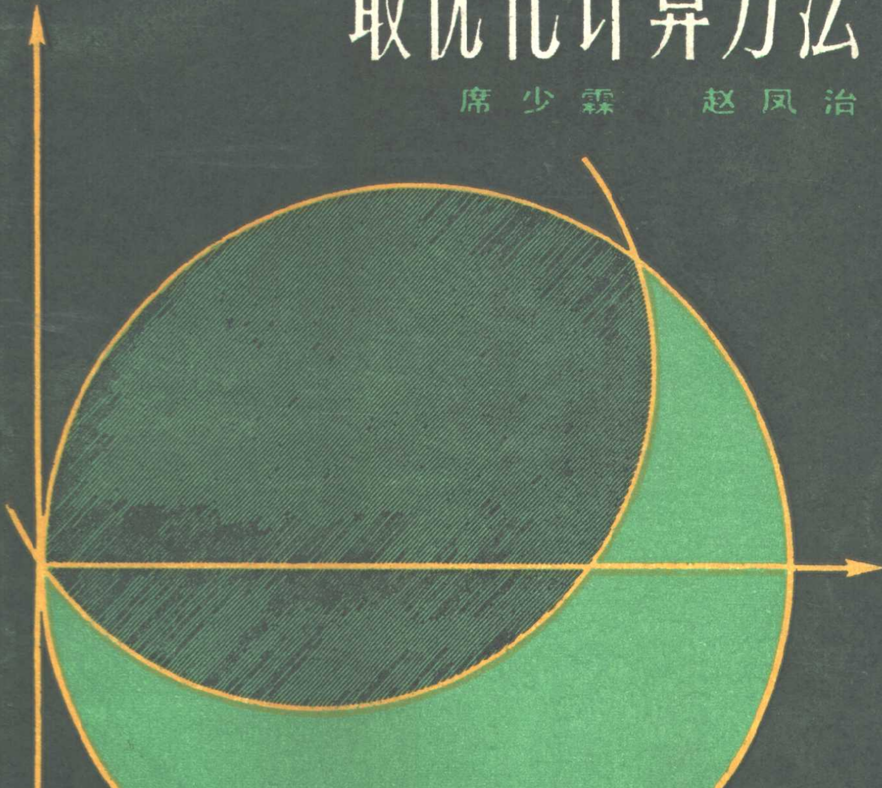
最优化计算方法

席少霖　赵凤治



上海科学技术出版社

最优化计算方法

席少霖　赵凤治　编著

上海科学技术出版社

最优化计算方法

席少霖　赵凤治　编著

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　江苏扬中印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32　印张 14.75　字数 389,000

1983 年 3 月第 1 版　1983 年 8 月第 1 次印刷

印数：1—27,000

统一书号：13119·1077　　定价：(科五) 1.65 元

序

本书讨论数学规划中线性规划、非线性规划、几何规划和动态规划的计算方法.

数学规划是运筹学的一个分支，因为运筹学其它分支的计算也往往通过数学规划的算法来实现，所以数学规划也是运筹学的一个重要侧面. 近年来，用数学规划方法所计算的问题已远远超出了运筹学原有的范围，大家习惯地称其为最优化计算方法. 我们这里也采用了这个名字.

本书是在我们的“最优化计算方法”的讲义基础上改写而成的.讲义初稿写于 1976 年 6 月.四年来，我们用这个讲义先后在许多单位为工程设计人员、教师、研究人员、研究生等讲授. 讲授过程中对讲义陆续地进行了一些增补和修改，现在予以出版.

全书共分六章. 第一章给出了某些最优化问题的数学模型，这些模型大多是我们解决过的实际问题的简化；第二章是无约束极值问题的解法，它们既可以直接用来解决实际问题，又可以作为解约束极值问题的工具；第三章介绍线性规划问题的解法；第四章讨论非线性规划的计算方法，首先简要地作一些理论讨论，然后把这章讨论的课题与第二章、第三章的内容作了联系，接着讨论针对非线性规划建立的计算方法；第五章介绍几何规划的常用计算方法.第六章对动态规划做了简要的介绍. 当然，数学规划还有一些别的分支，限于篇幅，我们就不在本书中一一介绍了.

数学规划的计算方法很多，本书选材尽量考虑下述两项原则：第一，所选择的方法在电子计算机上能方便地实现；第二，对常用方法应尽可能选择得全面，尤其注意了较新的方法.

在材料的组织上，据几次讲课的体会，每介绍一个方法一般采用如下四个环节. (1)为了读者在使用所介绍的方法时能进行理

论上的分析，在介绍方法的计算过程之前先把它们的理论依据用较直观的形式给予描述. 尽管有些段落用了稍多的数学知识，但如有读者一时难懂，也不会影响对方法的掌握. (2)给出**计算公式**. 每个计算方法的公式都力求完整，以便于读者套用. (3)为介绍方法的逻辑结构和便于读者组织程序，对主要方法给出了**方框图**. 所举的数值例子也是为了让大家更容易地熟悉方法. (4)在一些章节后面附有少量习题，以帮助读者消化正文内容.

如果以本书做为教材，对于具有大学理工科毕业程度的读者，大约需讲授 100 个课时. 自然，如对内容稍加选择，也可在更少的时间内讲授完. 如用作自修也是很适宜的.

由于我们的水平有限，书中如有不妥之处，敬请批评指正.

作　者

目　　录

第一章　引言 ……………………………………………………1

§1.1　一般性描述 ……………………………………………1

§1.2　最优化模型例述 ………………………………………3

§1.3　算法概述 ………………………………………………8

§1.4　凸规划的理论意义 ……………………………………11

习题 …………………………………………………………16

参考文献 ……………………………………………………17

第二章　无约束极值问题的解法………………………………18

§2.1　一般性讨论 ……………………………………………18

§2.2　一维搜索 ………………………………………………27

§2.2.1　牛顿法 ……………………………………………27

§2.2.2　平分法 ……………………………………………31

§2.2.3　0.618法（又称黄金分割法） ……………………34

§2.2.4　分数法（裴波那契搜索） …………………………39

§2.2.5　抛物线法 …………………………………………45

§2.2.6　三次插值法 ………………………………………48

§2.2.7　有理插值法 ………………………………………53

§2.3　n维极值的解析方法 …………………………………60

§2.3.1　梯度法 ……………………………………………61

§2.3.2　牛顿法 ……………………………………………74

§2.3.3　共轭方向法及共轭梯度法 ………………………95

§2.3.4　变尺度法 …………………………………………127

§2.3.5　解大规模问题的计算方法 ………………………152

§2.4　n维极值的直接法……………………………………159

§2.4.1　一维搜索法的推广 ………………………………159

§2.4.2　Hooke–Jeeves 模式搜索法 ………………………161

§2.4.3　Rosenbrock 算法 …………………………………168

§2.4.4　单纯形方法 ………………………………………177

§2.4.5　Powell 方法 ………………………………………183

§ 2.5 平方和形式的函数极小问题 ……189
§ 2.5.1 最小二乘法 ……190
§ 2.5.2 Marquardt 方法 ……194
§ 2.5.3 Powell 方法 ……196
习题……200
参考文献……200
第三章 线性规划的解法 ……204
§ 3.1 一般线性规划问题及单纯形法 ……204
§ 3.1.1 标准型 ……204
§ 3.1.2 对单纯形法的解释 ……208
§ 3.1.3 单纯形法 ……213
§ 3.1.4 初始基本容许解的给出及修正单纯形法 ……220
§ 3.2 线性规划的对偶理论及对偶单纯形法 ……233
§ 3.2.1 对偶理论 ……233
§ 3.2.2 对偶单纯形法 ……238
§ 3.2.3 对偶单纯形法的初始解 ……241
习题……247
参考文献……248
第四章 非线性规划的计算方法 ……249
§ 4.1 最优性条件与鞍点问题 ……249
§ 4.1.1 引言 ……249
§ 4.1.2 最优性条件 ……252
§ 4.1.3 鞍点问题 ……263
§ 4.1.4 对偶问题 ……267
§ 4.2 用线性规划逐步逼近非线性规划的方法 ……270
§ 4.2.1 序列线性规划法(SLP)……270
§ 4.2.2 近似规划法(MAP) ……273
§ 4.2.3 割平面法 ……276
§ 4.3 二次规划的 Wolfe 算法……282
§ 4.3.1 短形式 ……283
§ 4.3.2 长形式 ……284
§ 4.4 容许方向法 ……291
§ 4.4.1 ε-起作用约束容许方向法的迭代过程 ……300
§ 4.4.2 全约束容许方向法的迭代过程 ……305

§ 4.5 投影梯度法 ……307
§ 4.6 简约梯度法 ……324
§ 4.7 罚函数法 ……336
§ 4.7.1 外罚函数法 ……337
§ 4.7.2 内罚函数法 ……343
§ 4.7.3 外插技术 ……348
§ 4.7.4 乘子法 ……351
§ 4.7.5 精确罚函数法 ……358
§ 4.7.6 化为极小极大问题 ……361
§ 4.8 解非线性规划的直接法 ……364
§ 4.8.1 网格法 ……364
§ 4.8.2 随机试验法 ……367
§ 4.8.3 复合形法 ……370
习题 ……377
参考文献 ……378
第五章 几何规划 ……381
§ 5.1 引言 ……381
§ 5.2 正定几何规划 ……383
§ 5.3 带负系数的几何规划 ……397
§ 5.4 几何规划问题的迭代解法 ……403
§ 5.4.1 Avriel-Williams 方法 ……403
§ 5.4.2 解对偶几何规划问题的修正简约梯度法 ……409
§ 5.5 可变换为几何规划的问题举例 ……417
习题 ……425
参考文献 ……426
第六章 动态规划简介 ……427
§ 6.1 动态规划的某些基本概念及分析解法 ……427
§ 6.2 动态规划的数值解法 ……433
§ 6.3 动态规划的应用举例 ……441
§ 6.4 几点推广 ……450
习题 ……461
参考文献 ……461

第一章

引言

在这一章中我们首先一般性地介绍最优化技术的情况，其次举一些例子介绍怎样从实际问题中形成最优化数学模型，然后介绍最优化计算方法的概貌，最后讲一点有关凸规划的知识.

§1.1 一般性描述

最优化技术是一个较新的科学分支. 顾名思义，它所研究的问题是在众多方案中讨论什么样的方案最优？怎样找出最优方案？在日常工作和生活中这类最优化方法的实际问题是经常碰到的.

有多种工作要安排，先做哪些工作，后做哪些工作？每种工作人力、物力、技术手段如何使用？每种工作进行的时间如何？要达到什么样的指标？安排在什么位置进行？等等，都要做具体安排.安排得好，效率就高，否则，就要窝工.例如，制造一种产品，用什么原料？采用什么规格？什么工艺？什么工序？什么时间生产？生产多少？等等，采用不同方式对产品质量、产值都有影响. 一座建筑或一个结构，当主要的要求确定之后，用什么结构形式？什么材料？什么规格？在保证满足相同技术要求情况下，方案不同，投资则会有很大区别.某一物资，产地和销地都很多，我们安排不同运输方案，运费也将有很大变化. 城市、工厂、农村总的平面布局，及各个小的单位的平面布局等都有很多不同方案，用不同方案就会有不同效果. 又如，企业的管理、经济发展的规划、军事行动的指挥等等，也都是最优化工作者的用武之地.

这许多问题一般都有很多种可供选用的方案，甚至有无数个方案. 要对这些方案作出选择，首先要确定一个鉴别好坏的标准.有了一个标准，就要求在这个标准衡量下，在技术条件允许的范围

内找出一个或几个最好的方案，这就是最优化技术所研究的内容.

不过，在多数情况下，人们凭借经验已经有了一个较好的方案，这个方案已为长期实践所确认，它虽然不一定是最优的，但采用它所取得的效果还是较为令人满意的．所以很长时期来，很多部门还都认为最优化技术不是非搞不可的．但随着生产的发展、科学的进步，一方面经验不够用了，另一方面方案的好坏所产生的不同后果也显著地被人们认识了，这时，用科学的方法来讨论最优化问题引起了人们广泛的注意．逐渐地，最优化这一课题不但吸引了一批数学工作者，而且更吸引了其他各领域各部门人们的注意和研究．于是最优化技术有了专门术语，出版了专门杂志，编写了专门书籍，成立了专门组织．就这样，最优化技术从实践中产生，在实践中发展起来.

特别是近三十年来，由于科学技术发展的需要，电子计算机这一有力计算工具的出现和发展为最优化技术的发展提供了有效的手段，使最优化技术获得了十分迅速的发展．就其应用来说，它已几乎深入到各个生产科研领域．仅从我们自己所接触到的问题就有：结构最优设计、电子器件最优设计、光学仪器最优设计、化工工程最优设计、橡胶最优配方、运输方案安排、机器最优配备、油田开发、水库调度等方面的课题．有些方面的成果已用于生产实践，收到了较好的效果.

其次，最优化理论的发展也很快，如凸规划及有关理论、对偶理论、有关解的特性的理论、与计算方法直接有关的诸如收敛性、收敛速度等方面的研究，都有一些颇为出色的工作．最优化计算方法方面的进展更是惹人注目．最优化计算方法所以能发展得这样快，这是与最优化技术的特点分不开的．因为最优化问题一旦被描述为数学问题之后，最为迫切的问题就是求出解来，如果不能求出解来，则前功尽弃．因此，如果计算方法方面的工作多，那末成果也就多．现在最优化计算方法方面的论文不仅出现在与最优化技术密切相关的杂志中，还出现在其他科技方面的专门杂志中.

广大科技工作者除了在从事最优化技术的理论、算法、应用等

方面的专门研究，还大力地进行推广应用工作．这样，推动了理论研究工作的发展，使理论研究工作有了方向．我们相信，在未来的科技和生产中最优化技术一定会得到更大的发展．

§1.2 最优化模型例述

最优化技术工作一般被分成两个方面，一是由实际的生产或科技问题形成为最优化的数学模型；二是对所形成的数学问题作数学加工及求解．有关最优化的数学理论及计算方法方面，目前尚有一些参考书籍，但是对怎样由实际问题抽象出数学模型方面，就很少有系统的资料了．对这方面有兴趣的读者可看参考文献[2]、[3]．至于怎样从实际问题形成最优化的数学模型，这确是一件十分重要的工作．没有这部分工作，最优化技术将成为无源之水，很难健康发展．在这一节中，我们介绍几个例子，希望通过这些介绍能使大家了解到最优化技术与实际问题是密切联系的，它有很大的实用价值；同时还试图给大家怎样从实际问题形成数学模型一点启示．所举的例子大多是选自我们搞过的实际问题，但在这里作了简化．当然，限于我们的知识面及本书的篇幅，书中的介绍是十分粗浅的．

1．线性规划特殊类型

设某种物资有m个产地A_1, A_2, …, A_m, 产量依次为a_1, a_2, …, a_m吨；有n个销地B_1, B_2, …, B_n, 销量依次为b_1, b_2, …, b_n吨．记产地A_i到销地B_j之间的运输距离为c_{ij}公里，问怎样运输才使货运总吨公里数为最小．

一个自然的要求是

$$\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j.$$

设x_{ij}表示从产地A_i运到销地B_j的运量，于是此问题的数学模型是求x_{ij}，使

$$\min S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

满足约束条件

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j=1, 2, \cdots, n;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i=1, 2, \cdots, m;$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i=1, 2, \cdots, m; \ j=1, 2, \cdots, n.$$

2. 一般线性规划问题

某生产单位要购置拖拉机，可供选购的拖拉机有n种型号$A_1, A_2, \cdots, A_n$. 该单位要用拖拉机干的农活分m个阶段，依次为$B_1, B_2, \cdots, B_m$, 工作量依次为$b_1, b_2, \cdots, b_m$. 记A_j种拖拉机干B_i种农活的效率为a_{ij}, A_j种拖拉机每台的购置费和维修费为c_j. 问在保证完成该单位农活的前提下，购置哪几种拖拉机各多少台总支出最少？

设A_j种拖拉机购置x_j台，于是形成数学模型

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

满足约束条件

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i, \quad i=1, 2, \cdots, m;$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j=1, 2, \cdots, n.$$

这便是一般线性规划的模型. 但此例中x_j只能取整数，加上此限制，得出整数线性规划问题.

线性规划问题的解法在第三章中介绍.

3. 二次规划模型

假定在同一个平面上有n个点，取定坐标系后这n个点的坐标依次为

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n).$$

我们希望用下面给定的样条曲线函数来拟合这n个点，而且要求其二阶导数满足一定条件. 样条曲线函数为

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 (x - x_1)^3_{\#} + \cdots + a_j (x - x_{j-3})^3_{\#} + \cdots + a_{n+3} (x - x_n)^3_{\#},$$

其中

$$(x-x_i)_{\#}^3=\frac{1}{2}(|x-x_i|^3+(x-x_i)^3).$$

为了保证所求出的函数 $f(x)$ 的曲线与给定的点所连成的曲线具有相同的拐点，对 $f(x)$ 的二阶导数加上下述条件

$$\gamma_i f''(x_i)\geqslant 0,$$

此处
$$\gamma_i=\frac{2}{x_{i+1}-x_{i-1}}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}-\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right).$$

于是此问题的数学模型为求 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_{n+3}$，使

$$\min S=\sum_{j=1}^{n}(f(x_j)-y_j)^2$$

满足约束条件

$$\gamma_i f''(x_i)\geqslant 0,\quad i=2,\ \cdots,\ n-1.$$

这个数学模型是从船体数学放样中得出来的.

在第四章中介绍二次规划的一个解法.

4. 无约束极值问题

地球受其它星体的作用，海水形成有潮汐和潮流，潮流预报对渔业、航行等十分重要. 其中称流速相对最大、相对最小的预报为极值预报. 极值预报就是求 W_t 的所有局部极值. W_t 是时间 t 的函数，具体为

$$W_t=a\sqrt{U_t^2+V_t^2},\quad 0\leqslant t\leqslant 8759(\text{闰年 }8783);$$

$$U_t=\sum_{j=1}^{m}f_jH_{u_j}\cos[q_jt+(V_0+U)_j-g_{u_j}];$$

$$V_t=\sum_{j=1}^{m}f_jH_{v_j}\cos[q_jt+(V_0+U)_j-g_{v_j}];$$

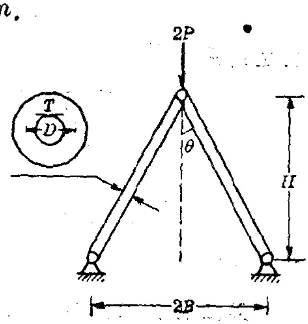
$$f_j=f_j(N_0),\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

其中 $a,\ H_{u_j},\ H_{v_j},\ q_j,\ (V_0+U)_j,\ g_{u_j},\ g_{v_j},\ N_0$ 均为给定的天文常数.

无约束极值问题的解法将在第二章中进行讨论.

5. 非线性规划问题

现有由两个构件组成的对称桁架(如图所示). 假定已知作用力为 $2P$,



构件为两根厚度为 T 的圆管，两根圆管支点间的距离为 $2B$，材料纵向弹性模数为 E，比重为 ρ，屈服强度为 σ_y. 求在桁架不被破坏的情况下使结构重量最小的高度 H 及圆管直径 D.

所考虑的破坏有两种：一种是在管长方向上的压应力超过材料的屈服强度 σ_y；另一种是构件上压缩负荷而产生的屈曲破坏.

圆管的剖面积为

$$A=\pi DT.$$

作用力在一个构件上的分力为

$$F=\frac{P}{\cos\theta},$$

其中
$$\cos\theta=\frac{H}{\sqrt{B^2+H^2}}.$$

于是应力为
$$\sigma=\frac{F}{A}=\frac{P}{\cos\theta\pi DT}=\frac{P\sqrt{B^2+H^2}}{\pi DTH}.$$

产生屈曲的应力为

$$\sigma_E=\pi^2E\frac{I}{A(B^2+H^2)},$$

其中 I 是圆管的剖面惯性矩

$$I=\frac{1}{8}\pi DT(D^2+T^2).$$

当压缩应力 σ 不超过 σ_E 时材料不会产生屈曲破坏，压缩应力 σ 不超过 σ_y 时材料就不会产生屈服破坏. 于是整个问题的数学模型便可表示成如下非线性规划问题：

$$\min W=2\rho\pi DT\sqrt{B^2+H^2},$$

满足约束条件

$$\frac{P\sqrt{B^2+H^2}}{\pi DTH}\leqslant\sigma_y,$$

$$\frac{P\sqrt{B^2+H^2}}{\pi DTH}\leqslant\frac{\pi^2E(D^2+T^2)}{8(B^2+H^2)},\quad D,\ H\geqslant0,$$

求设计变量 D, H.

算法将在第四章介绍.

6. 最优控制问题

给定离散的动态系统描述以

$$\boldsymbol{x}_{i+1}-\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{u}_i),\quad \boldsymbol{x}_i\in E^r,\quad \boldsymbol{u}_i\in F^n,$$
$$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k-1.$$

其中 E^r 为 r 维欧氏空间，$\boldsymbol{x}_i\in E^r$ 表示 $\boldsymbol{x}_i$ 为 r 维欧氏空间的一个点. $\boldsymbol{x}_i$ 为系统的状态向量，$\boldsymbol{u}_i$ 是在时间 t_i 施于系统上的控制向量. 我们希望确定一个控制系列 $\hat{U}=\{\hat{\boldsymbol{u}}_0,\ \hat{\boldsymbol{u}}_1,\ \cdots,\ \hat{\boldsymbol{u}}_{k-1}\}$，利用前面公式将得出轨迹变量 $\hat{X}=\{\hat{\boldsymbol{x}}_0,\ \hat{\boldsymbol{x}}_1,\ \cdots,\ \hat{\boldsymbol{x}}_k\}$，使这组 $\hat{U}$、$\hat{X}$ 极小化

$$\sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(\boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{u}_i)+\varphi(\boldsymbol{x}_k),$$

满足约束条件:

$$\boldsymbol{s}_i(\boldsymbol{u}_i)\leqslant\boldsymbol{0},\quad i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k-1;$$
$$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)=\boldsymbol{0},\quad i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k;$$
$$\boldsymbol{q}_i(\boldsymbol{x}_i)\leqslant\boldsymbol{0},\quad i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k.$$

其中 $\boldsymbol{f}_i$ 为一函数向量，每给出 $\boldsymbol{x}_i$ 的 r 个分量，u_i 的 n 个分量，就可以得出 r 个确定的值. f_i^0 为 $r+n$ 个变量的函数，即每给出 $\boldsymbol{x}_i$ 的 r 个分量及 $\boldsymbol{u}_i$ 的 n 个分量就可得出一个确定的值. φ 为 r 个变量的函数，即每给出 $\boldsymbol{x}_k$ 的 r 个分量就可以得出一个确定的值. $\boldsymbol{s}_i$ 是一个函数向量，即每给出 $\boldsymbol{u}_i$ 的 n 个分量就可以得出 n_i 个确定的值. $\boldsymbol{g}_i$ 是一个函数向量，即每给出 $\boldsymbol{x}_i$ 的 r 个分量就可以得出 l_i 个确定的值. $\boldsymbol{q}_i$ 也是一个函数向量，即每给出 $\boldsymbol{x}_i$ 的 r 个分量就可以得出 m_i 个确定的值. 对不同的过程，我们用不同的函数及函数向量加以描述.

把这个问题叙述成非线性规划问题可以写成求 $\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_k;\ \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_{k-1}$，使

$$\min f^0(X,\ U)=\sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(\boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{u}_i)+\varphi(\boldsymbol{x}_k)$$

满足约束条件

$$\boldsymbol{x}_{i+1}-\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{u}_i),\ \boldsymbol{x}_i\in E^r,\ \boldsymbol{u}_i\in E^n,$$
$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1;$$
$$\boldsymbol{s}_i(\boldsymbol{u}_i)\leqslant\boldsymbol{0},\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1;$$

$$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)=\boldsymbol{0}, \quad i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k;$$
$$\boldsymbol{q}_i(\boldsymbol{x}_i)\leqslant\boldsymbol{0}, \quad i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k.$$

连续的最优控制问题可用离散化方法化成离散的最优控制问题来求解.

最优化计算方法及理论不仅在实际部门中有广泛的应用，近些年来，它在数学学科内的渗透也是很引人注目的. 如它与数值代数、函数逼近、微分方程、有限元等等分支的相互渗透方面都有不少进展. 现在，最优化计算更成了系统工程所不可缺少的工具.

§1.3 算 法 概 述

在前节各例中所介绍的数学模型可以一般地表示为数学规划问题，即极小化目标函数

$$f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in E^n, \tag{1.3.1}$$

满足约束条件:

$$h_k(\boldsymbol{x})=0, \quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ p; \tag{1.3.2}$$

$$g_i(\boldsymbol{x})\geqslant 0, \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m. \tag{1.3.3}$$

$\boldsymbol{x}\in E^n$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 为 n 维欧氏空间中的一个点，或者称为一个 n 维向量. 向量，在我们书中一般指列向量，可表示为

$$\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^T,$$

其中 x_j ($j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$) 为向量 $\boldsymbol{x}$ 的分量. T 表示转置，$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 为一个行向量，$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^T$ 为一个列向量. $f(\boldsymbol{x})$; $h_k(\boldsymbol{x})$ ($k=1,\ 2,\ \cdots,\ p$); $g_i(\boldsymbol{x})$ ($i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$) 都是 $\boldsymbol{x}$ 的函数，即 n 元函数.

例 1.3.1 极小化目标函数

$$f(\boldsymbol{x})=f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=x_1\cos x_2+x_2\sin x_3-x_1x_4$$

满足约束条件

$$-x_1^2-x_2^2+x_3\sin x_4\geqslant 0,$$
$$x_1+x_2-x_3^2-x_4^2\geqslant 0,$$

就是一个数学规划问题.

我们称式子(1.3.1)为目标函数，(1.3.2)、(1.3.3)为约束条

件．当目标函数为极大化$\varphi(\boldsymbol{x})$时，可以用极小化目标函数$f(\boldsymbol{x})=-\varphi(\boldsymbol{x})$来代替．当约束条件要求$q_i(\boldsymbol{x})\leqslant 0$时，我们可以用约束条件$g_i(\boldsymbol{x})=-q_i(\boldsymbol{x})\geqslant 0$来代替．因而前面所述的问题具有一般性．

我们称满足(1.3.2)、(1.3.3)中每一个式子的点为容许点．所有容许点的集合称为容许集合，用R标记．

由于目标函数$f(\boldsymbol{x})$及约束条件$h_k(\boldsymbol{x})$、$g_i(\boldsymbol{x})$具有不同的性质，上述问题又被分成若干类．

当$f(\boldsymbol{x})$、$h_k(\boldsymbol{x})$、$g_i(\boldsymbol{x})$均为$\boldsymbol{x}$的线性函数时称为线性规划．运输问题、分配问题、生产组织与管理中的规划问题等又是线性规划的特殊情形．当$f(\boldsymbol{x})$为二次函数，$h_k(\boldsymbol{x})$、$g_i(\boldsymbol{x})$为线性函数时，称为二次规划．当仅有目标函数而无约束条件时，亦即$R=E^n$，我们称为无约束极值问题．此时$f(\boldsymbol{x})$当然为非线性函数．只要$f(\boldsymbol{x})$、$h_k(\boldsymbol{x})$、$g_i(\boldsymbol{x})$中有非线性函数存在，此时规划问题称为非线性规划．可见二次规划也是非线性规划，但它是一种特殊的非线性规划．

以上只是针对函数的不同类型来区分的，同样，对变量进行区分也有如下分类：当限制自变量$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x^n)^T$的分量$x_j$ $(j=1, 2, \cdots, n)$中一些或全部只能取某些离散值或只取整数时，我们称其为离散规划或整数规划．在整数规划中限制变量的各个分量只能取0及1时，称为0–1规划．针对目标函数值及约束函数值的不同限制又有布尔规划、伪布尔规划之分．此外还有动态规划、几何规划、组合规划等等．

我们这本书中所介绍的方法主要侧重于一般非线性规划的计算方法，这也是一般数学规划计算方法常见的内容．顺便介绍线性规划、二次规划、几何规划、动态规划的计算方法．鉴于非线性规划计算方法与其他一些运筹学分支等计算问题的关系，可以说这里介绍的算法还是具有普遍意义的．

同其他事物一样，最优化的计算方法也是随着实际需要和实现的可能性发展起来的．在古典分析中就有求极值的方法，也有