工程数学方法

廖祖纬　编

中央广播电视大学出版社

工程数学方法

廖祖纬　编

*

中央广播电视大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092　1/32　　印张 8.5　千字 176

1988 年 3 月 第 1 版　　1988 年 9 月第 1 次印刷

印数　　1--24,300

定价　1.75 元

ISBN　7-304-00274-3/O·29

前　言

本书是供中央广播电视大学工科学员使用的教材．目的是为学习电工原理、电路分析、电磁场理论、自动控制原理等专业基础课程提供必备的基础数学知识和分析方法．

本书内容暂由三部分组成：

第一部分——场论初步．用统一的思考模式介绍梯度、散度和旋度概念的引入过程以及有关的计算公式．配有 11 本（每本 50 分钟）系统讲授型录象教材．

第二部分——积分变换．着重介绍信号的谐波分解方法以及由此产生的两种最常用的积分变换．配有 6 本系统讲授型录象教材．

第三部分——复变函数．着重介绍复分析方法．以共轭调和函数、拉氏反演积分为目标构成一个小型而又自足的体系（重要结论均给予证明），配有 9 本系统讲授型录象教材．

这三个部分可看成三个相互独立的小型课程．既可单独使用，又可把数理方程作为第四部分（10 本录象教材）联合组成 36 课时的《工程数学方法》课程．其间的联系，书中埋有伏笔．

这三个部分可用 26 课时讲授完，它是在中央电大历届采用过的《高等数学》（三）和《复变函数》课程的基础上进一步精简而成的．

这样精简会不会给电大新的学员带来一定的知识损失？

会不会使各地电大老师的备课任务加重？这是大家共同关心的问题，也是笔者在接受此任之后就一直摆在首位的问题．为此在进行精简的同时，对教材内容的继承性给予了足够的重视，书中许多材料和例题以及大量的习题都取自历届电大教材和一般高校的教材．

这样精简带来的不足之处肯定是不少的，成功之处也可能会有．对不足之处，诚恳地希望各地老师和广大学员批评指正，以便今后改进；对成功之处，应归功于已列入书后以及未列入书后的参考教材的作者们，并特此向这些前辈和同仁表示衷心的感谢！

编　者

1988 年 3 月

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第三部分　复变函数

附　表

第一部分　场论初步

第一章　场与数量场的梯度

场的概念是从物理现象和许多实际问题中产生的．我们用数学语言来描述它，用数学方法来研究它，就会对它产生更深刻的认识和理解，就会获取有用的新知识．那么，如何运用数学语言描述并加以研究呢？这就是本章所要介绍的中心内容．

§1　场的概念

一、什么是场？

场是物理学中沿用的名词，如重力场、速度场、密度场、温度场、电场和磁场等等．

例如，设一刚体以恒定角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕过点 O 的轴 l 转动，则角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 位于轴 l 上．

令 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$，则

$$|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}|=\omega r\sin\alpha=\omega r\sin(\pi-\alpha)$$
$$=\omega\cdot\overline{PM}\quad|\boldsymbol{v}|$$

即 $|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}|$ 和点 M 处的线速度 $\boldsymbol{v}$ 的大小相等，又 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 都垂直于轴 l 和点 M 所决定的平面，故　　$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$

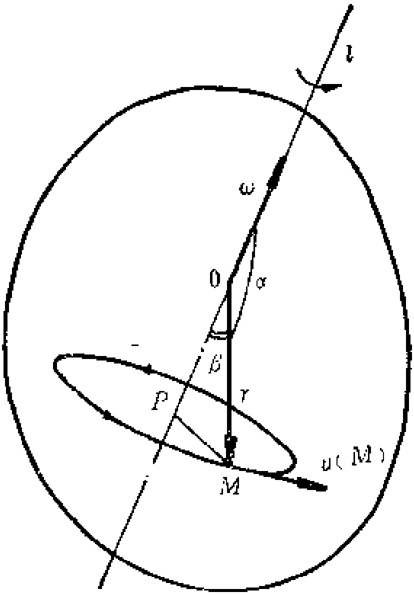


图 1.1

这就是恒速转动的刚体内部点M处的速度．这样，在恒速转动的刚体内部所呈现的线速度分布

$$\boldsymbol{v}(M)=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}(M),\ M\in V$$

就是一个速度场．其中V是刚体占据的空间区域．

数学中研究的场是抽象的场．讨论各种物理场所共有的数学内容，为使有关概念的引进与相应的计算直接联系起来，下面的讨论全部在直角坐标系中展开．

定义 1 场系指在空间区域V中按某种方式分布着的一种量(数量或矢量)．

若分布的是数量$\varphi(M)$ $(M\in V)$，则该场叫数量场；若分布的是矢量$\boldsymbol{a}(M)$ $(M\in V)$，则叫矢量场．

例 1 给定一元函数

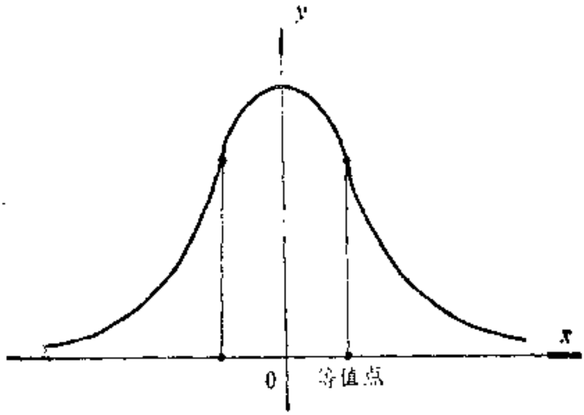


图 1.2

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},x\in R$$

其中 R 表示实数集合(实数轴),则在整个实数轴上形成一个直线数量场 $\varphi(x)(x\in R)$. 它可以看成是一元函数 $y=\varphi(x)$在坐标平面上确定的"几何形体"(钟形曲线下的面域)被"压缩"(沿纵向挤压成一条非均匀的质量线)到 x 轴上所呈现的分布状况.

例 2 给定二元函数

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},(x,y)\in R^2$$

其中 $R^2=R\times R$ 表示实数平面, 则在整个实数平面上形成一个平面数量场 $\varphi(x,y)(x,y)\in R^2$. 它可以看成是二元函数 $z=\varphi(x,y)$ 在三维空间中确定的"几何形体"(钟形曲面下的体域)被"压缩"(沿垂直方向挤压成一张非均匀的质量面)到 xy 坐标平面上所呈现的分布状况.

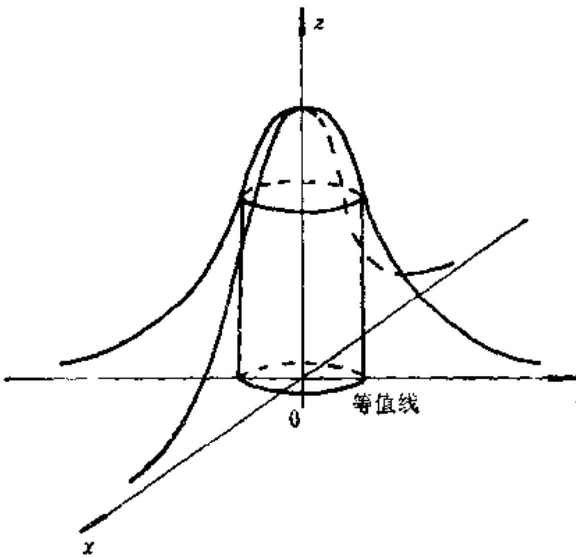


图 1.3

例 3 给定三元函数

$$\varphi(x,y,z)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}},\ (x,y,z)\in R^3$$

其中 $R^3=R\times R\times R$ 表示实数空间，则在整个实数空间上形成一个空间数量场 $\varphi(x,y,z)$ $(x,y,z)\in R^3$. 但三元函数在四维空间中的几何图形已无法画出来，但相应的几何形体被“压缩”到三维空间 R^3 上所呈形的分布状况还是不难想象的(原点密度达到最大的一种体质量分布).

综上，数量场是数量函数 $\varphi(M)$ $(M\in V)$ 在其定义域 V 上所形成的一种数量分布，即由 $\varphi(M)$ 所确定的几何形体被“压缩”到定义域 V 上所呈现出的分布状况.

类似地，矢量场是矢量函数

$$\boldsymbol{a}(M)=\{a_x(M),a_y(M),a_z(M)\},\ M\in V$$

在定义域V上所形成的一种矢量分布.

例 4 $\boldsymbol{a}(x,y)=\{x,y\},(x,y)\in R^2$

此矢量函数描述的平面矢量场如图 1.4 所示.

点$M(x,y)$处的矢量是将矢径$\overrightarrow{OM}$沿该矢径方向平移，并使起点O恰好移至点M而成.

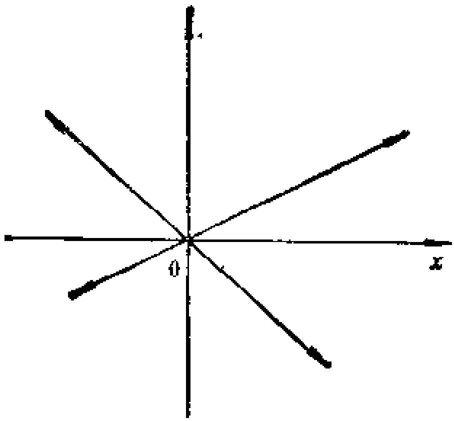


图 1.4

例 5 $\boldsymbol{a}(x,y)=\{x,-y\},(x,y)\in R^2$

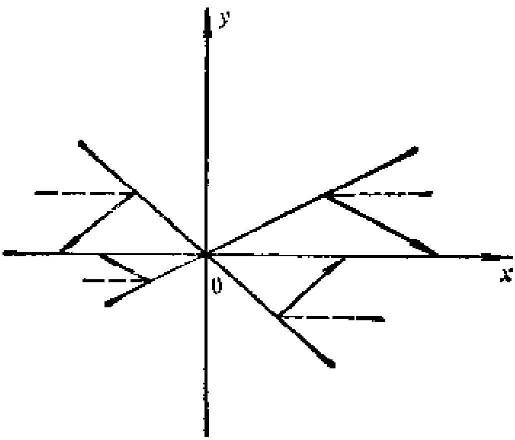


图 1.5

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

此矢量函数描述的平面矢量场如图 1.5 所示.
点 $M(x,y)$处的矢量与例 4 中同一点 $M(x,y)$处的矢量成水平镜象.

例 6 $\quad a(x,y)=\{y,-x\},(x,y)\in R^2$

此矢量函数描述的平面矢量场如图 1.6 所示.

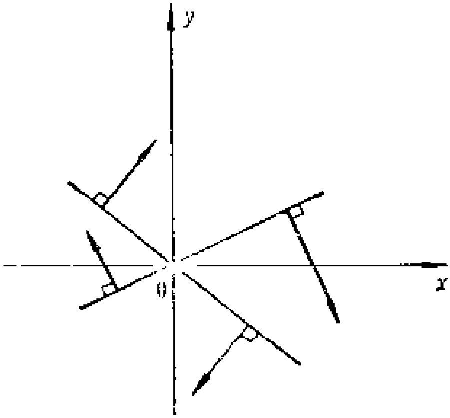


图 1.6

点 $M(x,y)$处的矢量是例 4 中同一点 $M(x,y)$处的矢量顺时针转 90°而成.

例 7 $\quad a(x,y)=\left\{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$

$$(x,y)\in R^2-\{(0,0)\}$$

此矢量场在原点无意义. 其图形与例 6 中的矢量场类似. 只是相应点的矢量模存在差别. 本例的矢量场中各点处的矢量大小都是同一个单位长度.

对空间矢量场就不举例说明了. 它由三元矢量函数描述,需要有较丰富的空间想象力.

下面介绍的等值面和矢量线对丰富空间想象力，进而研究空间场的结构特征有着特别重要的意义.

二、等值面

一个数量场的整体结构可以借助一簇等值面（线）来描绘.

定义 2 定义在 V 上的连续函数 $\varphi(M)$ 的等值面 σ，系指:

(1) $\sigma\subset V$，即 σ 包含在 V 里;

(2) 函数 $\varphi(M)$ 在 σ 上取相同的数值 c，即 $\forall M\in\sigma$，$\varphi(M)=c$（常数）.

例 8 以原点为中心的任一球面都是例 3 中空间数量场的一个等值面.

事实上，令

$$\varphi(x, y, x)=c\neq 0$$

即
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}}=c$$

则
$$e^{\frac{x^2+y^2+z^2}{2}}=\frac{1}{c}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3$$

故
$$x^2+y^2+z^2=2\ln\frac{1}{c(2\pi)^{3/2}}$$

即
$$x^2+y^2+z^2=-\ln c^2(2\pi)^3$$

当 $0<c<\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}$ 时，就将知等值面 σ 是一簇以原点为中的球面，并且不同等值面彼此互不相交.

同理，以原点为中心的任一个圆都是例 2 中平面数量场的等值线；以原点为中心的任一个对称区间的两个端点都是例 1 中直线数量场的等值点.

三、矢量线

一个矢量场的整体结构可以借助一簇矢量线来描绘.

定义 3 定义在 V 上的连续矢量函数 $\boldsymbol{a}(M)$ 的矢量线 γ，系指:

(1) $\gamma \subset V$，即 γ 包含在 V 里;

(2) 在曲线 γ 上任一点 M 处的切线方向和该点矢量 $\boldsymbol{a}(M)$ 的方向重合.

设曲线 γ 的参数方程

$$\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$$

则
$$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}=\left\{\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right\}$$

又

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \parallel \boldsymbol{a}(M)=\{a_x,a_y,a_z\}$$

故
$$\frac{dx}{a_x}=\frac{dy}{a_y}=\frac{dz}{a_z}$$

这就是矢量线 γ 应满足的微分方程.

例 9 求例 4—6 中矢量场的矢量线.

解 (1) 求解

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$$

得
$$\ln y=\ln x+C_1$$

或
$$\ln y=\ln Cx$$

即
$$y=Cx \quad (C\text{ 为任意常数}).$$

故例 4 中矢量场的矢量线为一簇从坐标原点出发的射线(图1.7).

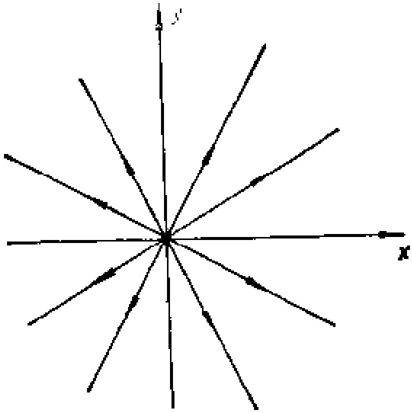


图 1.7

(2) 求解

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y}$$

得 $$\ln x+\ln y=\ln C$$

即 $$xy=C(C\text{ 为任意常数}).$$

故例 5 中矢量场的矢量线为一簇定向的双曲线(图 1.8).

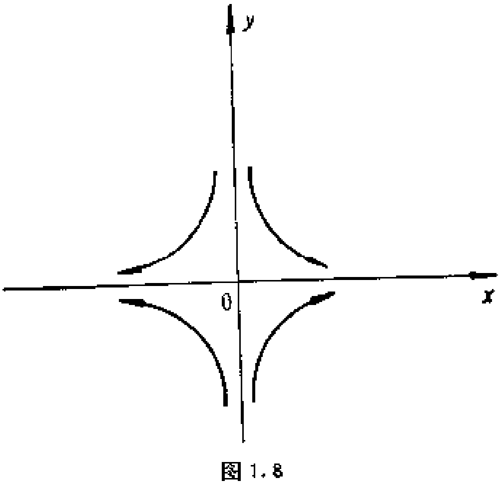


图 1.8

(3) 求解

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}$$

得

$$x^2+y^2=C(C\text{ 为任意常数})$$

故例 6 中矢量场的矢量线为一簇定向(顺时针)的同心圆(图 1.9).

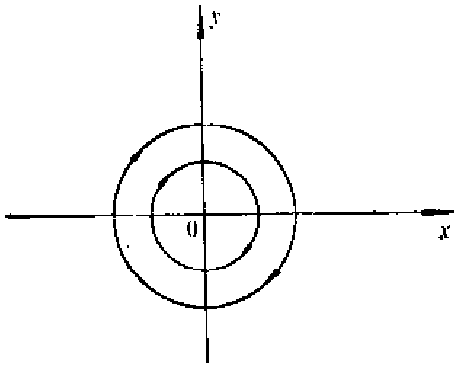
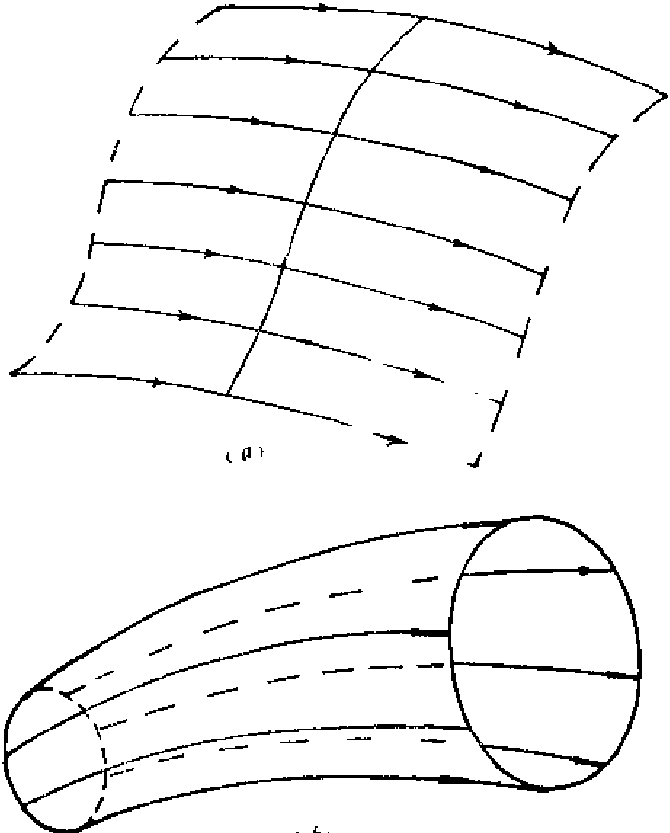


图 1.9

可见,当矢量 $\boldsymbol{a}(M)$ 不为零矢量时,整个区域 V 都由矢量线所填满,并且过区域 V 中每一点 M 都只有一条矢量线通过(V 中的矢量线不会相交).

在空间区域 V 中,任取一非矢量线的曲线 l,过 l 上每一点引一条矢量线,则这些矢量线形成一个曲面,称为矢线面,其特征是:矢线面上每一点的法向量与该点处的矢量 $\boldsymbol{a}(M)$ 互相垂直. 特别当曲线 l 为一闭曲线时,就形成一管形的矢线面,简称矢线管(图 1.10). 在研究管形场的基本性质时,要用到矢线管的概念.



(a)

(b)

图 1.10

习 题 一

1. 说出下列数量场所在的空间区域，并求出其等值面：

(1) $u=\dfrac{1}{Ax+By+Cz+D}$；

(2) $u=\arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com