



跟我学经济数学

李林曙等 编著

高等教育出版社

财经教材

98
F224.0
181
2

跟我学 经济数学

李林曙等 编著

高等教育出版社

(京)112号

内 容 提 要

本书是中央广播电视大学重点建设课程和全国电大共建课程“经济数学基础”的多种媒体一体化教材的文字辅教材.为与主教材保持一致,全书分章设置,每章的编排结构由学习方法引荐、主要内容回顾、重点与难点、疑难分析、跟我学解题、综合练习、问题解答等七部分组成.其中跟我学解题是本书的主体部分,每一例题实际上是3个相近例题,分为详解式、对照练习和自我练习三个阶段,这样的跟我学解题三段梯度式的设计,可使学生在“由看题,到跟做题,最后自己做题”的过程中,逐渐理解基本概念,掌握基本的解题方法.

本书除供全国电大经济管理类专业学生使用外,也可供全国各高等院校、成人高校和职工大学同类或相近专业学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

跟我学经济数学/李林曙等编著. —北京:高等教育出版社, 1998.7

ISBN 7-04-006434-0

I. 跟… II. 李… III. 经济数学—电视教育—教材
IV. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 06095 号

*

高等教育出版社出版

北京沙滩后街 55 号

邮政编码:100009 传真:64014048 电话:64054588

新华书店总店北京发行所发行

高等教育出版社发行

北京印刷二厂印刷

*

开本 787×1092 1/16 印张 21 字数 390 000

1998 年 7 月第 1 版 1998 年 7 月第 1 次印刷

印数 0 001—10 081

定价 23.50 元

凡购买高等教育出版社的图书,如有缺页、倒页、脱页等
质量问题者,请与当地图书销售部门联系调换

版权所有,不得翻印

前 言

经济数学基础课程使用多种媒体一体化的教材,本书作为该课程主教材《经济数学基础》的辅教材,是一体化教材的重要组成部分,是主媒体之一.为加强导学、助学,帮助学生学好本课程,本书在内容的编排和设计上进行了大胆的尝试.全书分章设置,与主教材保持一致.每章的编排结构如下:

(一) 学习方法引荐 每章开始,配合录音教材给出“学习方法引荐”,给学生提示本章学习要点,知识点间的逻辑关系,学习主线的把握以及相应的学习方法指导等.

(二) 主要内容回顾 与主教材相呼应,再次让学生回顾本章的主要概念、定理、性质、公式和方法等,以强化记忆.

(三) 重点与难点 指出本章的重点与难点,以使学生有的放矢地进行学习.

(四) 疑难分析 用浅显的、学生易于接受的语言,对本章较难掌握的主要概念、定理、公式、方法等,进行必要的解释.

(五) 跟我学解题 这是本教材的主体部分.每个例题实际上是3个相近例题,分成3个阶段,即为三段式安排.

第一段——详解式,首先给出例题的详细分析,然后依据解题分析,给出简明规范的解答,必要时给以归纳小结;

第二段——对照练习,给出一个与第一段相近的例题,并且给出解答,但是解答过程中的有些重要步骤留空,由学生填写完成.必要时配以提示.

第三段——自我练习,给出与前两段相近的例题,按照前两段的渐进过程,由学生自己独立完成.

跟我学解题三段梯度式的设计,意在使学生在“由看题,到跟做题,最后自己做题”的过程中,逐渐理解基本概念,掌握基本的解题方法.

(六) 综合练习 本书给出一定量的练习题,其中有填空题,选择题(包括单项选择、多项选择、配伍和是非判断题)、计算题、应用题和简单证明题等多种题型.目的在于加强对基本概念和基本方法的练习,提高计算速度.

(七) 问题解答 包括主教材中思考题的解答,对照练习中的填空答案,自我练习的参考答案和综合练习的参考答案.

自我练习中例题和综合练习的详细解答,可在供学生系统复习、自测的CAI课件光盘——《跟我学经济数学》中找到.

本书的附录有以下内容:

(一) 主教材各章节的练习和习题参考答案.

(二) 《解题方法和应答分析》,介绍解题方法和考试前的准备工作.

(三) 《广播电视大学高等专科学校 经济数学基础课程考试大纲》,说明了期末考试的性质、考核

知识点及要求、分数分配、题型以及难度等,并附有模拟试题及答案。

为便于各地电大师生掌握本课程的教学要求,更好地发挥音像课的作用,本书的正文之前给出了《广播电视大学高等专科学校经济数学基础课程教学大纲》和《经济数学基础录像课教学进度》、《经济数学基础录音课教学进度》。

本书在编写过程中,得到主教材主编黎诣远教授和经济数学基础课程主讲施光燕教授的关怀和指导。孙天正教授、叶其孝教授、胡显佑教授和柴全战副教授对本书做了认真的审定。中央电大校长助理任为民教授直接参与和指导了本书的教学设计工作。高等教育出版社的杨祥、张爱和、郭思旭、文小西、高尚华等同志也为本书的编辑出版付出了辛勤的劳动。在此一并表示感谢。

参加本书编写的有顾静相(第0,3章)、陈卫宏(第1章,第5章的部分工作)、赵坚(第2章)、李林曙(第4,5章)、张旭红(第6,10章)、冯泰(第7,8章和第9章的部分工作,附录Ⅱ)、梁映森(第9章)。冯泰负责第0~3章的前期统稿,顾静相负责第6~10章的前期统稿,最后由李林曙负责全书的统稿。

由于我们的水平所限,错误和不足之处在所难免。恳求读者批评指正。

编 者

1997年10月于北京

目 录

前 言	1	重点与难点	44
广播电视大学高等专科经济数学基础课		疑难分析	44
程教学大纲(1996 年 6 月 29 日审定)	1	跟我学解题	49
经济数学基础录像课教学进度	1	综合练习	58
经济数学基础录音课教学进度	7	问题解答	62
第 0 章 预备知识	1	主教材思考题答案	62
学习方法引荐	1	对照练习答案	62
主要内容回顾	2	自我练习答案	62
重点与难点	2	综合练习答案	63
疑难分析	3	第 3 章 导数应用	65
跟我学解题	6	学习方法引荐	65
综合练习	15	主要内容回顾	66
问题解答	20	重点与难点	66
主教材思考题答案	20	疑难分析	66
对照练习答案	21	跟我学解题	69
自我练习答案	21	综合练习	77
综合练习答案	22	问题解答	82
第 1 章 函 数	24	主教材思考题答案	82
学习方法引荐	24	对照练习答案	84
主要内容回顾	24	自我练习答案	84
重点与难点	25	综合练习答案	85
疑难分析	25	第 4 章 一元函数积分学	87
跟我学解题	28	学习方法引荐	87
综合练习	37	主要内容回顾	88
问题解答	40	重点与难点	88
主教材思考题答案	40	疑难分析	88
对照练习答案	41	跟我学解题	93
自我练习答案	41	综合练习	107
综合练习答案	42	问题解答	112
第 2 章 一元函数微分学	43	主教材思考题答案	112
学习方法引荐	43	对照练习答案	113
主要内容回顾	44	自我练习答案	113
		综合练习答案	114

第5章 积分应用	115	重点与难点	174
学习方法引荐	115	疑难分析	174
主要内容回顾	115	跟我学解题	177
重点与难点	115	综合练习	186
疑难分析	116	问题解答	190
跟我学解题	119	主教材思考题答案	190
综合练习	130	对照练习答案	191
问题解答	133	自我练习答案	192
主教材思考题答案	133	综合练习答案	193
对照练习答案	133	第9章 矩 阵	194
自我练习答案	134	学习方法引荐	194
综合练习答案	134	主要内容回顾	194
第6章 数据处理	136	重点与难点	195
学习方法引荐	136	疑难分析	195
主要内容回顾	137	跟我学解题	201
重点与难点	137	综合练习	209
疑难分析	137	问题解答	212
跟我学解题	141	主教材思考题答案	212
综合练习	149	对照练习答案	213
问题解答	152	自我练习答案	214
主教材思考题答案	152	综合练习答案	215
对照练习答案	152	第10章 线性方程组	216
自我练习答案	154	学习方法引荐	216
综合练习答案	155	主要内容回顾	217
第7章 随机事件与概率	157	重点与难点	217
学习方法引荐	157	疑难分析	217
主要内容回顾	157	跟我学解题	219
重点与难点	157	综合练习	227
疑难分析	158	问题解答	231
跟我学解题	162	主教材思考题答案	231
综合练习	167	对照练习答案	232
问题解答	170	自我练习答案	233
主教材思考题答案	170	综合练习答案	233
对照练习答案	171	附录 I 主教材练习和习题答案	235
自我练习答案	171	附录 II 解题方法与应答分析	271
综合练习答案	172	附录 III 广播电视大学高等专科 经济数学基础课程考试大纲	297
第8章 随机变量与数字特征	173	附录 IV 模拟试题及答案	305
学习方法引荐	173		
主要内容回顾	173		

第 0 章

预备知识

学习方法引荐

本章主要介绍学习《经济数学基础》中心内容——一元函数微积分、概率论、矩阵代数等所需的,也是经济和管理学科学生必须具备的基础知识,内容主要有实数、方程、不等式、集合与区间等.由于本章主要是复习初等数学,罗列的基本概念、基本运算方法较多,内容涉及面较广,而安排的学时数较少.因此,读者在学习本章时应该根据自己的数学基础,首先抓住一两个自己比较薄弱的内容,重点学习,力求掌握.其次要全面复习本章内容,对一些主要概念、性质及运算方法重点进行复习,例如:

实数系——要知道实数系的基本组成,即应该记住实数系表.重点是要了解实数是由有理数和无理数组成,而有理数是指能表示为两个整数相除形式的数,包括整数、分数、有限小数和无限循环小数;无理数是指无限不循环小数,即不能表示为两个整数相除形式的数.要掌握实数的运算规则:在没有括号的算式中,先算乘方、开方,再算乘法、除法,最后算加法、减法.如果算式中有括号,先算小括号内的算式,然后算中括号内的算式,最后算大括号内的算式.

绝对值——重点是要了解一个数的绝对值,在数轴上就是表示这个数的点到原点的距离,它一定是一个大于或等于 0 的数,即正数的绝对值是它本身,负数的绝对值是它的相反数,0 的绝对值是 0.

同解方程——重点是要掌握同解方程的两个性质(又叫做方程的变形规则),要能利用这两个性质将原方程(组)逐步变形,化简成便于求解的同解方程(组).

直角坐标系——要知道在一平面上,两条数轴成直角相交,构成一个平面直角坐标系,通常规定水平方向的数轴叫做 x 轴,垂直方向的数轴叫做 y 轴,两条数轴的交点叫做坐标原点(记为 O), x 轴的原点右边为正方向, y 轴的原点上方为正方向.重点是要知道在平面中取定直角坐标系之后,平面上的点 P 与有序实数对 (x, y) 是一一对应的,其中 x 表示点 P 到 y 轴的距离,叫做点 P 的横坐标; y 表示点 P 到 x 轴的距离,叫做点 P 的纵坐标.

直线方程(组)——要知道直线方程(组)的定义,直线方程(组)又叫做二元一次方程(组).重点是要了解直线方程组解的情况:当两条直线重

叠时,这两条直线对应的直线方程组有无穷多解;当两条直线相交时,它们对应的方程组有唯一解,两条直线交点的坐标就是该方程组的唯一解;当两条直线平行时,它们对应的方程组无解.

不等式——要了解不等式的性质,重点是要了解不等式“乘负数”和不等式“传递”的性质.要知道含有未知量的不等式解法与方程解法类似,即是利用其性质逐步求出使不等式成立的未知量取值的范围.所以,不等式的解一般是一定范围内的数,这一点与方程的解是不一样的.

集合与元素——要知道集合是一些具有确切含义的若干事物的全体,而这些事物叫做集合的元素.重点是要了解集合有两种表示方法:列举法和描述法,有三个特殊的集合:子集、全集、空集.集合之间有三种关系:包含、相等和不包含.要掌握集合之间的四种运算:并、交、差、补和它们具有的性质.要了解五个常用的集合运算律:交换律、结合律、分配律、吸收律、摩根律.

区间和邻域——要知道区间是实数轴上某一段数值的集合,若该数值段的两个端点是两个确定的数,将其叫做有限区间,否则叫做无限区间.有限区间包含四种形式,而无限区间有五种形式.区间可以用集合或不等式两种方式表示.

邻域是实数轴上以某点为中心,左、右对称的、长度为一较小正数的2倍的开区间,是一种特殊的开区间.

通过复习,使自己能正确理解和熟练掌握这些内容,做到对本章内容真正地融会贯通,为学习《经济数学基础》中心内容和后续课程打下扎实的基础.

主要内容回顾

主要概念——

主要公式——

主要性质——

主要方法——

重点与难点

重点:实数系,方程组的解法,不等式的解法,集合概念与运算.

难点:一元二次方程的解法,不等式的解法,集合的关系和运算.

疑难分析

一、关于无理数

实数由有理数和无理数组成,全体实数与数轴上的点是一一对应的.

无理数是无限不循环小数,即无理数具有无限位小数,而且这些小数是不循环的.因此,若一个数有有限位小数,不管其有多少位小数,由有理数定义易知,这个数是有理数;若一个数有无限位小数,但这些小数是循环小数(只要找出两个循环节),这个数也是有理数.

如 $\sqrt{3}, \sqrt[3]{7}, \pi, \lg 2$ 等是无理数,无理数与有理数进行加、减、乘、除四则运算,结果还是无理数.例如

$$9 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt[3]{7}, 2 \times \pi, 4 \div \lg 2$$

仍然是无理数.在实数中,无理数也有正、负之分,无理数也有无限多个.

二、关于一元二次方程的解法

对一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$),最基本的解法是公式法.但是,当一元二次方程的二次项系数 $a = 1$ 时,原方程变为 $x^2 + bx + c = 0$,此时常用配方法或因式分解法求解.下面简单介绍这三种方法.

1. 公式法: 一般先用解的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$,判别方程是否有解,若有解,再利用求根公式写出方程的解.否则,判定方程无解.

当 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ 时,方程有两个不同的实数解

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

当 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 时,方程有两个相同的实数解

$$x_1 = \frac{-b}{2a} = x_2$$

当 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时,方程无实数解.

2. 配方法: 首先将方程中常数项移到等号右边,即

$$x^2 + bx = -c$$

然后在等号的两边分别加上一次项系数一半的平方,得

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = -c + \left(\frac{b}{2}\right)^2, \quad \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4c}{4}$$

若 $b^2 - 4c \geq 0$ (否则无解)再开方,即可求得方程的解

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

3. 因式分解法: 设方程等号左边的各项可以写成两个一次项的乘积,即

$$x^2 + bx + c = (x + p)(x + q)$$

由

$$(x+p)(x+q) = x^2 + (p+q)x + pq$$

得 $x^2 + bx + c$ 的系数和常数与两个一次项 $(x+p)$, $(x+q)$ 中常数之间的关系为

$$b = p + q, c = pq$$

也就是说,将 $x^2 + bx + c$ 分解因式时,只需找到两个数 p 和 q ,使它们满足上述两式即可.

三、关于求解二元一次方程组的消元法

求解二元一次方程(直线方程)组常用的方法是消元法.因为二元一次方程与一元一次方程的不同之处只是多了一个未知量,消元法的基本思想就是设法消去二元一次方程中的一个未知量,将其化成一元一次方程,然后求出这个未知量的数值.再将这个未知量的数值代入方程组中的某一个方程中,求出另一个未知量的数值,获得原方程组的解.这种思想也将在第10章求解 n 元线性方程组中应用.

消元法求解二元一次方程组的过程如下.设二元一次方程组为

$$\begin{cases} ax + by = m & \cdots \cdots ① \\ cx + dy = n & \cdots \cdots ② \end{cases}$$

若 $a, c \neq 0$,则②式的 a 倍加上①式的 $-c$ 倍,得

$$(ad - bc)y = an - cm \quad \cdots \cdots ③$$

如果 $ad - bc \neq 0$,那么③式的等号两边同乘 $(ad - bc)^{-1}$,得

$$y = \frac{an - cm}{ad - bc} \quad \cdots \cdots ④$$

将④式代入①式(或②式),得

$$x = \frac{dm - bn}{ad - bc} \quad \cdots \cdots ⑤$$

上述④,⑤两式就是原方程组的解.消元法求解过程主要是利用方程的同解变形.方程的同解变形只是将方程组中的方程逐步变形,化简成同解的一元一次方程,而不改变方程组的解.

四、关于一元二次不等式的图形解法

一元二次不等式 $ax^2 + bx + c \geq (\leq) 0$ 的求解方法,除了教材中介绍的分解因式法外,还可以用图形法解之.

用图形法解一元二次不等式时,关键的问题是要知道不等式 $ax^2 + bx + c \geq (\leq) 0$ 对应的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的图形与 x 轴有没有交点,有几个交点,交点的横坐标是什么.

如果 $a > 0$,那么一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的图形,都是形如图 0-1 所示开口向上的抛物线.

1. 若 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$,抛物线和 x 轴有两个交点(如图 0-1 中 l_1),

交点的横坐标(如 x_1 和 x_3)是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个不相等的实数解,则不等式 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 的解为 $x \leq x_1$ 和 $x \geq x_3$;而不等式 $ax^2 + bx + c \leq 0$ 的解为 $x_1 \leq x \leq x_3$.

2. 若 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, 抛物线和 x 轴有一个交点(如图 0-1 中 l_2), 交点的横坐标(如 x_2)是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个相等的实数解, 则不等式 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 的解为任意实数; 而不等式 $ax^2 + bx + c \leq 0$ 的解为 $x = x_2$.

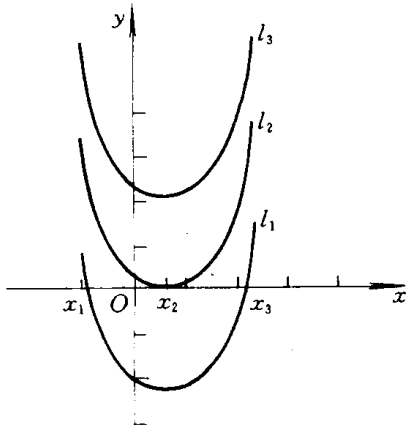


图 0-1 二次曲线

注意, 若不等式为 $ax^2 + bx + c > 0$, 则它的解为 $x \neq x_2$ 的任意实数; 而不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 无解.

3. 若 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, 抛物线和 x 轴没有交点(如图 0-1 中 l_3), 这表明方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 没有实数解, 则不等式 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 的解为任意实数; 而不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 无解.

五、关于两个集合 A 与 B 之间的关系

两个集合 A 与 B 之间有三种关系, 包含、相等和不包含.

当两个集合 A 与 B 之间有包含关系时, 其中的一个集合就是另一个集合的子集. 如果 A 包含 B , 则 B 是 A 的子集, 记作 $A \supseteq B$, 或 $B \subseteq A$.

在一个具体问题中, 涉及的所有集合都是全集 U 的子集, 空集是所有集合的子集.

一个集合 A 至少有两个子集, 一个是空集 $\emptyset$, 另一个是集合 A 自身, 但集合 A 不是 A 的真子集.

若 B 是 A 的子集, 且 A 中至少有一个元素 a 不属于 B , 即 $a \in A$ 且 $a \notin B$, 则 B 是 A 的真子集.

当 A 包含 B , B 也包含 A 时, 即 $A \supseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 时, A 与 B 相等, 记作 $A = B$. 因此, 两个集合相等是一种特殊的包含关系.

当两个集合 A 与 B 之间没有包含关系时, A 与 B 可能相交, 也可能不相交. 若 A 与 B 相交, 则至少存在一个元素 a , $a \in A$ 且 $a \in B$; 若 A 与 B 不相交, 则 A 与 B 中没有相同的元素.

六、关于区间

区间分为两类, 一类是有限区间, 另一类是无限区间.

有限区间是以两个实数 a, b (设 $a < b$) 为端点的. 若区间包含两个端点, 则该区间是闭区间, 记作 $[a, b]$; 若区间不包含两个端点, 则该区间是

开区间,记作 (a, b) ;若区间只包含一个端点,则该区间是左开右闭区间或左闭右开区间,分别记作 $(a, b]$ 或 $[a, b)$.在以后的章节中,有限区间还可能用以下方式表示:

$$a \leq x \leq b, a < x < b, a < x \leq b, a \leq x < b$$

以 a, b 为端点的有限闭区间、开区间和半开区间的长度等于右端点 b 与左端点 a 的差 $b - a$.

无限区间至少有一端是无限的.为了表示无限区间,我们引进了正无穷大 $+\infty$ 和负无穷大 $-\infty$ 两个记号,使无限区间表示为

$$(-\infty, +\infty), (-\infty, b), (a, +\infty), (-\infty, b], [a, +\infty)$$

或

$$-\infty < x < +\infty, x < b, x > a, x \leq b, x \geq a$$

其中 a, b 是两个实数.

通常用无限区间 $(-\infty, +\infty)$ 表示实数集合 $\mathbf{R}$,用有限区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 表示实数 x_0 的 δ 邻域.

x_0 的 δ 邻域是一个以 x_0 为中心, δ 为半径,左右对称,长度为 2δ 的开区间,其中 δ 是一个较小的正数.

跟我学解题

例 1 计算 $\left(\left| -3\frac{1}{3} \right| - \left| 2\frac{1}{2} \right| \right) \div [-4^2 \times (-0.5)^3] \times \left(-1\frac{1}{5} \right)^2$

[分析] 在实数计算中,加、减、乘、除、乘方、开方这六种运算的先后顺序,以及算式中有括号时的运算顺序,在教材0.1.1节中已归纳,在做这类计算题时,一定要按照教材中给出的顺序计算.

在算式中若有绝对值,应先将绝对值的符号化去,即按照“正数的绝对值是它本身,负数的绝对值是它的相反数”的规则写出绝对值的数值,然后再按照实数计算的顺序进行计算.

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= \left(\frac{10}{3} - \frac{5}{2} \right) \div [-16 \times (-0.125)] \times \frac{36}{25} \\ &= \frac{5}{6} \div 2 \times \frac{36}{25} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

[对照练习 1] 计算 $-\frac{1}{4} \div \left| (-2)^2 - 1\frac{1}{2} \right| - \left[\left(3\frac{3}{8} + 2\frac{1}{5} \right) - 3.375 \right]$

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= -\frac{1}{4} \div \left| 4 - \frac{3}{2} \right| - \left(\quad \right) = -\frac{1}{4} \times \left(\quad \right) - 2\frac{1}{5} \\ &= \left(\quad \right) \end{aligned}$$

[自我练习 1] 计算 $-2^3 \times 0.25 - \left[4 \div \left(-\frac{2}{3} \right)^2 \times 9 + 5 \times (-3)^3 \right]$

例 2 比较三个数 $-\left(-\frac{3}{4}\right)$, $|-0.70|$, 80% 的大小, 并按大小顺序用 $>$ 号连接起来.

[分析] 比较数的大小, 一般是将被比较的几个数, 统一化成整数、小数或分数, 然后再比较它们的大小.

$$\text{解 } \because -\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} = 0.75, \quad |-0.70| = 0.70, \quad 80\% = 0.80$$

$$\text{且} \quad 0.80 > 0.75 > 0.70$$

$$\therefore \text{三个数的大小顺序为: } 80\% > -\left(-\frac{3}{4}\right) > |-0.70|.$$

[对照练习 2] 比较三个数 $-\frac{1}{6}$, -16.6% , $-|-0.1666|$ 的大小, 并按大小顺序用 $>$ 号连接起来.

$$\text{解 } \because -\frac{1}{6} = (\quad); \quad -16.6\% = -0.166; \quad -|-0.1666| =$$

$$(\quad);$$

$$\text{且} \quad -0.166 > -0.1666 > -0.1666\cdots$$

$$\therefore \text{三个数的大小顺序为: } (\quad).$$

[自我练习 2] 比较四个数 $2\frac{1}{5}$, $(-1.5)^2$, $|-2.24|$, 221% 的大小, 并按大小顺序用“ $>$ ”连接起来.

例 3 一集邮爱好者有中外邮票共 145 套, 其中中国邮票的套数比外国邮票的套数的 2 倍少 5 套. 问该集邮爱好者有中外邮票各几套?

[分析] 该集邮爱好者共有 145 套邮票, 若设他有 x 套中国邮票, 则他有外国邮票 $145 - x$ 套; 若设他有 x 套外国邮票, 则他有中国邮票 $2x - 5$ 套. 因此, 根据所作假设的不同, 就有不同的解法.

解 **[方法 1]** 设该集邮爱好者有 x 套中国邮票, 则他有外国邮票 $145 - x$ 套. 根据题意, 得

$$x = 2 \times (145 - x) - 5$$

解方程, 得

$$x = 95$$

且外国邮票的套数为

$$145 - 95 = 50$$

该集邮爱好者有中国邮票 95 套, 外国邮票 50 套.

[方法 2] 设该集邮爱好者有 x 套外国邮票, 则他有中国邮票 $2x - 5$ 套. 根据题意, 得

$$x + (2x - 5) = 145$$

解方程, 得

$$x = 50$$

且中国邮票的套数为

$$2 \times 50 - 5 = 95$$

该集邮爱好者有中国邮票 95 套, 外国邮票 50 套.

[对照练习 3] 某粮店存有大米 120 吨, 面粉 96 吨. 现在粮店每天卖出大米 15 吨, 面粉 9 吨. 问多少天后, 粮店剩余的大米与面粉一样多?

解 设 x 天后, 粮店剩余的大米与面粉一样多. 那么, x 天中卖出大米为 $15x$ 吨, 卖出面粉为 $9x$ 吨, x 天后粮店剩余大米()吨, 剩余面粉()吨. 根据题意, 得

() (写出方程式)

解这个方程, 得

$$x = 4$$

4 天后, 粮店剩余的大米与面粉一样多.

[自我练习 3] 某校为住校生分配宿舍, 如果每间宿舍住 5 人, 则有 2 人无处住; 如果每间宿舍住 6 人, 则可以多住 8 人. 问该校有多少住宿生? 有多少间宿舍?

例 4 解方程 $x^2 - 13x + 42 = 0$.

[分析] 本题是一元二次方程, 由“疑难分析”中关于一元二次方程的解法可知, 本题可以用三种基本方法——公式法、配方法、因式分解法解之.

解 [方法 1] 用公式法解.

$\because a = 1, b = -13, c = 42$, 且

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4 \times 1 \times 42 = 1$$

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数解. 由求根公式得方程的两个根

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{13 + \sqrt{1}}{2} = 7$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{13 - \sqrt{1}}{2} = 6$$

[方法 2] 用配方法解.

$$\because x^2 - 13x = -42, \quad x^2 - 13x + \left(\frac{13}{2}\right)^2 = -42 + \left(\frac{13}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 = \frac{169 - 42 \times 4}{4} = \frac{1}{4}, \quad x - \frac{13}{2} = \pm \frac{1}{2}$$

$\therefore$ 方程的两个不相等的实数解为

$$x_1 = \frac{13}{2} + \frac{1}{2} = 7, \quad x_2 = \frac{13}{2} - \frac{1}{2} = 6$$

[方法 3] 用因式分解法解.

$\because$ 二次项 x^2 的系数是 1, 且一次项 x 的系数可分解为 $-13 = -7 + (-6)$, 常数项可分解为 $42 = -7 \times (-6)$, 那么该方程可分解为

$$x^2 - 13x + 42 = (x - 7)(x - 6) = 0$$

即

$$x-7=0 \text{ 或 } x-6=0,$$

$\therefore$ 方程的两个根为 $x_1=7, x_2=6$.

[归纳] 当一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的二次项系数 $a \neq 1$ 时, 用配方法解比较繁琐, 一般可用公式法或因式分解法解之.

[对照练习 4] 解方程 $2x^2+7x+3=0$.

解 [方法 1] 用公式法解.

$$\because a=2, b=7, c=3, \text{ 且 } \Delta=b^2-4ac=7^2-4 \times 2 \times 3=25$$

$\therefore$ 方程()的实数解. 由求根公式得方程的两个根

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = (\quad)$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = (\quad)$$

[方法 2] 用因式分解法解.

$$\because 2x^2+7x+3 = \frac{1}{2}[(2x)^2+7(2x)+6]$$

把 $2x$ 作为一个未知量, 那么一次项 $2x$ 的系数可分解为 $7=1+6$, 常数项可分解为(), 该方程可分解为

$$\begin{aligned} 2x^2+7x+3 &= \frac{1}{2}[(2x)^2+7(2x)+6] \\ &= \frac{1}{2}(\quad)(2x+6)=0 \end{aligned}$$

即

$$2x+1=0 \text{ 或 } 2x+6=0$$

$\therefore$ 方程的两个根为 $x_1=(\quad), x_2=(\quad)$.

[自我练习 4] 解方程 $x^2+8x=33$.

例 5 用消元法求解方程组

$$\begin{cases} 3x-2y=5 & \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 5x+4y=12 & \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$$

[分析] 观察这个方程组, 方程②中未知量 y 的系数是方程①中 y 的系数的 -2 倍, 只要做“②式加上①式的 2 倍”的同解变形, 就可以消去 y , 从而得到一个一元一次方程, 然后再求出解.

解 $\because$ 将②式加上①式的 2 倍, 得 $11x=22, x=2$

把 $x=2$ 代入②式, 得 $5 \times 2 + 4y = 12, y = \frac{1}{2}$

$$\therefore \text{ 方程组的解为 } \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

[对照练习 5] 用消元法求解方程组

$$\begin{cases} 6x+5y=25 & \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 3x+4y=20 & \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$$

解 $\therefore$ 将①式加上②式的 -2 倍,得(), $y=5$.
把 $y=5$ 代入①式,得 $6x+5\times 5=25$, $x=()$

$$\therefore \text{方程组的解为} \begin{cases} x=() \\ y=() \end{cases}$$

[自我练习 5] 解方程组

$$\begin{cases} 2x - y + 2 = 0 & \cdots\cdots\text{①} \\ -3x + 2y = 0 & \cdots\cdots\text{②} \end{cases}$$

例 6 某水果公司每天的固定费用为 1 000 元,销售水果的平均成本为 3(元/kg),而销售的价格为 5(元/kg). 求出该公司销售水果的盈亏平衡点,即每天应当销售多少千克水果才能使公司的收支平衡.

[分析] 求解该问题的关键是列出销售成本直线方程和销售收入直线方程,列出两个方程后,可以通过画直线图,求出两条直线的交点,或通过解两个方程的联立方程组,获得该公司销售水果的盈亏(即收支)平衡点.

解 设每天水果销售量为 x kg,则该公司的销售成本为

$$y = 3x + 1000$$

销售后的收入为

$$y = 5x$$

[方法一] 在坐标系中画出这两条直线,如图 0-2.

由图 0-2 可知,两条直线的交点 P 的坐标为(500,2500),即保本点为

$$x = 500$$

因此,每天应销售 500 kg 水果才能收支平衡.

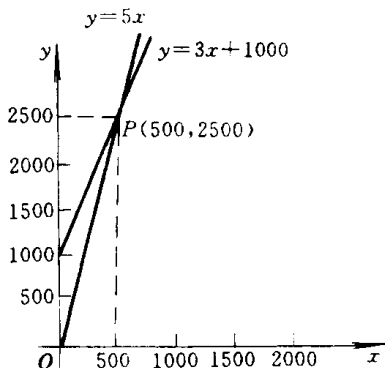


图 0-2 销售盈亏平衡点

[方法二] 如果将销售成本与销售收入整理成二元一次方程组的一般形式,并联立成方程组,即

$$\begin{cases} 3x - y = -1000 & \cdots\cdots\text{①} \\ 5x - y = 0 & \cdots\cdots\text{②} \end{cases}$$

用消元法求解方程组,即将②式加上①式的 -1 倍,得 $x=500$.

再将 $x=500$ 代入②式,得 $y=2500$. 那么,方程组的解是

$$\begin{cases} x = 500 \\ y = 2500 \end{cases}$$

因此,每天应销售 500 kg 水果才能收支平衡.

[对照练习 6] 假设某市场每天鸡蛋的供给量 S (单位:kg)与价格 p (单位:元)的关系可用直线方程表示为

$$S = 200p$$

而消费者对鸡蛋的需求量 q (单位:kg)与价格 p 的关系可用直线方程表