

科學圖書大庫

量子力學

下 冊

譯者 張壽彭 林國經

徐氏基金會出版

0413.1
524
(3)2

125955

科學圖書大庫

量子力學

下 冊

譯者 張壽彭 林國經



徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

監修人 徐銘信 發行人 王洪鎧

科學圖書大庫

版權所有



不許翻印

中華民國六十八年二月二十八日三版

量子力學 (下冊)

基本定價 4.00

譯者 張壽彭 經濟部聯合工業研究所物理師
林國經 經濟部聯合工業研究所放射性同位素研究室副主任

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」書回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者 財團法人 臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱53-2號 電話 7813686 號
發行者 財團法人 臺北市徐氏基金會 郵政劃撥賬戶第 1 5 7 9 5 號
承印者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號 電話 9719739

下 冊 目 錄

第六章 物質的波動論	289
6.36 波動圖像跟微粒圖像	289
6.37 戴布洛意—愛因斯坦關係式	294
6.38 戴維遜—吉謨實驗	297
6.39 戴布洛意波的波動方程式	302
6.40 戴布洛意波的物質密度與能量密度	305
6.41 例題	310
(i) 自由空間中的戴布洛意波	311
(ii) 匣形容器中的戴布洛意波	322
(iii) 服從虎克定律的力場中的戴布洛意波	328
6.42 氫原子	334
(i) 波動方程式的解	335
(ii) 固有振動的形式	345
(iii) 密度分佈	347
(iv) 自由空間中的球面波	351
6.43 波動方程式的特性值與特性函數	352
(i) 特性值與特性函數：例題	353
(ii) 戴布洛意波的特性值與特性函數	358
(iii) 展開定理	361
(iv) 波函數的形式與質點的運動	365
6.44 適用於連續特性值的直交關係與展開定理	368
(i) 總說	368
(ii) 直交定理	369
(iii) 展開定理	374
(iv) δ -函數	377
(v) 特性函數所應具備的條件	384
6.45 隧道效應	385
6.46 戴布洛意波的散射	389

(i) 入射波與散射波	389
(ii) 散射波的方程式的解法	391
(iii) 散射波的漸近形式	392
(iv) 散射截面	393
(v) 盧則福公式	395
6.47 波的量化有其必要	396
第七章 施略丁峨方程式	404
7.48 總說	404
7.49 施略丁峨方程式	405
(i) 矩陣與向量	406
(ii) 虎克力場中的質點運動	410
(iii) 線性算子	411
(iv) 函數與向量之間以及線性算子與矩陣之間的對應	414
(v) 施略丁峨方程式	419
(vi) 例	423
(vii) 戴布洛意場	428
7.50 戴布洛意方程式與施略丁峨方程式	431
7.51 海森堡矩陣的構成	433
(i) 前文要略	433
(ii) 施略丁峨函數與矩陣的構成	435
(iii) 實例	438
第八章 施略丁峨函數的物理意義	449
8.52 施略丁峨函數與戴布洛意波	449
8.53 施略丁峨函數的統計意義	449
(i) 單微粒問題	449
(ii) 一般情形	451
(iii) 定常狀態與施略丁峨函數	452
8.54 含有時間變數的施略丁峨方程式	452
(i) 單質點系統	452
(ii) 一般情形	453
(iii) 機率的守恒	454

8.55 施略丁鰐函數的重疊及其統計詮釋	461
(i) 單質點系統的情形	462
(ii) 一般情形	464
(iii) 連續特性值的情形	465
8.56 動量的機率	465
8.57 特性狀態	469
(i) “狀態”概念的精義	469
(ii) 動力變量與線性算子	470
(iii) 特性狀態	471
(iv) 例：角動量的特性狀態	474
8.58 任意物理量的機率	480
8.59 物理量的預期值	483
(i) 預期值	483
(ii) 預期值的時間變化與波束的運動	485
(iii) 漲落	487
(iv) 測不準關係	492
(v) 相容性	496
(vi) 相容物理量的機率	499
(vii) 縮退物理量的機率	501
(viii) 狀態的機率	503
8.60 機率的時間變化與遷移機率	505
(i) 物理量取一定值的機率之時間變化	505
(ii) 由外加力場所引發的原子遷移	507
(iii) 原子與輻射場的交互作用	510
8.61 繞射與干涉	511
第九章 量子狀態	519
9.62 總說	519
9.63 測不準原理	524
9.64 量子微粒	531
9.65 物理量與量度	533
9.66 方位量化	536
9.67 機率的干涉	539

IV

9.68 若干實驗的重估	542
(i) 史泰恩—蓋爾拉赫實驗	542
(ii) 勞艾德實驗	544
(iii) 康普頓效應與晶體對艾克斯射線的散射	546
9.69 狀態與向量	548
第十章 多微粒系統與波場	558
10.70 引言	558
10.71 包斯統計	561
10.72 對稱狀態	565
(i) 順列算子	566
(ii) 對稱特性函數	569
(iii) 對稱狀態與本然的非對稱狀態	570
(iv) 無交互作用的微粒總集	573
10.73 對稱性質的守恒	576
10.74 量化波場與包斯微粒的總集	578
(i) 總說	578
(ii) 具有交互作用的波場之正則形式	580
(iii) 從波動到微粒	584
(iv) 從包斯微粒系統到波場	593
(v) 波動變量與微粒變量	594
(vi) 場量的交換關係	599
(vii) 微粒數的守恒	601
10.75 反對稱狀態與費彌微粒	603
10.76 鮑利的不相容原理與費彌統計	606
10.77 費彌微粒與波場	608
第十一章 角動量與自旋	
11.78 引言	613
11.79 角動分量之間的交換關係	614
11.80 從交換關係導出可能的特性值	617
11.81 角動量的結合	624
(i) 引論	624

(ii) 組合系統的特性函數的構成	627
(iii) 摘要	637
11.82 電子的自旋	637
(i) 一個電子的情形	637
(ii) 兩個或多個電子的情形	646
11.83 自旋與軌道角動量的耦合	651
(i) 總說	651
(ii) 鹼原子的雙線	653
(iii) 齊曼效應與鹼原子的雙線	659
11.84 不相容原理	662
(i) 兩個電子情形下的鮑利原理	662
(ii) 對稱性質的分類	664
(iii) 對稱標數	668
(iv) 對稱標數與重度	672
(v) 三個或多個電子情形下的鮑利原理	673
11.85 軌道能量與自旋-自旋相制	675
(i) 定性說明	676
(ii) 半定性說明	677
(iii) 場的量化與對稱算子	688

附 錄 IX

線性微分方程式	692
---------	-----

附 錄 X

虎克力場中的波束運動	706
------------	-----

附 錄 XI

(43.14) 式中諸 y 互相獨立的必要暨充分條件	708
------------------------------	-----

附 錄 XII

連續特性值的直交定理.....	709
-----------------	-----

附 錄 XIII

連續特性值情形下特性函數歸一化之一例.....	715
-------------------------	-----

附 錄 XIV

波動方程式的格林函數.....	721
-----------------	-----

附 錄 XV

廣義波束的延展.....	724
--------------	-----

第六章

物質的波動論

§ 36. 波動圖像跟微粒圖像

講到這裏，我們已將量子力學從波爾到海森堡的發展過程述說了一過；我們多多少少曾經有意的避免直接觸及光的二重性問題。我們說過，波爾理論的很多不完備的地方，是由海森堡的矩陣力學改正過來的；舉例來說，原子從某一定常狀態遷移到另一定常狀態時的遷移機率的計算，以及所發光線的極化與強度的算法，現在都可以用精密的數學形式來表示了。但是還有一個跟光的本質有關的問題沒有解決：量子遷移時所發的光究竟是波還是微粒呢？根據海森堡的看法，用來決定電子軌道運動的牛頓力學體系，在原子的內部是不適用的；取而代之的是一組統攝遷移機率的新的定律。原子跟輻射交互作用時的統計行爲，也是用這一組新的定律予以描寫。因為這些定律本質上是統計性的，所以，海森堡的理論對於個別遷移所發光線的本質問題不置一詞；它所能預測的，只是大量原子遷移時所發光線的總的性質而已。

再者，海森堡的矩陣力學，事實上是不足以取代牛頓力學的；因為它缺少了點什麼。不錯，海森堡的理論可以讓我們計算原子在定常狀態時的能量以及它的遷移機率，但是它對如何處理其他同樣重要的問題，像電子流被原子核散射的問題，卻無能爲力了！

事實上，導引量子力學使之進入完備境界所須的觀念，跟以波爾對應原理爲基礎的理論是全然不同的。第一個指標是“波的圖像可以適用於電子”這一發現。以波動圖像爲基礎的電子理論，一方面促成了量子力學數學結構的推廣，另一方面並爲量子力學的解說提供了一項嶄新的看法；這些我們以後再詳細交代。

光在干涉，繞射現象中，它的行徑一如波動，而在光電效應、康普頓效應（Compton effect）與光化學效應中，却又像煞微粒；這些我們在前邊已經講到過了。不過，在物理學家的心目中，電子是一直被當作微粒看待的

。然而，會不會有些電子在其中的表現無異於波動的現象存在呢？假如這些現象存在的範圍很廣，再假如我們能以電子波動論成功的解說這些現象，那麼，此一理論的含義之深遠，將不下於馬克士威的電磁波了。此處所用“電子”一詞，顯然已先行假定了它的微粒性，但這僅是為了方便才用的。嚴格說來，我們或許會以“像是陰極射線管中的一束負電荷”來代替“電子”這個字眼。不過為了簡單起見，以下我們仍繼續使用“電子”一詞，讀者想必同意，這並非“先驗的”假定它的微粒性。

我們曉得，幾何光學定律與微粒運動所遵循的力學定律頗為相似，可見將電子流視之為波的傳播也不是全然不可能的。如光線所經介質之折射率是座標的函數，則光由A點至B點之路徑，可由斐瑪原理 (Fermat's principle) 求出。斐瑪原理說，當線積分

$$\int_A^B n(x, y, z) ds \quad (36.1)$$

沿着光的實際路線積分時，其值恒為極小。此處 $n(x, y, z)$ 為介質在積分路線上任一點 (x, y, z) 的折射率，可能與光色有關；換句話說，由 (36.1)

1) 式定出的光的路線會因光色之差異而有所不同。

就另一方面來說，當總能量等於 E 的質點，在位能為 $V(x, y, z)$ 的保守力 (Conservative force) 作用下運動時，它的路徑是由最小作用律 (Law of least action) 決定的。最小作用律告訴我們，當線積分

$$\int_A^B \sqrt{E - V(x, y, z)} ds \quad (36.2)$$

的積分路線跟質點之運動路線相同時，其值恒為極小。很明顯的，總能量 E (也即動能與位能之和) 在整個運動路線上是不變的。根據 (36.2) 式，一旦總能量 E 知道了，質點在某一已知力場中的運動路線即不難求出。附帶提一句，剛剛講到的“(36.1) 與 (36.2) 沿實際路線積分時恒為極小值”的說法，還是改成“極端值”比較好些，因為在若干情形之下，它們的確會變成極大值。

我們已將力學定律改成幾何光學定律的形式了。但是幾何光學定律本質上是近似的，因為它們是在略去繞射與干涉的近似狀況下，從波動理論中導出來的。此一近似狀況的假設，僅當折射率的空間變化 (Spatial variation) 相當和緩，以至於折射率在廣表僅及一個波長的範圍之內可以視為

常數的情形下，才是適用的。我們當然可以設想，在某種近似情況之下，古典力學定律也可從物質波動論中推演出來。此處所謂近似情形，意思是說位能 V 的空間變化相當和緩，和緩的可以使我們在廣延不超過一個波長的範圍內把函數 V 當作常數看待。

幾何光學與力學定律的形式上的相似這一事實，早在最小作用律發現之前已經有人注意到了。事實上，牛頓曾以此種形式上的相似為基礎，發展出一套光的微粒學說。現在我們以最簡單的情形，也即以光線穿經折射率不同的兩種介質間之境界面時的折射現象為例，將牛頓的微粒說作一說明。假定有折射率等於 n_1, n_2 的兩種介質，被一平面 XX 分開（參見圖 49a）。當單色光穿越此一境界面時，其路線 AOB 須符合斯涅爾定律（Snell's law）的規定，也就是說入射角 θ_1 跟折射角 θ_2 須滿足下式：

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (36.3)$$

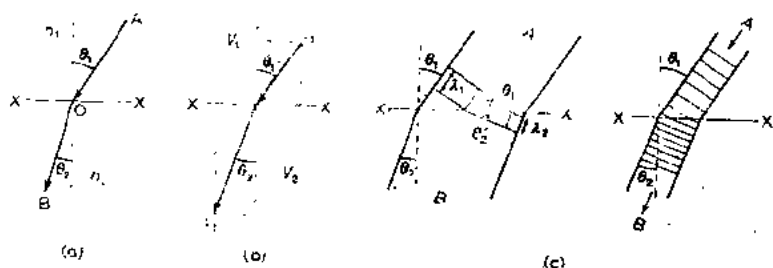


圖 49。光的折射

(36.3) 式便是描述此一簡單情形（折射）的幾何光學定律。

牛頓曾試圖以微粒說的觀念，解釋此一定律；他的想法是這樣的：假定光微粒在介質 A、B 的境界面上受到力的影響，則當微粒穿越此一境界面時其路線將會彎曲。如設此力係與境界面垂直，那麼它的影響將僅及於微粒速度的垂直分量。如再設此力為一保守力，並設它在兩種介質中的位函數為 V_1, V_2 ，則微粒在兩介質中的速度 v_1, v_2 可由下式算出：

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = E - V_1,$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = E - V_2,$$

式中 m 與 E 分別代表微粒的質量與總能量。從以上兩式求解 v_1, v_2 ，即得

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{2(E - V_1)/m} \\ v_2 &= \sqrt{2(E - V_2)/m}. \end{aligned} \quad (36.4)$$

微粒的水平分速度是不會改變的，因為我們假設在境界面 XX 上作用於微粒的力是與境界面垂直的；因此

$$v_1 \sin \theta_1 = v_2 \sin \theta_2. \quad (36.5)$$

將 (36.4) 與 (36.5) 合併，得

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\sqrt{(E - V_2)}}{\sqrt{(E - V_1)}}. \quad (36.6)$$

將 (36.6) 式與 (36.3) 式兩相比較，結果是

$$n = k\sqrt{(E - V)} \quad (36.7)$$

式中 k 是一與微粒之位置無關的常數。(36.7) 式代表微粒說對折射率的解釋。又 k 的值就此一論證而言不能確定，它可能是 E 的函數。(36.7) 式也可用最小作用原理 (36.2) 式從斐瑪原理 (36.1) 推導出來。因微粒的動量為

$$p = \sqrt{2m(E - V)} \quad (36.8)$$

故 (36.7) 式又可寫成

$$n = k'p, \quad (36.9)$$

式中 k' 的意義同前；可見在一般情形下從光之微粒說推導幾何光學定律，無非是將 (36.6) 式代之以 (36.2) 式而已。

現在我們從波動光學推演幾何光學的定律。一次謹嚴而普遍的推導工作，須要頗多的高等數學，所以我們不準備事無鉅細統統講述一過；只須用簡

單的實例將要點說明一下就夠了。

問題仍然是單色光的折射，請參見圖 49(c)。圖中垂直於光程 AB 的平行線，代表光波的波前，也即光波中位相相同的所在，故相鄰二平行線間的距離即為波長。如令 λ_1 , λ_2 分別表示介質 1 與介質 2 中的波長，則下式成立：

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (36.10)$$

換句話說，折射率與光波在不同介質中的波長成反比：

$$n = k''/\lambda. \quad (36.11)$$

（比例常數 k'' 可能與光的頻率（也即光色）有關）。

因為我們剛才講的是單色光，所以頻率 ν 在整個光程中為一常數；在此情形下，頻率相同而波長不同表示光的傳播速度不同（精確一點說，即位相速度 **Phase velocity** 不同）。

經過以上的一番說明之後，波動與微粒這兩種圖像，在描述光的傳播時其相互關係如何，已經相當清楚了。由 (36.9) 與 (36.11) 兩式的比較可以看出，微粒圖像中的動量，相當於波動圖像中波長的倒數，而微粒圖像中的總能量 E （在全程中為一常數），則相當於波動圖像中的頻率 ν ，後者在全程中也是保持不變的。此外，各位想必已經留意到，在微粒圖像中，總能量保持不變的微粒，其動量變化是由位能隨位置而變所引起；而在波動圖像中，如頻率保持不變，則波長的變化是因為位相速度隨位置而變這一事實所造成的。

由此可知，同一現象（光線的折射），可用兩種不同的理論（微粒說與波動說）予以描述而效果不分軒輊。但是我們不要忘記，這兩種學說都只含有部份的真理。我們曾不厭其煩的強調過，微粒說解釋不了光的干涉與繞射；而波動論則無法解釋光電現象與康普頓效應。

到目前為止，我們的討論只限於光，現在我們把它推廣到其他物體上去：試問從波動說的觀點研究電子的傳播有沒有意義？電子（迄今為止一直是被人當作微粒看待的）會不會像光子一樣的發生干涉或繞射現象？我們知道，光子的傳播，就干涉與繞射而論，與幾何光學的定律是不盡相合的（干涉與繞射現象為波的特點）；既然如此，電子之運動會表現干涉、繞射現象，乃至與牛頓力學定律有所偏離，當然也不無可能。光在大小僅約一個波長的

空間範圍之內，其行徑仍遵循幾何光學定律（像光線之穿過直徑僅約一個波長的小孔，以及微小物體所成陰影等等，都是常見的實例）。同樣的，如果我們預先假定電子的波動性，則在大小僅約一個原子的空間之內，它的運動可能不服從牛頓力學定律。如能比照波動光學與幾何光學相互為助的情形，以電子的波動圖像為基礎建立一套理論，原子構造的問題可能會迎刃而解。事實上，這正是戴布洛意理論的出發點。

§ 37. 戴布洛意—愛因斯坦關係式

在上節中我們已經看到，如分別以微粒說與波動論描述同一現象，微粒的動量 p 與能量 E ，相當於波長之倒數 $1/\lambda$ 與波之頻率 ν 。在波動論中，頻率不變、波長隨介質中的位置而變的一束單色光，相當於微粒理論中能量保持不變、動量隨位能（座標之函數）而變的一注電子。我們知道，紅光的頻率約為 $0.4 \times 10^{16}/\text{sec}$ ，它在真空中的波長約為 $8 \times 10^{-7} \text{ cm}$ 。愛因斯坦在他的光量子理論中提出過一項重要的結論；他說，以下二關係式是成立的：

$$\begin{aligned} E &= h\nu \\ p &= h/\lambda \end{aligned} \quad (37.1)$$

據此，紅光應看作能量 $E = 2.6 \times 10^{-11} \text{ erg}$ ，動量 $p = 0.8 \times 10^{-27} \text{ c.g.s}$ 單位的一注微粒。戴布洛意更進一步，他假定 (37.1) 式在電子的波動理論中也是成立的；這意思是說，陰極射線（係由能量等於 E 、動量等於 p 的電子組成）也可視之為波長 λ 與頻率 ν 滿足 (37.1) 式的一束波的傳播，傳播方向當然是跟電子的運動方向一致的。

此處我們應附帶說明一點：在傳統力學中，質點的能量恒有一附加常數，此一不定常數之值，跟能量的零點之選擇有關。因此，由 (37.1) 式所界說的頻率 ν ，同樣有其含混的地方。在若干情形之下，頻率 ν 甚至會變成負值。例如，在氫原子問題中，如將靜止的電子在無窮遠處之能量取做零點，那麼電子在橢圓軌道上的能量會變為負值，故頻率也隨之變為負值。此一含混之點在相對性量子力學中不會出現，同時在非相對性量子力學中也不致造成若何實際的困難；理由是：在非相對性量子力學中，具有物理意義的量並非頻率本身，而係頻率之差。

從愛因斯坦關係式 (37.1) 不難看出，在波動論中與微粒說的位函數

$V(x, y, z)$ 對應的是什麼；根據 (37.1) 式，波的位相速度 $u = v\lambda$ 應等於

$$u = \frac{E}{p} = \frac{E}{[2m\{E - V(xyz)\}]^{\frac{1}{2}}} \quad (37.2)$$

或

$$= \frac{v}{[2m\{v - V(xyz)/h\}/h]^{\frac{1}{2}}} \quad (37.3)$$

也就是說，微粒論中的力場 $V(x, y, z)$ 的存在，在波動論中可以這樣解釋：使波的位相速度從其在真空中的值

$$u_0 = \sqrt{h\nu/2m}, \quad (37.4)$$

變為 (37.3) 式的“原因”，是因地而異的。

(37.3) 式雖然能為戴布洛意波的位相速度所滿足，但其中有些名堂，例如質量 m 與位能 V ，是從微粒說中借用的；所以 (37.3) 式應改寫成

$$u = \frac{v}{[2m\{v - \mathfrak{B}(xyz)\}]^{\frac{1}{2}}}, \quad (37.5)$$

式中 m 為一常數，其因次為 [時間]/[長度]²。就電子波的情形來說， m 的值等於 $1.35 \times 10^{-1} \text{ sec/cm}^2$ 。反過來說，如果電子的波動性發現在先，微粒性發現在後，那麼我們會將 (37.5) 式作為出發點，然後以 (37.1) 式為依據把它轉換成微粒理論，並從而推得這樣的結論：此一微粒之質量 m 及其位能 V ，應滿足以下二式：

$$\begin{aligned} m &= h\mathfrak{m} \\ V(xyz) &= h\mathfrak{B}(xyz). \end{aligned} \quad (37.6)$$

.....

戴布洛意曾注意到，倘若愛因斯坦關係式 (37.1) 的正確性無可置疑，波爾的量子條件 $\oint p dq = nh$, $n=1, 2, 3, \dots$ 即不難索解。為了簡單起見，我們假定氫原子的一個電子是在一圓形軌道上運動。從波動論的立場來說，我們可以假想有一戴布洛意波沿着此一氫原子內的圓形軌道傳播（詳見 §4.2）。如半徑等於 r ，則圓形軌道的周長等於 $2\pi r$ 。很顯然的，只有在圓周長與波長之比為一整數的情形下，波的傳播才會處於穩定狀態（否則繞過一整圈之後，波頭與波尾便不會恰相銜接了；讀者試參閱圖 50.(b) 與 (c)，當可一

目了然)。如圖周長為波長的整倍數，波的傳播即成一首尾銜接的連續圖形，如續 50 (a) 所示。在這種情形之下

$$2\pi r/\lambda = n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

再引用 (37.1) 式，此一波動論中的條件，即順理成章的轉變為數粒論中的對應條件：

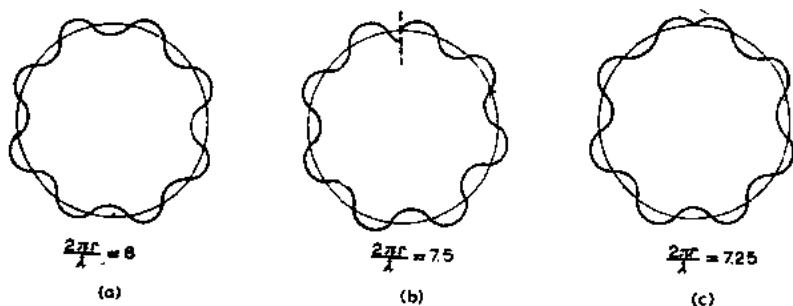


圖 50. 波動論中的波爾條件

$$2\pi r p = n h, \quad n = 1, 2, \dots,$$

但 $r p$ 不是別的，實即角動量 p_ϕ 是也，故

$$\int_0^{2\pi} p_\phi d\phi = n h, \quad n = 1, 2, \dots$$

是即上冊中一再講過的波爾量子條件。

根據此一新的說法，波爾理論中的量子數，就是波動系統中每一固有振動的節點數 (Number of nodes)。由此看來，如果我們說波爾的量子條件適足以表明原子內部電子的波動性之存在，應該是沒有問題的。

電子的波動性並不限於原子內部的諸般現象，這一事實是由戴維遜與吉謨 (Davisson and Germer) 的著名實驗所證明的。此一二十世紀最重要的發現之一，是在 1927 年完成的，詳情請參見下節。