高等学校试用教材

数学分析

下册

复旦大学数学系 陈传璋 金福临 朱学炎 欧阳光中 编

人民教育出版社

本书是在复旦大学数学系陈传璋等五同志1962年所编《数学分析》的基础上，根据理科数学教材会议精神改写的．本书为下册，内容有 1．多变量微分学：包括偏导数、全微分、极值理论、隐函数存在定理和函数相关的概念等；2．多变量积分学：包括含参变量的积分、重积分、曲线积分、曲面积分、场论初步等；3．级数论：包括数项级数与广义积分、函数项级数和含参变量的广义积分、富里埃级数等．

本书可作为综合大学和师范院校数学系的试用教材。

高等学校试用教材

数　学　分　析

下　册

复旦大学数学系　陈传璋　金福临　朱学炎　欧阳光中　编

＊

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

天津新华印刷二厂印装

＊

开本787×1092 1/32　印张11 14/16　字数286,000

1979年5月第1版　1980年3月天津第2次印刷

印数26,001—41,000

书号13012・0362　定价0.86元

目　　录

第三篇　多变量微积分学

第一部分　多变量微分学

第二部分 多变量积分学

第四篇　级　数　论

第一部分　数项级数和广义积分

第二部分　函数项级数和含参变量广义积分

第三篇　多变量微积分学

第一部分　多变量微分学

第十章　偏导数与全微分

§1. 偏导数和全微分的概念

一、偏导数的定义

对一元函数 $f(x)$，我们讨论了它关于 x 的导数，也就是 $f(x)$ 关于 x 的变化率，或者说是 $f(x)$ 沿 x 方向的变化率，同时我们也看到了函数变化率的重要性.对于多元函数，同样需要讨论它的变化率，但由于自变量的增多，情况较一元函数复杂，常常要考虑各个方向的变化率，对此我们可以先考虑函数关于其中一个自变量的变化率，以二元函数 $u=f(x, y)$ 为例，我们可以把 y 看作不变，这时它就是 x 的一元函数，对 x 求导，所得导数就称为二元函数 $f(x, y)$ 关于 x 的偏导数. 于是，利用极限概念，我们就可给出偏导数的定义:

定义　对函数 $u=f(x, y)$，如给 x 以增量 Δx，于是函数相应地得一改变量

$$\Delta_x u=f(x+\Delta x, y)-f(x, y)$$

若极限
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}$$

存在，则此极限值就称为函数 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处关于 x 的偏导数，记为:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \text{ 或 } \frac{\partial f}{\partial x}$$

也可记为

$$f_x(x, y)$$

类似地，如果极限

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y}$$

存在，此极限值就称为 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处关于 y 的偏导数，记为：

$$\frac{\partial u}{\partial y} \text{ 或 } \frac{\partial f}{\partial y}$$

也可记为：

$$f_y(x, y)$$

同样，对于二元以上的多元函数，例如 $u=u(x, y, z)$，当只有自变量 x 变化而 y, z 固定时，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y, z)-u(x, y, z)}{\Delta x}$$

是 u 关于 x 的偏导数.

由以上定义可见，求 $f_x(x, y)$ 只不过是在 $f(x, y)$ 中把 y 看作常数，而关于 x 求导数，这时用的就是一元函数的求导公式和运算法则.

例 1 气体的状态方程为 $p=\frac{RT}{V}$，讨论 p 关于 V 和 T 的偏导数.

解 在温度 T 不变的等温过程中，压力 p 关于体积 V 的瞬时变化率为 $p_V=\left(\frac{RT}{V}\right)_V=-\frac{RT}{V^2}$；同样，在体积 V 不变的等容过程中，压力 p 关于温度 T 的瞬时变化率为 $p_T=\left(\frac{RT}{V}\right)_T=\frac{R}{V}$.

例 2 设 $f(x, y)=xy+x^2+y^3$，求 $\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$，并求 $f_x(0, 1)$，

$f_x(1, 0)$, $f_y(0, 2)$, $f_y(2, 0)$.

解 求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$时，把 y 看成常量，所以 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=y+2x$, $f_x(0, 1)=1$, $f_x(1, 0)=2$; 求$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 时，把 x 看成常量，所以 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x+3y^2$, $f_y(0, 2)=12$, $f_y(2, 0)=2$.

例 3 设 $u=\ln(x+y^2+z^3)$，求 u_x, u_y, u_z.

解 三元函数的偏导数，是只有一个自变量变化而其余自变量看作常量时函数的变化率，因此，

$$u_x=\frac{1}{x+y^2+z^3},\quad u_y=\frac{2y}{x+y^2+z^3},\quad u_z=\frac{3z^2}{x+y^2+z^3}$$

由一元函数可导必定连续的结论可知，若 $f(x, y)$在点(x, y)关于x(或 y)可导，则 $f(x, y)$在点(x, y)关于 x (或 y)连续. 不过要注意，此时并不能推出 $f(x, y)$关于两个变量是连续的. 例如考虑下列函数

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

由偏导数的定义知道

$$f_x(0, 0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x, 0)-f(0, 0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$$

同理可求得 $f_y(0, 0)=0$, 但在第四章中已经指出此函数当 $x\to 0$, $y\to 0$ 时二重极限不存在，因而它在$(0, 0)$点是不连续的.

我们知道，如果一元函数在一点有导数，那么这导数就是函数所表示的曲线在对应点的切线的斜率. 由此可以推出，二元函数 $u=f(x, y)$在一点(x_0, y_0)的偏导数有下面的几何意义(图 10-1).

$u=f(x, y)$ 的图形是空间中的曲面, $M_0(x_0, y_0, u_0)=M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$是曲面上的点. 当 $y=y_0$ 时，$u_0=f(x, y_0)$表示曲面上过 M_0 点的一条曲线，它是曲面 $u=f(x, y)$和平面 $y=y_0$ 的交线. 把它看作平面曲线，其自变量是 x, 因变量是 u, u 关于

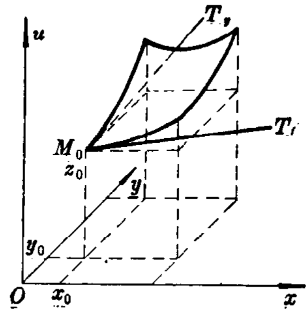

图 10-1

x 的导数 $f_x(x_0, y_0)$ 正好是曲线在 M_0 点的斜率，这样便得到曲线在 M_0 点的一个切向量 $\boldsymbol{T}_x$，它在 x 轴和 u 轴上的坐标分别是 1 和 $f_x(x_0, y_0)$，并且它在平面 $y=y_0$ 上，即

$$x=x,\ y=y_0,\ u=f(x,\ y_0)$$

曲线在 M_0 点的切向量 $\boldsymbol{T}_x$ 为 $(1,\ 0,\ f_x(x_0,\ y_0))$.

同样，曲面和平面 $x=x_0$ 的交线 $x=x_0,\ y=y,\ u=f(x_0,\ y)$ 的切向量 $\boldsymbol{T}_y$ 为 $(0,\ 1,\ f_y(x_0,\ y_0))$.

二、全微分的定义

对一元函数 $y=f(x)$，我们曾研究过 y 关于 x 的微分，它具有两个特性，即：(i)它与自变量的改变量成比例，(ii)当自变量的改变量趋于零时，它与函数的改变量 Δy 之差是较自变量的改变量更高阶的无穷小.

现在我们讨论多元函数情形，例如，对二元函数 $u=f(x,y)$，我们也从同样的思想出发，引进如下定义.

定义 若函数 $u=f(x,\ y)$ 的全改变量 Δu 可表示为

$$\Delta u=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)=A\Delta x+B\Delta y+o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right),$$

且其中 A, B 与 Δx, Δy 无关而仅与 x, y 有关，则称函数 $f(x,\ y)$ 在点 $(x,\ y)$ **可微**，并称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为 $f(x,\ y)$ 在点 $(x,\ y)$ 的**全微分**，记为 du 或 $df(x,\ y)$，即

$$du \equiv df(x,\ y) = A\Delta x + B\Delta y$$

若 $f(x,\ y)$ 在点 $(x,\ y)$ 可微，则有

$$f_x(x,\ y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,\ y) - f(x,\ y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A\Delta x + o(\sqrt{\Delta x^2})}{\Delta x} = A$$

这就是说在点 $(x,\ y)$ 可微，则 f_x 存在且等于 A，完全一样地可以证明此时 f_y 也存在且等于 B，故有

$$du = f_x \Delta x + f_y \Delta y$$

前已指出自变量的改变量等于自变量的微分，因之上式可写为

$$du = f_x(x,\ y)dx + f_y(x,\ y)dy$$

在这里，dx, dy 表示任意的量，并不依赖于 x 和 y，因此 du 实质上是依赖于 x, y, dx 和 dy 这四个变量的.

对 n 元函数 $u = f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 来说，相应的公式是

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n$$

以上说明若函数在一点可微，则在该点也一定存在偏导数，对一元函数而言，我们知道反过来也是正确的，但对二元函数就不尽然，例如，若

$$f(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

前已求出 $f_x(0,\ 0) = 0$, $f_y(0,\ 0) = 0$.

此时

$$\Delta u - du = [f(\Delta x,\ \Delta y) - f(0,\ 0)] - [f_x(0,\ 0)\Delta x + f_y(0,\ 0)\Delta y] = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

但 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 不存在，故函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点不可微. 由此可见，对一元函数而言，可微与可导是同一回事；而对多元函数来说，偏导数存在不一定可微，但是在一定条件下，偏导数与可微性之间有密切联系，这就是下面的定理所指出的.

定理 若 $f_x(x, y)$ 及 $f_y(x, y)$ 在点 (x, y) 及其某一邻域内存在，且在这一点它们都连续，则函数 $u=f(x, y)$ 在该点可微.

证明 我们把 Δu 写成如下形式，

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)\\
&=[f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x+\Delta x, y)]\\
&\quad +[f(x+\Delta x, y)-f(x, y)]
\end{aligned}
$$

由于假设 f_x 及 f_y 均存在，所以当 Δx, Δy 充分小时，可以把中值定理分别应用于每一个差，就有

$$\Delta u=f_y(x+\Delta x, y+\theta_1\Delta y)\Delta y+f_x(x+\theta_2\Delta y, y)\Delta x$$

$$\left(0<\begin{matrix}\theta_1\\ \theta_2\end{matrix}<1\right)$$

又由假设 f_x 及 f_y 均在点 (x, y) 连续，因而有

$$f_y(x+\Delta x, y+\theta_1\Delta y)=f_y(x, y)+\alpha$$

$$f_x(x+\theta_2\Delta x, y)=f_x(x, y)+\beta$$

且 $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ 时，α, β 都趋于零. 于是

$$\Delta u=f_x(x, y)\Delta x+f_y(x, y)\Delta y+\beta\Delta x+\alpha\Delta y,$$

而 $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ 时，

$$\frac{\beta\Delta x+\alpha\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\to 0$$

由定义可知，这就证明了 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微.

这个定理说明，我们如果求得一个函数的偏导数，且它们连续（对于一般初等函数，这是较易知道的），从而也就可知此函数可微，并且即可写出其微分.

例 4 设 $u=x^2y+xy^2$ 则有

$$du=2xydx+x^2dy+y^2dx+2xydy=(2xy+y^2)dx+(x^2+2xy)dy$$

例 5 写出 $f(x, y, z)=e^{x+z}\sin(x+y)$ 的全微分.

这时，$$f_x=e^{x+z}[\sin(x+y)+\cos(x+y)]$$

$$f_y=e^{x+z}\cos(x+y),\ f_z=e^{x+z}\sin(x+y)$$

于是 $$df=e^{x+z}[\sin(x+y)+\cos(x+y)]dx+e^{x+z}\cos(x+y)dy+e^{x+z}\sin(x+y)dz$$

三、高阶偏导数与高阶全微分

类似于一元函数，可以定义高阶偏导数，就二元函数 $u=f(x,y)$ 来说，$f_x(x, y)$ 及 $f_y(x, y)$ 仍是 x, y 的二元函数，还可以讨论它们关于 x 或 y 的偏导数，这些就称为函数 $f(x, y)$ 的二阶偏导数.

例如，$\frac{\partial u}{\partial x}$ 关于 x 再求偏导数，即 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ 就称为 $f(x, y)$ 关于 x 的二阶偏导数，记为 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 或 f_{xx}，也可记为 f_{x^2}. 相仿地，还有：

$$f_{xy}=\frac{\partial(f_x)}{\partial y},\ \text{或记为}\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$

$$f_{yx}=\frac{\partial(f_y)}{\partial x},\ \text{或记为}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

$$f_{yy}=\frac{\partial(f_y)}{\partial y},\ \text{或记为}\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ \text{也可记为}\ f_{y^2}.$$

同样，还可以定义更高阶的偏导数，如

$$f_{x^3}=\frac{\partial(f_{x^2})}{\partial x},\ \text{或记为}\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

$$f_{yx^2}=\frac{\partial(f_{yx})}{\partial x},\ \text{或记为}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2\partial y}$$

等等.

例 6 设 (1) $u(x, y)=xy$, (2) $u(x, y)=xe^x\sin y$, 求二阶偏导数.

解 (1) $u_x=y,\ u_{xx}=0,\ u_{xy}=1$

$$u_y = x,\ u_{yx} = 1,\ u_{yy} = 0$$

(2) $$u_x = e^x \sin y + xe^x \sin y = (x+1)e^x \sin y$$

$$u_{xx} = (x+1+1)\, e^x \sin y = (x+2)e^x \sin y$$

$$u_{xy} = (x+1)e^x \cos y$$

$$u_y = xe^x \cos y$$

$$u_{yx} = (x+1)e^x \cos y$$

$$u_{yy} = -xe^x \sin y$$

值得注意的是，这些函数关于 x, y 的两个二阶混合偏导数都相等，即 $u_{xy}=u_{yx}$；也就是说，这些函数的混合偏导数和先对 x 还是先对 y 求导的顺序无关．但是，这个结论并不是对任意的函数都成立，例如，考虑下面的函数：

$$f(x,\ y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$$

此时

$$f_x(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}\, y, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$$

$$f_y(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}\, x, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$$

再从定义出发，可以求得

$$f_{xy}(0,\ 0) = -1,\quad \text{而}\quad f_{yx}(0,\ 0) = 1$$

两者并不相等．

但可以证明，如果 f_{xy} 及 f_{xy} 在点 $(x,\ y)$ 都是连续的，则两者必相等．这就是下面的定理．

定理　若 f_{xy} 及 f_{yx} 在点 $(x,\ y)$ 都连续，则

$$f_{xy}(x,\ y) = f_{yx}(x,\ y)$$

证明 作辅助函数

$$\Phi=\varphi(x,\ y+\Delta y)-\varphi(x,\ y)$$

而其中 $$\varphi(x,\ y)=f(x+\Delta x,\ y)-f(x,\ y)$$

由于 x 是固定的，所以对 y 应用中值定理，有

$$\begin{aligned}\Phi&=\varphi_y(x,\ y+\theta_1\Delta y)\Delta y\\&=[f_y(x+\Delta x,\ y+\theta_1\Delta y)-f_y(x,\ y+\theta_1\Delta y)]\quad(0<\theta_1<1)\end{aligned}$$

对 x 再用一次中值定理，就有

$$\Phi=f_{yx}(x+\theta_2\Delta x,\ y+\theta_1\Delta y)\,\Delta x\Delta y\quad\left(0<\begin{matrix}\theta_1\\\theta_2\end{matrix}<1\right)$$

如果在上述过程中改变关于 x 及 y 的顺序，即先对 x，后对 y 施行同样的手续，可得

$$\begin{aligned}\Phi&=[f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x+\Delta x,\ y)]\\&\quad-[f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)]\\&=f_{xy}(x+\theta_3\Delta x,\ y+\theta_4\Delta y)\Delta x\Delta y\quad\left(0<\begin{matrix}\theta_3\\\theta_4\end{matrix}<1\right)\end{aligned}$$

于是有

$$f_{yx}(x+\theta_2\Delta x,\ y+\theta_1\Delta y)=f_{xy}(x+\theta_3\Delta x,\ y+\theta_4\Delta y)$$

由假设 f_{yx} 及 f_{xy} 均为连续，在上式两边取极限 $\Delta x\to0,\Delta y\to0$，即得

$$f_{yx}(x,\ y)=f_{xy}(x,\ y)$$

定理于是得证.

这一定理建立了多元函数的偏导数可交换求导次序的根据. 同样地，若 $f(x,\ y)$ 在点 $(x,\ y)$ 有直到 n 阶的连续偏导数，就可简写偏导数为

$$f_{x^\lambda y^{k-\lambda}}=\frac{\partial^k f}{\partial x^\lambda\partial y^{k-\lambda}}\quad(0<k<n,\ 0\leqslant\lambda\leqslant k)$$

不论求导数的顺序如何，只要对 x 求导 λ 次，对 y 求导 $k-\lambda$ 次即可.