

高等学校试用教材

数学分析

下 册

复旦大学数学系 陈传璋 金福临 编
朱学炎 欧阳光中

人民教育出版社

本书是在复旦大学数学系陈传璋等五同志1962年所编《数学分析》的基础上,根据理科数学教材会议精神改写的。本书为下册,内容有 1. 多变量微分学:包括偏导数、全微分、极值理论、隐函数存在定理和函数相关的概念等; 2. 多变量积分学:包括含参变量的积分、重积分、曲线积分、曲面积分、场论初步等; 3. 级数论:包括数项级数与广义积分、函数项级数和含参变量的广义积分、富里埃级数等。

本书可作为综合大学和师范院校数学系的试用教材。

高等学校试用教材

数 学 分 析 下 册

陈传璋 金福临 编
复旦大学数学系 朱学炎 欧阳光中

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

天津新华印刷二厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张11 14/16 字数286,000

1979年5月第1版 1980年3月天津第2次印刷

印数26,001—41,000

书号13012·0362 定价0.86元

目 录

第三篇 多变量微积分学

第一部分 多变量微分学

第十章 偏导数与全微分	1
§ 1. 偏导数和全微分的概念	1
一、偏导数的定义	1
二、全微分的定义	4
三、高阶偏导数与高阶全微分	7
习题	10
§ 2. 求复合函数偏导数的链式法则	11
习题	17
§ 3. 由方程(组)所确定的函数的求导法	18
一、一个方程 $F(x, y, z)=0$ 的情形	18
二、方程组的情形	20
习题	24
§ 4. 空间曲线的切线与法平面	26
习题	30
§ 5. 曲面的切平面与法线	30
习题	33
§ 6. 方向导数和梯度	34
一、方向导数	34
二、梯度	36
习题	40
§ 7. 泰勒公式	41
习题	42
§ 8. 向量值函数的导数	43

一、向量值函数的概念	43
二、向量值函数的导数	45
习题	51
第十一章 极值与条件极值	52
§ 1. 极值与最小二乘法	52
一、极值	52
二、最小二乘法	58
习题	61
§ 2. 条件极值	62
习题	69
第十二章 隐函数存在定理、函数相关	71
§ 1. 隐函数存在定理	71
一、 $F(x, y) = 0$ 情形	71
二、多变量及方程组情形	76
习题	80
§ 2. 函数行列式的性质、函数相关	82
一、函数行列式的性质	82
*二、函数相关	84
习题	90

第二部分 多变量积分学

第十三章 含参变量的积分	91
习题	97
第十四章 积分(二重、三重积分, 第一类曲线、曲面积分)的定义和性质	99
§ 1. 二重积分、三重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分的概念	99
§ 2. 积分的性质	104
习题	106

第十五章 积分的计算及应用	107
§ 1. 二重积分的计算	107
一、化二重积分为二次积分	107
二、用极坐标计算二重积分	114
三、二重积分的一般变量替换	117
习题	126
§ 2. 三重积分的计算	128
一、化三重积分为三次积分	128
二、三重积分的变量替换	132
习题	138
§ 3. 第一类曲线积分的计算	139
习题	142
§ 4 第一类曲面积分的计算	142
一、曲面的面积	142
二、化第一类曲面积为二重积分	147
习题	150
§ 5. 积分在物理上的应用	150
一、质心	150
二、矩	153
三、引力	155
习题	157
§ 6. 第二类曲线积分	158
一、变力作功与第二类曲线积分的定义	158
二、第二类曲线积分的计算	162
三、两类曲线积分的联系	167
习题	170
§ 7. 第二类曲面积分	171
一、曲面的侧的概念	171
二、第二类曲面积分的定义	173
三、两类曲面积分的联系及第二类曲面积分的计算	175
习题	182

第十六章 各种积分间的联系和场论初步	183
§ 1. 各种积分间的联系	183
一、格林 (Green) 公式	183
二、高斯 (Gauss) 公式	186
三、斯托克司 (Stokes) 公式	190
习题	194
§ 2. 曲线积分和路径的无关性	197
习题	203
§ 3. 场论初步	204
一、场的概念	204
二、向量场的散度与旋度	206
*三、保守场与管量场	216
*四、算子 ∇	219
习题	221

第四篇 级 数 论

第一部分 数项级数和广义积分

第十七章 数项级数	223
§ 1. 预备知识: 上极限和下极限	223
习题	226
§ 2. 级数的收敛性及其基本性质	227
习题	233
§ 3. 正项级数	233
习题	240
§ 4. 任意项级数	241
一、绝对收敛级数	241
二、交错级数	243
三、阿贝尔 (Abel) 判别法和狄立克莱判别法	245
习题	250
§ 5. 绝对收敛级数和条件收敛级数的性质	251

习题	258
*§ 6. 无穷乘积	258
习题	264
第十八章 广义积分	265
§ 1. 无穷限的广义积分	265
一、无穷限广义积分的概念	265
二、无穷限广义积分和数项级数的关系	269
三、无穷限广义积分的收敛性判别法	270
*四、阿贝尔判别法和狄立克莱判别法	272
习题	276
§ 2. 无界函数的广义积分	277
一、无界函数广义积分的概念, 柯西判别法	277
*二、阿贝尔判别法和狄立克莱判别法	280
习题	281
§ 3. 广义重积分	282
习题	286

第二部分 函数项级数和含参变量广义积分

第十九章 函数项级数、幂级数	288
§ 1. 函数项级数的一致收敛	288
一、函数项级数的概念	288
二、一致收敛的定义	289
三、一致收敛级数的性质	295
四、一致收敛级数的判别法	297
习题	301
§ 2. 幂级数	303
一、收敛半径	303
二、幂级数的性质	307
三、函数的幂级数展开	308
习题	315
§ 3. 逼近定理	317

习题	320
第二十章 含参变量的广义积分	321
一、一致收敛的定义	321
二、一致收敛积分的判别法	322
三、一致收敛积分的性质	323
四、欧拉 (Euler) 积分	327
*五、阿贝尔判别法、狄立克莱判别法	328
习题	332
第二十一章 富里埃级数和富里埃变换	334
§ 1. 富里埃级数	334
一、富里埃级数的引进	334
二、三角函数系的正交性	335
三、富里埃系数	336
四、狄立克莱积分	338
五、黎曼引理	340
六、狄尼 (Dini) 判别法及其推论	344
*七、狄立克莱-约当判别法	346
八、富里埃级数的一致收敛性	348
九、函数的富里埃级数展开	348
十、周期为 T 的函数的展开	352
十一、富里埃级数的复数形式	354
*十二、富里埃级数的逐项求积和逐项求导	358
习题	361
§ 2. 富里埃变换	364
一、富里埃变换的概念	364
二、富里埃变换的一些性质	368
习题	369
索引	370

第三篇 多变量微积分学

第一部分 多变量微分学

第十章 偏导数与全微分

§ 1. 偏导数和全微分的概念

一、偏导数的定义

对一元函数 $f(x)$, 我们讨论了它关于 x 的导数, 也就是 $f(x)$ 关于 x 的变化率, 或者说是 $f(x)$ 沿 x 方向的变化率, 同时我们也看到了函数变化率的重要性. 对于多元函数, 同样需要讨论它的变化率, 但由于自变量的增多, 情况较一元函数复杂, 常常要考虑各个方向的变化率, 对此我们可以先考虑函数关于其中一个自变量的变化率, 以二元函数 $u=f(x, y)$ 为例, 我们可以把 y 看作不变, 这时它就是 x 的一元函数, 对 x 求导, 所得导数就称为二元函数 $f(x, y)$ 关于 x 的偏导数. 于是, 利用极限概念, 我们就可给出偏导数的定义:

定义 对函数 $u=f(x, y)$, 如给 x 以增量 Δx , 于是函数相应地得一改变量

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

若极限
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

存在, 则此极限值就称为函数 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处关于 x 的偏导数, 记为:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \text{ 或 } \frac{\partial f}{\partial x}$$

也可记为

$$f_x(x, y)$$

类似地, 如果极限

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

存在, 此极限值就称为 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处关于 y 的偏导数, 记为:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \text{ 或 } \frac{\partial f}{\partial y}$$

也可记为:

$$f_y(x, y)$$

同样, 对于二元以上的多元函数, 例如 $u = u(x, y, z)$, 当只有自变量 x 变化而 y, z 固定时, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y, z) - u(x, y, z)}{\Delta x}$$

是 u 关于 x 的偏导数.

由以上定义可见, 求 $f_x(x, y)$ 只不过是在 $f(x, y)$ 中把 y 看作常数, 而关于 x 求导数, 这时用的就是一元函数的求导公式和运算法则.

例 1 气体的状态方程为 $p = \frac{RT}{V}$, 讨论 p 关于 V 和 T 的偏导数.

解 在温度 T 不变的等温过程中, 压力 p 关于体积 V 的瞬时变化率为 $p_v = \left(\frac{RT}{V}\right)_v = -\frac{RT}{V^2}$; 同样, 在体积 V 不变的等容过程中, 压力 p 关于温度 T 的瞬时变化率为 $p_t = \left(\frac{RT}{V}\right)_t = \frac{R}{V}$.

例 2 设 $f(x, y) = xy + x^2 + y^3$, 求 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, 并求 $f_x(0, 1)$,

$f_x(1, 0), f_y(0, 2), f_y(2, 0)$.

解 求 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 时, 把 y 看成常量, 所以 $\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2x, f_x(0, 1) = 1, f_x(1, 0) = 2$; 求 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 时, 把 x 看成常量, 所以 $\frac{\partial f}{\partial y} = x + 3y^2, f_y(0, 2) = 12, f_y(2, 0) = 2$.

例 3 设 $u = \ln(x + y^2 + z^3)$, 求 u_x, u_y, u_z .

解 三元函数的偏导数, 是只有一个自变量变化而其余自变量看作常量时函数的变化率, 因此,

$$u_x = \frac{1}{x + y^2 + z^3}, \quad u_y = \frac{2y}{x + y^2 + z^3}, \quad u_z = \frac{3z^2}{x + y^2 + z^3}$$

由一元函数可导必定连续的结论可知, 若 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 关于 x (或 y) 可导, 则 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 关于 x (或 y) 连续. 不过要注意, 此时并不能推出 $f(x, y)$ 关于两个变量是连续的. 例如考虑下列函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

由偏导数的定义知道

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

同理可求得 $f_y(0, 0) = 0$, 但在第四章中已经指出此函数当 $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ 时二重极限不存在, 因而它在 $(0, 0)$ 点是不连续的.

我们知道, 如果一元函数在一点有导数, 那么这导数就是函数所表示的曲线在对应点的切线的斜率. 由此可以推出, 二元函数 $u = f(x, y)$ 在一点 (x_0, y_0) 的偏导数有下面的几何意义 (图 10-1).

$u = f(x, y)$ 的图形是空间中的曲面, $M_0(x_0, y_0, u_0) = M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 是面上的点. 当 $y = y_0$ 时, $u_0 = f(x, y_0)$ 表示曲面上过 M_0 点的一条曲线, 它是曲面 $u = f(x, y)$ 和平面 $y = y_0$ 的交线. 把它看作平面曲线, 其自变量是 x , 因变量是 u , u 关于

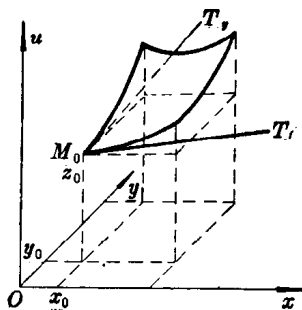


图 10-1

x 的导数 $f_x(x_0, y_0)$ 正好是曲线在 M_0 点的斜率, 这样便得到曲线在 M_0 点的一个切向量 T_x , 它在 x 轴和 u 轴上的坐标分别是 1 和 $f_x(x_0, y_0)$, 并且它在平面 $y=y_0$ 上, 即

$$x=x, y=y_0, u=f(x, y_0)$$

曲线在 M_0 点的切向量 T_x 为 $(1, 0, f_x(x_0, y_0))$.

同样, 曲面和平面 $x=x_0$ 的交线 $x=x_0, y=y, u=f(x_0, y)$ 的切向量 T_y 为 $(0, 1, f_y(x_0, y_0))$.

二、全微分的定义

对一元函数 $y=f(x)$, 我们曾研究过 y 关于 x 的微分, 它具有两个特性, 即: (i) 它与自变量的改变量成比例, (ii) 当自变量的改变量趋于零时, 它与函数的改变量 Δy 之差是较自变量的改变量更高阶的无穷小.

现在我们讨论多元函数情形, 例如, 对二元函数 $u=f(x, y)$, 我们也从同样的思想出发, 引进如下定义.

定义 若函数 $u=f(x, y)$ 的全改变量 Δu 可表示为

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}),$$

且其中 A, B 与 $\Delta x, \Delta y$ 无关而仅与 x, y 有关, 则称函数 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微, 并称 $A\Delta x + B\Delta y$ 为 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全微分, 记为 du 或 $df(x, y)$, 即

$$du \equiv df(x, y) = A\Delta x + B\Delta y$$

若 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微, 则有

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A\Delta x + o(\sqrt{\Delta x^2})}{\Delta x} = A \end{aligned}$$

这就是说在点 (x, y) 可微, 则 f_x 存在且等于 A , 完全一样地可以证明此时 f_y 也存在且等于 B , 故有

$$du = f_x \Delta x + f_y \Delta y$$

前已指出自变量的改变量等于自变量的微分, 因之上式可写为

$$du = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

在这里, dx, dy 表示任意的量, 并不依赖于 x 和 y , 因此 du 实质上是依赖于 x, y, dx 和 dy 这四个变量的。

对 n 元函数 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 来说, 相应的公式是

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n$$

以上说明若函数在一点可微, 则在该点也一定存在偏导数, 对一元函数而言, 我们知道反过来也是正确的, 但对二元函数就不尽然, 例如, 若

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

前已求出 $f_x(0, 0) = 0, f_y(0, 0) = 0$ 。

此时

$$\begin{aligned} \Delta u - du &= [f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0)] \\ &\quad - [f_x(0, 0)\Delta x + f_y(0, 0)\Delta y] = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \end{aligned}$$

但 $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ 不存在, 故函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点不可微. 由此

可见, 对一元函数而言, 可微与可导是同一回事; 而对多元函数来说, 偏导数存在不一定可微, 但是在一定条件下, 偏导数与可微性之间有密切联系, 这就是下面的定理所指出的.

定理 若 $f_x(x, y)$ 及 $f_y(x, y)$ 在点 (x, y) 及其某一邻域内存在, 且在这一点它们都连续, 则函数 $u=f(x, y)$ 在该点可微.

证明 我们把 Δu 写成如下形式,

$$\begin{aligned}\Delta u &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] \\ &\quad + [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)]\end{aligned}$$

由于假设 f_x 及 f_y 均存在, 所以当 $\Delta x, \Delta y$ 充分小时, 可以把中值定理分别应用于每一个差, 就有

$$\begin{aligned}\Delta u &= f_y(x + \Delta x, y + \theta_1 \Delta y) \Delta y + f_x(x + \theta_2 \Delta x, y) \Delta x \\ &\quad \left(0 < \theta_1 < 1\right)\end{aligned}$$

又由假设 f_x 及 f_y 均在点 (x, y) 连续, 因而有

$$\begin{aligned}f_y(x + \Delta x, y + \theta_1 \Delta y) &= f_y(x, y) + \alpha \\ f_x(x + \theta_2 \Delta x, y) &= f_x(x, y) + \beta\end{aligned}$$

且 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ 时, α, β 都趋于零. 于是

$$\Delta u = f_x(x, y) \Delta x + f_y(x, y) \Delta y + \beta \Delta x + \alpha \Delta y,$$

而 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ 时,

$$\frac{\beta \Delta x + \alpha \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \rightarrow 0$$

由定义可知, 这就证明了 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微.

这个定理说明, 我们如果求得一个函数的偏导数, 且它们连续 (对于一般初等函数, 这是较易知道的), 从而也就可知此函数可微, 并且即可写出其微分.

例 4 设 $u = x^2y + xy^2$ 则有

$$du = 2xydx + x^2dy + y^2dx + 2xydy = (2xy + y^2)dx + (x^2 + 2xy)dy$$

例 5 写出 $f(x, y, z) = e^{x+z} \sin(x+y)$ 的全微分.

这时, $f_x = e^{x+z} [\sin(x+y) + \cos(x+y)]$

$$f_y = e^{x+z} \cos(x+y), f_z = e^{x+z} \sin(x+y)$$

于是
$$df = e^{x+z} [\sin(x+y) + \cos(x+y)] dx + e^{x+z} \cos(x+y) dy + e^{x+z} \sin(x+y) dz$$

三、高阶偏导数与高阶全微分

类似于一元函数,可以定义高阶偏导数,就二元函数 $u = f(x, y)$ 来说, $f_x(x, y)$ 及 $f_y(x, y)$ 仍是 x, y 的二元函数,还可以讨论它们关于 x 或 y 的偏导数,这些就称为函数 $f(x, y)$ 的二阶偏导数.

例如, $\frac{\partial u}{\partial x}$ 关于 x 再求偏导数,即 $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$ 就称为 $f(x, y)$ 关于 x 的二阶偏导数,记为 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 或 f_{xx} ,也可记为 f_{x^2} . 相仿地,还有:

$$f_{xy} = \frac{\partial(f_x)}{\partial y}, \text{ 或记为 } \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial(f_y)}{\partial x}, \text{ 或记为 } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial(f_y)}{\partial y}, \text{ 或记为 } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \text{ 也可记为 } f_{y^2}.$$

同样,还可以定义更高阶的偏导数,如

$$f_{x^3} = \frac{\partial(f_{x^2})}{\partial x}, \text{ 或记为 } \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

$$f_{yx^2} = \frac{\partial(f_{yx})}{\partial x}, \text{ 或记为 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial y}$$

等等.

例 6 设 (1) $u(x, y) = xy$, (2) $u(x, y) = xe^x \sin y$, 求二阶偏导数.

解 (1) $u_x = y, u_{xx} = 0, u_{xy} = 1$

$$\begin{aligned}
u_y &= x, \quad u_{yx} = 1, \quad u_{yy} = 0 \\
(2) \quad u_x &= e^x \sin y + x e^x \sin y = (x+1) e^x \sin y \\
u_{xx} &= (x+1+1) e^x \sin y = (x+2) e^x \sin y \\
u_{xy} &= (x+1) e^x \cos y \\
u_y &= x e^x \cos y \\
u_{yx} &= (x+1) e^x \cos y \\
u_{yy} &= -x e^x \sin y
\end{aligned}$$

值得注意的是，这些函数关于 x, y 的两个二阶混合偏导数都相等，即 $u_{xy} = u_{yx}$ ；也就是说，这些函数的混合偏导数和先对 x 还是先对 y 求导的顺序无关。但是，这个结论并不是对任意的函数都成立，例如，考虑下面的函数：

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

此时

$$\begin{aligned}
f_x(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} y, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases} \\
f_y(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} x, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

再从定义出发，可以求得

$$f_{xy}(0, 0) = -1, \quad \text{而} \quad f_{yx}(0, 0) = 1$$

两者并不相等。

但可以证明，如果 f_{xy} 及 f_{yx} 在点 (x, y) 都是连续的，则两者必相等。这就是下面的定理。

定理 若 f_{xy} 及 f_{yx} 在点 (x, y) 都连续，则

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

证明 作辅助函数

$$\Phi = \varphi(x, y + \Delta y) - \varphi(x, y)$$

而其中 $\varphi(x, y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$

由于 x 是固定的, 所以对 y 应用中值定理, 有

$$\begin{aligned}\Phi &= \varphi_y(x, y + \theta_1 \Delta y) \Delta y \\ &= [f_y(x + \Delta x, y + \theta_1 \Delta y) - f_y(x, y + \theta_1 \Delta y)] \quad (0 < \theta_1 < 1)\end{aligned}$$

对 x 再用一次中值定理, 就有

$$\Phi = f_{yx}(x + \theta_2 \Delta x, y + \theta_1 \Delta y) \Delta x \Delta y \quad (0 < \theta_1 < 1)$$

如果在上述过程中改变关于 x 及 y 的顺序, 即先对 x , 后对 y 施行同样的手续, 可得

$$\begin{aligned}\Phi &= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] \\ &\quad - [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] \\ &= f_{xy}(x + \theta_3 \Delta x, y + \theta_4 \Delta y) \Delta x \Delta y \quad (0 < \theta_3 < 1)\end{aligned}$$

于是有

$$f_{yx}(x + \theta_2 \Delta x, y + \theta_1 \Delta y) = f_{xy}(x + \theta_3 \Delta x, y + \theta_4 \Delta y)$$

由假设 f_{yx} 及 f_{xy} 均为连续, 在上式两边取极限 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$, 即得

$$f_{yx}(x, y) = f_{xy}(x, y)$$

定理于是得证.

这一定理建立了多元函数的偏导数可交换求导次序的根据. 同样地, 若 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 有直到 n 阶的连续偏导数, 就可简写偏导数为

$$f_{x^k y^{k-\lambda}} = \frac{\partial^k f}{\partial x^\lambda \partial y^{k-\lambda}} \quad (0 < k < n, 0 \leq \lambda \leq k)$$

不论求导数的顺序如何, 只要对 x 求导 λ 次, 对 y 求导 $k - \lambda$ 次即可.