线性代数

同济大学函授数学教研室 编

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\alpha_2, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{[\alpha_3, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 - \frac{[\alpha_3, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]}\beta_2$$

同济大学出版社

线 性 代 数

同济大学函授数学教研室 编

同济大学出版社

内容提要

本书根据全国成人高等教育工学专科“线性代数”教学基本要求，总结多年教学经验编写而成.全书包括行列式、矩阵、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性以及相似矩阵和二次型等基本知识与基本理论等内容。本书突出线性代数的计算和方法，取材得当，结构合理，每节配有习题，每章配有学习指导、复习思考题以及习题与复习思考题的答案或简答，书中安排了三次阶段测验，便于自学与教学.

本书前四章内容可作为高等工科院校各专业的专科生、函授与夜大专科生“线性代数”教学的教材或参考用书，加上第五章内容，也可作为高等工科院校本科生、函授与夜大本科生和工程技术人员学习、自学的教材.

责任编辑　李炳钊
封面设计　潘向蓁

线　性　代　数

同济大学函授数学教研室　编
同济大学出版社出版
(地址：上海四平路1239号　邮编：200092)
新华书店上海发行所发行
浙江新昌印刷厂印刷
开本：850×1168　1/32　印张：9.625　字数：270千字
1999年2月第1版　　2001年2月第4次印刷
印数：20001—28000　　定价：14.00元
ISBN7-5608-1996-6/O·171

前　言

为适应我国高等工科类专科成人教育迅速发展的形势需要，根据全国成人高等教育工科类专科“线性代数”教学基本要求，总结多年教学经验编写了这本高等工科院校专科《线性代数》试用教材.本书包括线性代数的基本知识和基本理论:行列式、矩阵、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性以及相似矩阵与二次型.

根据函授教学以“自学为主、面授为辅”的特点，在编写本书时，力求做到:概念清楚，论证准确;由浅入深，循序渐近;突出重点，分散难点;解说详尽，便于自学.

本书具有以下两个特点:

1. 内容深度和广度符合高等工科类专科“线性代数”教学基本要求.根据函授教学“以应用为主，以必需、够用为度”的原则，本教材在内容选取和安排上侧重学生基本能力的培养，其理论深度与本科教材有所区别，突出计算和方法，尤其把矩阵的行初等变换放在十分重要的位置，注意矩阵方法和线性方程组解法之间的内在联系，这对于各工科类专科学生熟练地掌握线性代数的基本知识和基本方法都有好处;利用线性方程组的有关结论讨论向量组的线性相关性概念，使抽象的概念变得较易理解和掌握，而且还能复习和巩固已学的知识，达到温故而知新的学习目的.本书也编入了少量超出专科教学基本要求的内容，并以“ * ”标记.它们是:向量空间、相似矩阵与二次型.编入“向量空间”一节，目的在于使学生对向量集合的性质、线性方程组的理论等有更完整、更准确的理解，也扩大了知识面;为照顾某些专业的特殊需要.书中还编入了“相似矩阵与二次型”一章，供有关专业选用.

2. 教材内容与学习指导融为一体，便于函授自学. 教材中除力求做到文字通顺、叙述清楚、例题较多、“台阶”较小等特点外，还在每章末附有“学习指导”，它包括两个部分内容：① 学习本章的基本要求；② 学习中应注意的问题. 既扼要概括了每章的主要内容，又针对学生学习中常见的错误作了叙述与分析；对每章的主要内容反复举例说明，并给予恰当的推广和开拓，以开阔学生的学习思路. 此外，在每节后还配备了适量的习题，在每章末配有复习思考题，并附有答案或简答，便于学生核对. 为了及时检查学习效果，还按阶段选配了测验作业题.

本书由黄临文老师编写，同济大学应用数学系刘浩荣教授参加讨论编写提纲，参与策划本书的风格和特色；叶家琛、陈承东两位教授详细审阅了本书的初稿，骆承钦教授详细审阅了全书内容，并提出了许多宝贵意见，对本书的修改定稿起了十分重要的作用；编者也广泛参考了许多兄弟院校的同类教材及有关资料，在此一并表示衷心感谢.

本书的编辑出版还得到同济大学函授学院、应用数学系的有关领导和老师以及同济大学出版社李炳钊副编审等有关同志的热情关心与积极支持，在此也一并表示衷心感谢.

本书前四章内容可用于成人教育高等工科类各专业专科函授教材或参考用书，也可用于高等工科类成人教育的电大、职大、夜大专科教学. 加上第五章内容可用于高等工科类各专业本科教材或参考用书.

限于编者水平，书中难免有不足或疏漏之处，恳请广大读者批评指正.

编 者

1997.12

目　　录

第一章　行列式

1.1　n 阶行列式的定义 …………………………… (1)

一、二阶和三阶行列式(1)　二、二阶和三阶行列式的关系(6)

三、n 阶行列式(9)

习题 1.1 ……………………………………… (13)

1.2　n 阶行列式的性质 …………………………… (14)

习题 1.2 ……………………………………… (22)

1.3　行列式的计算 ……………………………… (23)

习题 1.3 ……………………………………… (29)

1.4　克莱姆法则 ………………………………… (31)

习题 1.4 ……………………………………… (35)

学习指导(一) ………………………………… (36)

复习思考题(一) ……………………………… (41)

第二章　矩阵

2.1　矩阵的概念 ………………………………… (48)

一、引例(48)　二、矩阵的定义(51)

习题 2.1 ……………………………………… (53)

2.2　矩阵的运算 ………………………………… (54)

一、矩阵的加法(54)　二、数与矩阵的乘法(55)

三、矩阵与矩阵的乘法(57)　四、矩阵的转置(63)

五、方阵的行列式(67)

习题 2.2 ……………………………………… (68)

2.3　分块矩阵 …………………………………… (70)

一、分块矩阵(70)　二、分块矩阵的运算(73)
习题 2.3 …………………………………………………… (80)
2.4　逆阵 …………………………………………………… (81)
一、逆阵的定义(81)　二、方阵可逆的充分必要条件(82)
三、可逆阵的性质(85)　四、分块矩阵的逆阵(86)
习题 2.4 …………………………………………………… (91)
学习指导(二) …………………………………………… (92)
复习思考题(二) ………………………………………… (102)
测验(一) ………………………………………………… (105)

第三章　矩阵的初等变换与线性方程组

3.1　矩阵的初等变换 …………………………………… (114)
一、消元法解线性方程组(114)　二、矩阵的初等变换(117)
三、矩阵的标准形(121)
习题 3.1 …………………………………………………… (124)
3.2　矩阵的秩 …………………………………………… (125)
一、矩阵秩的定义(125)　二、用初等变换求矩阵的秩(128)
习题 3.2 …………………………………………………… (132)
3.3　线性方程组解的讨论 ……………………………… (133)
一、非齐次线性方程组有解的充分必要条件(134)
二、齐次线性方程组有非零解的充分必要条件(143)
三、用行初等变换求逆阵(148)
习题 3.3 …………………………………………………… (152)
3.4　初等方阵 …………………………………………… (154)
习题 3.4 …………………………………………………… (162)
学习指导(三) …………………………………………… (163)
复习思考题(三) ………………………………………… (174)

第四章　向量组的线性相关性

4.1　n 维向量 ………………………………………… (183)

一、n 维向量(183)　二、向量组的线性组合(186)
习题 4.1 …………………………………………………… (189)
4.2　向量组线性相关与线性无关 …………………… (189)
一、线性相关与线性无关(190)　二、向量组线性相关的充分必要条件(196)
习题 4.2 …………………………………………………… (200)
4.3　向量组的秩 …………………………………………… (201)
一、等价向量组(201)　二、向量组的秩(202)　三、矩阵等价的应用(207)
习题 4.3 …………………………………………………… (209)
4.4　线性方程组解的结构 ……………………………… (211)
一、齐次线性方程组的基础解系(211)　二、非齐次线性方程组解的结构(217)
习题 4.4 …………………………………………………… (220)
*4.5　向量空间 …………………………………………… (221)
一、向量空间的概念(221)　二、向量空间的基与维数(224)
习题 4.5 …………………………………………………… (227)
学习指导(四)…………………………………………… (227)
复习思考题(四)………………………………………… (241)
测验(二)………………………………………………… (244)

***第五章　相似矩阵与二次型**

5.1　向量的内积与正交 ………………………………… (250)
一、向量的内积(250)　二、线性无关向量组正交化方法(253)　三、正交阵(256)
习题 5.1 …………………………………………………… (258)
5.2　方阵的特征值与特征向量 ………………………… (259)
一、定义与性质(259)　二、方阵的特征值与特征向量的求法(260)
习题 5.2 …………………………………………………… (264)

5.3 相似矩阵 …………………………………………… (264)
一、相似矩阵及其性质(264) 二、方阵能与对角阵相似的充分必要条件(265)
习题 5.3 …………………………………………………… (268)
5.4 对称阵的对角化 ……………………………………… (269)
一、对称阵的特征值与特征向量(269) 二、化对称阵为对角阵(270)
习题 5.4 …………………………………………………… (276)
5.5 二次型及其标准形 …………………………………… (277)
一、二次型及其矩阵表示形式(277) 二、用正交变换化二次型为标准形(279)
习题 5.5 …………………………………………………… (283)
学习指导(五)……………………………………………… (284)
复习思考题(五)…………………………………………… (292)
测验(三)…………………………………………………… (294)

第一章　行列式

行列式产生于解线性方程组,解线性方程组的问题在许多实际问题中都会遇到.本章先从消元法解二元、三元线性方程组引入二阶和三阶行列式,再将它推广到 n 阶行列式,进而介绍行列式的性质和计算方法,最后给出解线性方程组的克莱姆(Cramer)法则.

1.1　n 阶行列式的定义

一、二阶和三阶行列式

我们从消元法解二元线性方程组,引入二阶行列式.

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & ② \end{cases} \tag{1-1}$$

其中,$a_{ij}(i,j=1,2)$是未知数 $x_j(j=1,2)$的系数,$b_i(i=1,2)$是常数项.

用消元法解此线性方程组,以 a_{22}乘①式减去 a_{12}乘②式(记作 $a_{22}\times①-a_{12}\times②$),得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

以 a_{11}乘②式减去 a_{21}乘①式(记作 $a_{11}\times②-a_{21}\times①$),得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1 = a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,方程组(1-1)有唯一解为

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \\
x_2 = \dfrac{a_{11} b_1 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}.
\end{cases}
\tag{1-2}
$$

从(1-2)式可以看到，x_1, x_2 的分母都等于 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，它是由方程组(1-1)的系数所确定的. 如果将方程组(1-1)的系数按原来位置排成两行两列(横的称为**行**，竖的称为**列**)的方表：

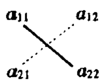

图 1-1

从图 1-1 可以看出，$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$就是方表中用实线表示的对角线(称为**主对角线**)上的两个数的乘积减去用虚线表示的对角线(称为**次对角线**)上两个数的乘积所得的差. 通常用记号

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}
$$

表示 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，即定义

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.
$$

称为**二阶行列式**，其中 $a_{ij}(i, j = 1, 2)$称为这个行列式的第 i 行第j 列的**元素**.

二元线性方程组(1-1)的解(1-2)中的两个分子 $b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$ 和 $a_{11}b_2 - a_{21}b_1$ 也可分别用二阶行列式

$$
\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}
$$

表示，即

$$
\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}
$$

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.
$$

这样，当方程组(1-1)的系数所组成的行列式(称为方程组(1-1)的系数行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，方程组(1-1)的唯一解可用行列式表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{21} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

其中，x_1，x_2的分母 D 是由方程组(1-1)的系数所构成的二阶行列式，x_1 的分子 D_1 是用方程组(1-1)的常数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}，a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用方程组(1-1)的常数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{21}，a_{22}所得的二阶行列式.

例 1.1 用行列式解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 = 2. \end{cases}$$

解 因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1 \neq 0,$$

所以方程组有唯一解.其解为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix}1&1\\3&2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2\\3&5\end{vmatrix}}=\frac{-1}{-1}=1$$

类似地,我们定义三阶行列式如下:

设有九个数 $a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3)$排成三行三列的数表.规定这九个数的行列式为

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

称为**三阶行列式**.

从上述定义可知,三阶行列式是六项的代数和,每项都是不同行不同列的三个数的乘积再冠以正负号,三项冠正号,三项冠负号.它可以用图 1-2 记忆:图中每条实线(共三条)所连接的三个数的乘积前面加正号,每条虚线(共三条)所连接的三个数的乘积前面加负号.这一计算三阶行列式的方法叫做**对角线法**.

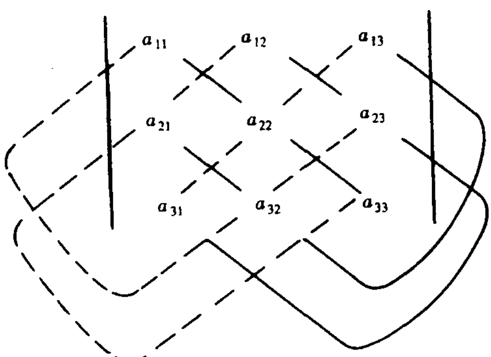

图 1-2

例 1.2 用对角线法计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&-2&3\\-4&5&-6\\7&-8&9\end{vmatrix}.$$

解 由对角线法,有

$$\begin{aligned}D&=1\times5\times9+(-2)\times(-6)\times7+3\times(-4)\times(-8)\\&\quad-1\times(-6)\times(-8)-(-2)\times(-4)\times9-3\times5\times7\\&=45+84+96-48-72-105=0.\end{aligned}$$

类似地,我们可以利用三阶行列式来解三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{1-3}$$

记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}$$

其中,D 称为方程组(1-3)的系数行列式,D_j 是以常数项 b_1,b_2,b_3 分别替换系数行列式中 a_{1j},a_{2j},a_{3j}(未知数 x_j 的系数)所得的行列式.于是,当系数行列式 $D\neq0$ 时,方程组有唯一解:

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

上述用行列式解线性方程组的方法称为克莱姆法则.

例 1.3 解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+\ \ x_2-\ \ x_3=1\\ \ \ x_1+2x_2+\ \ x_3=2\\ \ \ x_1+\ \ x_2+2x_3=3\end{cases}$$

解 因为系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}=6\neq 0$$

所以方程组有唯一解.而

$$D_1=\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&2&1\\3&1&2\end{vmatrix}=6,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\1&3&2\end{vmatrix}=0,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&2\\1&1&3\end{vmatrix}=6,$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=0,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=1.$$

二、二阶行列式与三阶行列式的关系

由二阶行列式与三阶行列式的定义,可得

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}.$$

从上式可以看到,三阶行列式等于它的第一行的每个元素分别乘一个二阶行列式的代数和.为了进一步说明这些二阶行列式与原来三阶行列式的关系,下面引入余子式和代数余子式的概念.

在三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中,划去元素 a_{ij}所在的第 i 行元素与第 j 列元素,剩下的元素按原来位置顺序所组成的二阶行列式叫做元素 a_{ij}的**余子式**,记作 M_{ij},称$(-1)^{i+j}M_{ij}$为元素 a_{ij}的**代数余子式**,记作 A_{ij},即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

例如,在三阶行列式 D 中,元素 a_{13}的余子式 M_{13}是在 D 中划去 a_{13}所在的第一行和第三列所有元素,剩下的元素按它们在 D 中的原来位置顺序组成的二阶行列式,即为

$$M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

而元素 a_{13}的代数余子式为

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

利用代数余子式,三阶行列式可写成

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13},$$

这表明,三阶行列式等于它的第一行的每一个元素与对应的代数余子式的乘积的和.

对三阶行列式所含的 6 项作另一种组合,还可把三阶行列式写成

$$D=a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+a_{23}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{33},$$

或

$$D=a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{vmatrix}+a_{32}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{21}&a_{23}\end{vmatrix}$$

$$+a_{33}(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}.$$

综合之,得

$$\begin{aligned}D&=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}\\&=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}A_{ik},\quad(i=1,2,3).\end{aligned}\tag{1-4}$$

(1-4)式表明,三阶行列式等于它的任一行的三个元素与对应的代数余子式乘积的和.

(1-4)式称为三阶行列式按第 i 行展开的展开式.类似地,容易验证三阶行列式的按列展开式为

$$\begin{aligned}D&=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}\\&=\sum_{k=1}^{3}a_{kj}A_{kj},\quad(j=1,2,3).\end{aligned}\tag{1-5}$$

(1-5)式表明,三阶行列式也等于它的任一列的三个元素与对应的代数余子式乘积的和.

如果规定一阶行列式 $D_1=|a_{11}|=a_{11}$,并记二阶行列式中元素 $a_{ij}(i,j=1,2)$的代数余子式分别为

$$A_{11}=(-1)^{1+1}|a_{22}|=a_{22},\quad A_{12}=-|a_{21}|=-a_{21},$$

$$A_{21}=-|a_{12}|=-a_{12},\qquad A_{22}=|a_{11}|=a_{11},$$

于是二阶行列式也有类似的按行(列)展开式:

$$\begin{aligned}D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}&=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}\\&=\sum_{k=1}^{2}a_{ik}A_{ik},\quad(i=1,2),\end{aligned}$$

以及

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}$$