f_n(t)=f(nt)$，且$\{f_n\}$在$[0,1]$上是等連續。你能推出有關f的什麼結論來呢？

假設$\{f_n\}$是緊緻集合K上函數的等連續序列，且$\{f_n\}$在K上是點態收斂。試證$\{f_n\}$在K上是均勻收斂。

試對映至任意度量空間的映射，定義均勻收斂及等連續的觀念。並證明定理 7.9 及 7.12 對映至任意度量空間的映射皆成立，定理 7.8 及 7.11 對映至任意完備度量空間的映射皆成立，定理 7.10, 7.16, 7.17, 7.24 及 7.25 對向量值函數，卽映至任意 R^k 的映射，皆成立。

分析學探原

施克剛・譯

施克剛・譯

分析學探源

譯獻給

恩師　施思明博士

作者序言

本書是打算作爲研習數學的優秀大學生，或一年級研究生選修分析學課程的教科書。

新版基本上仍包含與第二版相同的論題，有些增加，也略有減少，另有相當程度的次序變動。我希望這些變動，會使得這些材料對修習這類課程的學生來說，更容易接受，也引人入勝。

經驗告訴我，由從有理數建極實數來開始，（儘管邏輯上是正確的，）在教學上却並不好。在剛開始，大多數學生簡直不知道爲什麼要這麼做。因此，我將實數系當作一個具有最小上界性質的有序體來介紹，並立即說明一些有趣的應用。

不過，Dedekind 的建構方法並沒有略去。它現在是第一章的附錄，在時機成熟時可加以研究及咀嚼。

討論多變數函數的材料，幾乎全部改寫，加入了許多細節，更多的例題，以及引導動機的介紹。反函數定理——第九章的關鍵論題——的證明，利用有關收縮映射 (Contraction Mapping) 的定點定理，已予以簡化。微分型式也討論得更詳盡。還包含了一些 Stokes 定理的應用。

至於其它的變動有，討論 Riemann-Stieljes 積分的一章，有點裁剪，第八章加入了短短的 Gamma 函數論自修式的一節，另外還有大量新的習題，大多數都有相當詳細的提示。

我也加入了一些出現在美國數學月刊(American Mathenatial Monthly)及數學雜誌（Mathematics Magazine）中的參考論文，意欲養成學生查閱雜誌文獻的習慣。這大多數文獻都是由 B. Burckel 好心提供的。

幾年來，承許多人，有學生也有老師，寄給我一些改正，批評，以及有關本書前版的其它意見。我衷心感激，並藉此機會對所有寫信給我的人，表達我誠摯的謝意。

Walter Rudin

譯者序言

這是一本分析學的名著，自 1964 年第二版發行以來，就廣爲數學界所推崇。 1976 年改訂新版，譯者斗膽迻譯，期爲科學中文化盡一分力耳。

全書共費時一年餘，施思明博士的啓發，鼓勵及協助，使譯者獲益良多，謹將此書譯獻給他，聊表敬意。

書中譯名，專有名詞參考正中書局部頒「數學名詞」一書（民國六十年九月），兼採楊維哲先生及賴漢卿先生兩位前輩的譯名，行文儘量口語化，但仍有力不從心之處，這是譯者功力太淺之故，望各方賢達不吝指正。

個人以爲，科學中文化是提高國內科技水平必行之道，實不容再做意氣之爭。學有專長的學者，請儘量以中文著述，（楊維哲先生及賴漢卿先生最應受到崇敬！）學問稍淺無力著述如我等，則請擇世界各國名著，費心迻譯，盡一分科學知識份子的責任，庶幾中華民國之科學水平可逐漸趕上先進國家。

玲於照顧小多多之餘，替我整理索引，實非一個「愛」字可以表達，小多多的嬌憨，也爲翻譯時的愁悶，平添一分歡笑，且記下留念。

施 克 剛　六十八年十二月一日

目錄

第一章

實數系與複數系

導論

要對分析學中的主要觀念（如：收斂、連續、微分和積分），有個令人滿意的討論，就必須奠基於精確定義的數的概念上。不過，我們將不深入討論那些支配整數運算的公設，而假設對有理數（即，具有 m/n 這種型式的數，其中 m 和 n 是整數，且 $n \neq 0$）很熟悉。

做爲一個體（field）或是有序集合（ordered set）兩者，有理數系在許多應用上都是不適足的。（這兩個名詞會定義在 1.6 節及 1.12 節中。）例如，就沒有一個有理數會使 $p^2 = 2$（我們馬上就要證明這件事）。這就導致了所謂「無理數」的引入，它們通常是寫成無窮小數的展開式，而想成是被對應的有限小數所「逼近」(approximate)。因此，序列

$$1, 1.4, 1.414, 1.4142, \cdots\cdots$$

「趨於$\sqrt{2}$」，但除非這無理數已有明確的定義，否則一定會引起這個問題：我們上面這個序列到底是「趨向」什麼？

一旦所謂「實數系」建構完了，這一類的問題就有答案了。

1.1 例子　我們先證明方程式

(1) $$p^2=2$$

不能被任何有理數 p 滿足。因爲，若 (1) 滿足了，則我們可以令 $p=m/n$，其中 m 及 n 都是整數，同時我們還可以選擇 m 及 n 使它們不全是偶數。我們假設這已經做好了。則 (1) 蘊涵了

(2) $$m^2=2n^2.$$

這顯示了 m^2 是個偶數。所以 m 是偶數（如果 m 爲奇數，m^2 就會是奇數），因而 m^2 可以被 4 整除。於是 (2) 的右邊可以被 4 整除，所以 n^2 爲偶數，這又蘊涵了 n 爲偶數。

因此 (1) 成立的假設，導致 m 及 n 皆爲偶數的結論，與我們對 m 及 n 的選擇相違反。所以 (1) 對有理數 p 是不可能的。

我們現在把這情況研究得更仔細一點。令 A 爲所有正有理數 p 而 $p^2<2$ 的集合，令 B 包含所有正有理數 p 而 $p^2>2$。我們將證明 A 不包含最大數，而 B 不包含最小數。

更明白點說，對每個 A 中的 p，我們可以在 A 中找到一個有理數 q，使得 $p<q$；而對每個 B 中的 p，我們可以在 B 中找到一個有理數 q，使得 $q<p$。

要證這個，我們對每個有理數 $p>0$，給它一個數

(3) $$q=p-\frac{q^2-2}{p+2}=\frac{2p+2}{p+2}$$

則

(4) $$q^2-2=\frac{2(p^2-2)}{(p+2)^2}.$$

若 p 在 A 中，則 $p^2-2<0$　(3) 顯示 $q>p$，而 (4) 顯示 $q^2>2$。因此 q 在 A 中。

若 p 在 B 中，則 $p^2-2>0$，(3) 顯示 $0<q<p$，而 (4)

顯示 $q^2>2$，因此 q 在 B 中。

1.2　備註　以上討論的目的，就是要證明有理數系中，有某種缺口，儘管每兩個有理數之間必有另一有理數：若 $r<s$，則 $r<(r+s)/2<s$。實數系就填補了這些缺口。這就是它在分析學中扮演基本角色的最主要的理由。

為了要說明其結構，以及複數系的結構，我們先對有序集 (ordered set) 和體 (field) 的一般概念作簡短的討論。

這裏是我們整本書中，都會用到的一些標準的集合論的術語。

1.3　定義　如果 A 是任何集合(它的元素可能是數或任何其它事物)，我們用 $x\in A$ 表示 x 是 A 的一個成員（或元素）。

若 x 不是 A 的成員，我們寫作：$x\notin A$

不包含任何元素的集合是叫做空集合 (empty set)。如果一集合至少包含一個元素，則叫做非空 (non-empty)。

如果 A 和 B 是集合，且若 A 的每個元素都是 B 的元素，則我們說 A 是 B 的子集合，並寫成 $A\subset B$，或 $B\supset A$。此外，如果 B 中有一元素不在 A 中，則稱 A 是 B 的眞子集 (proper subset)。注意，對每個集合 A, $A\subset A$

如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，我們寫做 $A=B$。否則就是 $A\neq B$

1.4　定義　整個第一章中，所有有理數的集合是記做 Q.

有序集合

1.5　定義　令 S 為一集合，S 上的次序 (order) 是一種關係，記做 $<$，具有下列兩種性質:

(i) 如果 $x\in S$ 且 $y\in S$，則

$$x<y,\quad x=y,\quad y<x$$

三敍述中，有且僅有一個為眞。

(ii) 若 $x, y, z\in S$，$x<y$ 且 $y<z$，則 $x<z$

"$x<y$" 這敍述，可以唸成「x小於y」或「x比y小」或是「x在y之前。」

常常，以$y>x$代替$x<y$會方便點。

$x\leq y$這符號是表示$x<y$或$x=y$，不特別指明是兩種之一何者成立。換言之，$x\leq y$是$x>y$的否定。

1.6 定義 有序集合是說，一集合S，其中定義了有一種次序。

例如，如果$r<s$是定義說$s-r$是個正有理數的話，則Q就是有序集。

1.7 定義 假設S是個有序集，且$E\subset S$。如果存在$\beta\in S$，而對所有$x\in E$，$x\leq\beta$，則我們說E是在上有界（bounded above)，並稱β是E的一個上界（upper bnund)。

下界也可以同法定義（以$\geq$取代$\leq$）。

1.8 定義 假設S是個有序集，而$E\subset S$, E是在上有界。假設存在$\alpha\in S$，具有以下性質:

(i) α是E的一個上界。

(ii) 如果$\gamma<\alpha$，則γ不是E的上界。

則α叫做E的最小上界（least upper bound)〔由(ii)很明顯知道，最多只有一個這樣的α〕，或E的 supremum，我們寫成

$$\alpha=\sup E.$$

一個在下有界的集合E，其最大下界（greatest lower bound)，或 infimum，是以同樣方式來來義：所謂

$$\alpha=\inf E$$

意思是，α是E的一個下界，而沒有任何β, $\beta>\alpha$，會是E的下界。

1.9 例子

(a) 將例1.1的集合A和B，想成是有序集合Q的子集。集

合A是在上有界。事實上，A的上界正好是B中的元素。由於B沒有最小元素，故A在Q中沒有最小上界。

同樣的，B在下有界：B的所有下界的集合，包含了A及所有$r \in Q$而$r \leq 0$者。由於A沒有最大元素，故B在Q中沒有最大下界。

(b) 若$\alpha = \sup E$存在，則α可以是也可以不是E中的元素。例如，令E_1爲所有$r \in Q$而$r < 0$的集合。E_2爲所有$r \in Q$而$r \leq 0$的集合。則

$$\sup E_1 = \sup E_2 = 0$$

而$0 \notin E_1$，$0 \in E_2$

(c) 令E包含所有$1/n$，$n = 1, 2, 3 \cdots\cdots$，這些數。則$\sup E = 1$，它屬於E，而$\inf E = 0$，它不屬於E。

1.10　定義　一有序集合S，我們說它具有最小上界性質，如果下述爲眞的話：

若$E \subset S$，E是非空，而E是在上有界，則$\sup E$存在於S中。

例 1.9 (a) 顯示，Q並不具有最小上界性質。

我們現在要證明最大下界與最小上界之間，有密切的關係，而每個具有最小上界性質的有序集合，也具有最大下界性質。

1.11　定理　假設S是有序集，具有最小上界性質，$B \subset S$，B爲非空，且B在下有界。令L爲所有B之下界所成的集合。則

$$\alpha = \sup L$$

存在於S中，且$\alpha = \inf B$

特別是，$\inf B$存在於S中。

證明：由於B在下有界，故L爲非空。又因爲L恰包含那些$y \in S$，並對所有$x \in B$，滿足$y \leq x$這不等式，故我們知道，每個$x \in B$，都是L的上界。因此L在上有界。我們對S的假