高等数学习题课教材

（物理类）

上 册

邵士敏　庄大蔚　蒋定华　编

北京大学出版社

高等数学习题课教材

（物理类）

上 册

邵士敏 庄大蔚 蒋定华 编

北 京 大 学 出 版 社

新登字（京）159号

高等数学习题课教材（物理类）

上、下册

邵士敏 庄大蔚 蒋定华 编

责任编辑：刘 勇

*

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

人民大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

850×1168毫米 32开本 23.125印张 600千字

1992年4月第一版 1992年4月第一次印刷

印数：0001—5,000册

ISBN 7-301-01734-0/O·273

定价：14.10元

内 容 提 要

本书是根据国家教委制定的物理类高等数学大纲，总结作者多年来的教学实践而编写的习题课教材。全书共分两册。上册分二十讲，内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理及其应用，不定积分、定积分，空间解析几何等。

本书旨在帮助高校物理类各专业的大学生学好高等数学这门课，加深对数学基础和理论的理解，培养学生的逻辑推理和计算能力。本书每一讲精选了体现基本教学内容的典型习题和解法，对初学者易犯的错误进行分析。为适应报考研究生的学生的需要，本书还选编了具有一定难度的综合性习题。

本书可作为理工科大学本科生高等数学课的习题课教材，也可供任课青年教师、成人教育和自学高等数学的学生参考，对报考研究生的本科生来说，本节也具有重要的参考价值。

序　言

本书是针对我校物理类各专业高等数学习题课的教学要求，并根据多年来的教学实践而编写成的（高等数学课程另有教材）.

本书内容包括一元微积分、空间解析几何、多元微积分、级数、富氏级数、微分方程几部分.

在每一章中，我们编有内容提要，并配备了一定量的课内习题和课外习题. 对于课内习题给出了各种解法，对课外习题给出了答案，可供大家参考. 在选题过程中，为了培养学生的逻辑推理能力和计算能力，我们选编了一定量的证明题和较多的计算题、应用题，其中一部分题目具有一定的深度和难度.

本教材可供理工科高等数学课教学选用；也可供理工科高等数学课教师及学习高等数学课的学生参考；还可供报考研究生的理工科学生复习高等数学之用.

由于作者水平有限，书中缺点与错误在所难免，我们诚恳希望读者批评指正.

编　者

1990年6月于北京大学

上册目录

第一章　函数及其图形

第一讲　函数、复合函数、反函数概念，函数性质，函数的图形

内 容 提 要

1．函数概念

函数的定义　设在某一过程中，有两个变量 x 与 y，x 的变域是 D。如果按照一定的规律，对于 x 在变域 D 中的每一个数值，都有唯一确定的 y 值与之对应，我们就称 y 是 x 的一个（单值）函数，记作 $y=f(x)$。

称 x 为自变量，y 为函数或因变量，并称自变量的变域 D 为函数的定义域，称因变量的变域为函数的值域。

函数的图形　设给定一个函数 $y=f(x)$，当自变量 x 在其定义域 D 内变化时，对应的 $f(x)$ 也随之变化。如果在平面上取定直角坐标系 xOy，于是在坐标平面上，动点 $(x,f(x))$ $(x\in D)$① 运动的轨迹称为函数 $y=f(x)$ 的图形．通常函数的图形是一条平面曲线（图 1.1）。

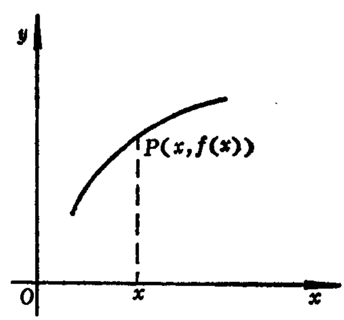

图 1.1

① 符号 $\in$，表示属于。如 $x\in D$ 读作 x 属于 D。

2. 函数的性质

(1) 函数的单调性

定义 若对于任意的$x_1,x_2\in(a,b)$，当$x_1<x_2$时，就有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad(\text{或}f(x_1)\geqslant f(x_2)),\tag{1.1}$$

则称函数$f(x)$在(a,b)内为一单调上升（或下降）函数。

若对于任意的$x_1,x_2\in(a,b)$，当$x_1<x_2$时有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad(\text{或}f(x_1)>f(x_2)),\tag{1.2}$$

则称$f(x)$在(a,b)内为一严格单调上升（或下降）函数。

(2) 函数的有界性

设E为某一区间，若存在一正数M，使得对一切$x\in E$，都有

$$|f(x)|\leqslant M,\tag{1.3}$$

则称函数$f(x)$在区间E内有界，否则称$f(x)$在E内是无界的。

(3) 函数的奇偶性

设E为某对称区间①．若对任意的$x,-x\in E$，都有

$$f(-x)=-f(x)\quad(\text{或}f(-x)=f(x)),\tag{1.4}$$

则称函数$f(x)$在E上是奇函数（或偶函数）。

(4) 函数的周期性

设函数$f(x)$在E上有定义，若存在正数T（以后记作$\exists T>0$），对任意的$x\in E$，都有$x+T\in E$，且

$$f(x+T)=f(x),\tag{1.5}$$

则称$f(x)$是周期函数，T为其周期。

3. 复合函数、反函数、初等函数

(1) 复合函数

设$z=g(y),y\in Y,y=f(x),x\in D$，且$f(D)\subset Y$②，则

$$z=g[f(x)],\quad x\in D\tag{1.6}$$

① 对称区间指$(-l,l)$或$[-l,l]$。

② $f(D)\subset Y$，指$f(D)$包含于变域Y。

称为函数$z=g(y)$ 与$y=f(x)$ 的复合函数。y称中间变量。

(2) 反函数

设有函数$y=f(x)$，$x\in D$，若对任意的$y\in f(D)$，对应到由方程$y=f(x)$唯一确定的x，这样确定的函数称为函数$y=f(x)$的反函数。通常我们把$y=f(x)$的反函数记为$x=f^{-1}(y)$或$x=\varphi(y)$。

(3) 初等函数

以下六类函数称为基本初等函数：常数函数，幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数。

由这些函数经过有限次四则运算以及有限次的函数复合步骤而得到的函数称为初等函数。

本讲要求掌握函数概念，复合函数、反函数概念，并且熟习一些初等函数的图形。

课 内 习 题

1．求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{3x-x^2}$；　　(2) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sin\pi x}$。

解 (1) 要使函数表达式有意义，根式$\sqrt{3x-x^2}$中的$3x-x^2$不能为负，即

$$3x-x^2\geqslant 0.$$

解此不等式得函数定义域：

$$0\leqslant x\leqslant 3.$$

或用区间表示：$[0,3]$。

(2) 要使函数表达式有意义，须根式$\sqrt{x+1}$中$x+1\geqslant 0$，且分母$\sin\pi x\neq 0$。所以函数定义域为：

$$x\geqslant -1 \text{ 且 } x\neq n(n=0,\pm 1,\cdots).$$

或用区间表示：$(n,n+1)$，$n=-1,0,1,2,\cdots$。

2．求下列函数的定义域及值域：

(1) $y=\sqrt{2+x-x^2}$； (2) $y=\ln(1-2\cos x)$；

(3) $y=\arcsin(\ln x)$。

解 (1) 因为 $y=\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$，于是函数的定义域为：

$$\left|x-\frac{1}{2}\right|\leqslant 3/2,$$

即

$$-1\leqslant x\leqslant 2。$$

显然当$x=1/2$时，函数取最大值：$y=3/2$。当$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=9/4$，即$x=-1$，或$x=2$时，函数取最小值：$y=0$。所以函数的值域：$0\leqslant y\leqslant 3/2$。

(2) 要表达式有意义，必须$1-2\cos x$不为负，即

$$1-2\cos x>0,\quad \cos x<1/2。$$

解此不等式得函数定义域：

$$2k\pi+\frac{\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{5}{3}\pi,\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)。$$

当x在上述范围内变化时，

$$0<1-2\cos x\leqslant 3,$$

所以函数的值域：$-\infty<y\leqslant\ln 3$。

(3) 由反三角函数定义域知，要上式有意义必须

$$|\ln x|\leqslant 1$$

即

$$-1\leqslant\ln x\leqslant 1。$$

所以函数的定义域是：

$$e^{-1}\leqslant x\leqslant e。$$

函数的值域是：

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

3．已知函数$y=f(x)$ 的定义域是$[0,1]$，试求下列复合函数的定义域：

(1) $f(x^2)$；(2) $f(\sin x)$；(3) $f(e^x)$。

解 (1) $f(x^2)$的定义域为

$$0\leqslant x^2\leqslant 1$$

即

$$|x|\leqslant 1,\quad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

(2) 根据假设，函数$f(\sin x)$中$\sin x$应满足

$$0\leqslant \sin x\leqslant 1,$$

解此不等式，知x的变域，即复合函数$f(\sin x)$ 的定义域是：

$$2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi,\quad (k=0,\pm 1,\cdots).$$

(3) 函数$f(e^x)$ 中，e^x应满足$0\leqslant e^x\leqslant 1$，因为$e^x\neq 0$,所以应有$0<e^x\leqslant 1$。

故函数$f(e^x)$的定义域是：

$$-\infty<x\leqslant 0.$$

4．在底为$AC=b$和高为$BD=h$的三角形ABC中(见图1.2)，内接一个高为$MN=x$的矩形$KLMN$。把矩形$KLMN$的周长p及面积S表为x的函数。

解 因$\triangle LBM$与$\triangle ABC$相似，于是有

$$\frac{LM}{b}=\frac{h-x}{h}=1-\frac{x}{h},$$

从而

$$LM=b\left(1-\frac{x}{h}\right)\quad(0<x<h),$$

由此得

$$p(x)=2x+2b\left(1-\frac{x}{h}\right)\quad(0<x<h),$$

$$S(x)=bx\left(1-\frac{x}{h}\right)\quad(0<x<h).$$

5．在等腰梯形$ABCD$中（见图1.3），底为$AD=a,BC=b$（$a>b$），高为$HB=h$，引直线$MN\parallel BH$，MN与顶点A相距$AM=x$。把图形$ABNMA$的面积S表为变量x的函数。

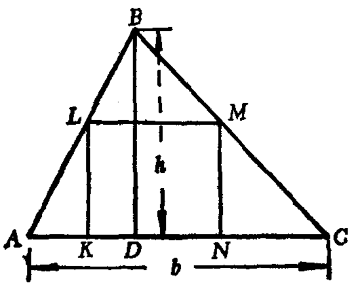

图 1.2

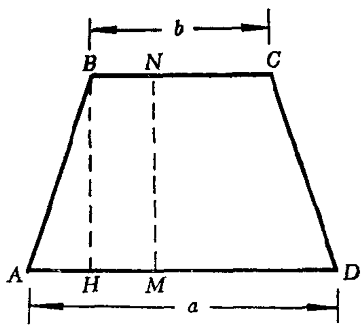

图 1.3

解 显然$AH=\frac{1}{2}(a-b)$。$AM=x$，x的变域为区间$[0,a]$。

下面我们分三种情况讨论。

当$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}(a-b)$时，设三角形高为$y$，于是

$$\frac{y}{h}=\frac{x}{\frac{a-b}{2}},\quad y=\frac{2hx}{a-b}.$$

从而有

$$S(x)=\frac{1}{2}xy=\frac{hx^2}{a-b}.$$

当$\frac{1}{2}(a-b)<x<\frac{1}{2}(a+b)$时，

$$\triangle ABH\text{的面积}=\frac{1}{2}\,\frac{a-b}{2}h=\frac{h}{4}(a-b),$$

$$\text{矩形}BHMN\text{的面积}=h\left(x-\frac{a-b}{2}\right),$$

从而有

$$S(x)=h\left(x-\frac{a-b}{2}+\frac{a-b}{4}\right)=h\left(x-\frac{a-b}{4}\right).$$

当$\frac{1}{2}(a+b)\leqslant x\leqslant a$时，设三角形高为$z$，

$$\frac{z}{h}=\frac{a-x}{\frac{a-b}{2}},\quad z=\frac{2h(a-x)}{a-b}.$$

于是得到

$$S(x)=\frac{(a+b)h}{2}-\frac{z}{2}(a-x)=h\left[\frac{a+b}{2}-\frac{(a-x)^2}{a-b}\right].$$

综上所述，得

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{hx^2}{a-b}, & \text{当}0\leqslant x\leqslant\dfrac{a-b}{2},\\ h\left(x-\dfrac{a-b}{4}\right), & \text{当}\dfrac{a-b}{2}<x<\dfrac{a+b}{2},\\ h\left[\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{(a-x)^2}{a-b}\right], & \text{当}\dfrac{a+b}{2}\leqslant x\leqslant a.\end{cases}$$

6．求函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4,\\ 2^x, & 4<x<+\infty\end{cases}$$

的反函数$x=\varphi(y)$及其存在域。

解　当$-\infty<x<1$时，$y=x$的反函数为

$$x=y,\quad -\infty<y<1;$$

当$1\leqslant x\leqslant 4$时，$y=x^2$的反函数为

$$x=\sqrt{y},\quad 1\leqslant y\leqslant 16;$$

当$4<x<+\infty$时，$y=2^x$的反函数为

$$x=\log_2 y,\quad 16<y<+\infty.$$

于是得所求反函数

$$x=\varphi(y)=\begin{cases}y, & -\infty<y<1,\\ \sqrt{y}, & 1\leqslant y\leqslant 16,\\ \log_2 y, & 16<y<+\infty.\end{cases}$$

7．求下列函数的反函数：

(1) $y=\operatorname{ch}x$①，　$x\in[0,+\infty)$；

(2) $y=\operatorname{ch}x$，　$x\in(-\infty,0]$。

解　对 $y=\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$等式两边乘以$2e^x$，并移项得

$$(e^x)^2-2y\,e^x+1=0,$$

由此解出e^x,

$$e^x=y\pm\sqrt{y^2-1},\quad y\geqslant 1. \qquad (1.7)$$

当$x\in[0,+\infty)$时，$e^x\geqslant 1$，因此在（1.7）式中取正号,有

$$x=\ln(y+\sqrt{y^2-1})②,\quad y\geqslant 1.$$

① $\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$是双曲余弦函数，这里e是无理数，自然对数的底。详见第二章。

② $\ln=\log_e$ 是自然对数。

当$x\in(-\infty,0]$时，$e^x\leqslant 1$，只有在（1.7）式中取负号，才有

$$e^x=y-\sqrt{y^2-1}=\frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}\leqslant 1\quad(当y\geqslant 1).$$

由此得

$$x=\ln(y-\sqrt{y^2-1})=-\ln(y+\sqrt{y^2-1}).$$

故 $y=\operatorname{ch}x$，$x\in[0,+\infty)$的反函数为

$$x=\ln(y+\sqrt{y^2-1}),\quad y\in[1,+\infty).$$

$y=\operatorname{ch}x$，$x\in(-\infty,0]$的反函数为

$$x=-\ln(y+\sqrt{y^2-1}),\quad y\in[1,+\infty).$$

8．设$\varphi(x)=x^2$，$\psi(x)=2^x$。求$\varphi[\varphi(x)]$，$\psi[\psi(x)]$，$\varphi[\psi(x)]$及$\psi[\varphi(x)]$。

解 $\varphi[\varphi(x)]=(x^2)^2=x^4,\quad x\in(-\infty,+\infty)$，

$\psi[\psi(x)]=2^{2^x},\quad x\in(-\infty,+\infty)$，

$\varphi[\psi(x)]=(2^x)^2=2^{2x}=4^x,\quad x\in(-\infty,+\infty)$，

$\psi[\varphi(x)]=2^{x^2},\quad x\in(-\infty,+\infty)$．

9．设$f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n次}$，若$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求$f_n(x)$。

解 用归纳法证明

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

由复合函数定义知，

$$f[f(x)]=\frac{f(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}}=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.\tag{1.8}$$

如果$n-1$时，（1.8）式成立，即

$$\underbrace{f[\cdots f(x)]}_{n-1\text{次}}=\frac{x}{\sqrt{1+(n-1)x^2}},$$

将上式再代入$f(x)$中，从而有

$$f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n\text{次}}=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+(n-1)x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+(n-1)x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

10．设 $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$，证明$f(x)+f(y)=f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$.

证　$f(x)+f(y)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}+\ln\dfrac{1-y}{1+y}=\ln\dfrac{1-x}{1+x}\cdot\dfrac{1-y}{1+y}$

$$=\ln\frac{1+xy-x-y}{1+xy+x+y}=\ln\frac{1-\dfrac{x+y}{1+xy}}{1+\dfrac{x+y}{1+xy}}$$

$$=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

11．证明：(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$的反函数就是它本身；

(2) $y=\dfrac{dx-b}{cx-d}$的反函数就是它本身．

证　(1) 由$y=\dfrac{1-x}{1+x}$知$1-x=y+xy$，于是有

$$x=\frac{1-y}{1+y},$$

故$y=\dfrac{1-x}{1+x}$的反函数就是它本身．