

现代数学丛书

邝学安 著

紧致齐性空间 上的调和分析

HARMONIC ANALYSIS
ON COMPACT
HOMOGENEOUS SPACES
ZHENG XUEAN

上海科学技术出版社

• 现代数学丛书 •

紧致齐性空间上的调和分析

郑学安 著

上海科学技术出版社

Modern Mathematics Series

HARMONIC ANALYSIS ON
COMPACT HOMOGENEOUS SPACES

Zheng Xuean

Shanghai Scientific & Technical Publishers

内 容 提 要

本书是作者在紧致齐性空间上的调和分析方面研究工作的小结. 内容分为四部分: 一、必要的预备知识; 二、紧致李群上的调和分析的若干基本结果; 三、紧致齐性空间上的调和分析的若干基本结果; 四、上述理论在多复变函数论中的某些应用.

本书可供数学研究工作者及高等学校数学专业的研究生、教师与高年级学生学习参考.

图书在版编目(CIP)数据

紧致齐性空间上的调和分析/郑学安著. - 上海: 上海科学技术出版社, 2000. 7

(现代数学丛书)

ISBN 7-5323-5316-8

I. 紧... II. 郑... III. 抽象调和分析
IV. 0177.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 29020 号

责任编辑 赵序明

上海科学技术出版社出版发行

(上海瑞金二路 450 号 邮政编码 200020)

上海新华印刷厂印刷 新华书店上海发行所经销

2000 年 7 月第 1 版 2000 年 7 月第 1 次印刷

开本 787×1092 1/16 印张 23.5 插页 4 字数 307 000

印数 1-1 200 定价: 42.40 元

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题,

请向本社出版科联系调换

Harmonic Analysis on Compact Homogeneous Spaces

Zheng Xuean

Abstract

This is the monograph to collect the author research works on Harmonic analysis on compact homogeneous spaces. It contains following topics: preliminaries of Lie groups and Lie algebras; asymptotic properties of Fourier coefficients, Poisson summation formulae, Riesz potentials and Riesz transformations; H^p spaces on compact Homogeneous spaces; applications to several complex variables.

《现代数学丛书》编辑委员会

名誉主编 苏步青

主 编 谷超豪

委 员 (以姓氏笔画为序)

丁夏畦 王梓坤 叶彦谦

石钟慈 冯克勤 刘应明

严志达 杨 乐 吴 方

李大潜 陈希孺 陈翰馥

张恭庆 胡和生 姜伯驹

梁友栋 曹锡华 程民德

Modern Mathematics Series

Editorial Committee

Honorary Editor-in-Chief Su Buchin

Editor-in-Chief Gu Chaohao

Members

Cao Xihua	Chen Hanfu
Chen Xiru	Cheng Minde
Ding Xiaqi	Feng Keqin
Hu Hesheng	Jiang Boju
Li Tatsien	Liang Youdong
Liu Yingming	Shi Zhongci
Wang Zikun	Wu Fang
Yan Zhida	Yang Le
Ye Yanqian	Zhang Gongqing

出版说明

从 60 年代起,由华罗庚教授任主编的《现代数学丛书》编辑委员会曾组织编著,并由我社出版了多部具有很高水平的数学学术专著,有几部专著并已在外国出了外文版,受到国内外数学界和广大读者的高度重视,获得了很高的评价.原编委会中华罗庚、关肇直、吴新谋三位教授虽已先后逝世,但他们为本《丛书》所作出的贡献迄今仍为人们所敬仰、怀念.由于某些客观原因,《现代数学丛书》的出版工作曾一度停顿.

为了适应现代数学的迅速发展,更好地反映我国数学家近几年的优秀研究成果,必须大力加强《现代数学丛书》的规划、编辑、出版工作,充实编委会的力量.考虑到不少编委年事已高,经向原编委会中大部分同志及数学界有关专家广泛征求意见后,于 1990 年对编委会作了调整,补充了一些著名的中年数学家和学科带头人,建立了新的编委会,并进一步明确了本丛书的宗旨.

《现代数学丛书》新的编辑委员会由苏步青教授任名誉主编、谷超豪教授任主编,18 位著名数学家任委员.编委会负责推荐(或审定)选题和作者,主持书稿的审核等工作.

《现代数学丛书》的宗旨是:向国内外介绍我国比较成熟的、对学科发展方向有引导作用的、国内第一流水平的数学研究成果,反映我国数学研究的特色和优势,扩大我国数学研究成果的影响,促进学科的发展和国内外的学术交流.

为了实现上述宗旨,本丛书将陆续组织出版在基础数学、应用数学和计算数学方面处于学科发展前沿、有创见且具有系统完整

研究成果的现代数学学术专著.

为出版好《现代数学丛书》,我们热切地期望着数学界各位专家的大力支持和悉心指导,并欢迎广大读者提出宝贵的建议和意见.

上海科学技术出版社

序

Fields 奖获得者、数学大师丘成桐教授于 1997 年,在题为《中国数学发展之我见》一文中,说了这样一段话:“中国近代数学能超越西方或与之并驾齐驱的主要有三个,当然我不是说其他工作不存在,主要是讲能够在数学历史上很出名的有三个:一个是陈省身教授在示性类(characteristic class)方面的工作;一个是华罗庚在多复变函数方面的工作,一个是冯康在有限元计算方面的工作.我为什么单讲华先生在多复变函数方面的工作,这是我个人的偏见.华先生在数论方面的贡献是大的,可是华先生在数论方面的工作不能左右全世界在数论方面的发展,他在这方面的的工作基本上是从外面引进来的观点和方法.可是他在多复变函数方面的贡献比西方至少早了 10 年,海外的数学家都很尊重华先生在这方面的成就.所以,我们一定要找自己的方向,我想这是一个很重要的看法.我们近 20 年来基本上跟随外国的潮流.我们没有把基本的想法搞清楚,所以始终达不到当年陈先生、华先生或冯先生他们的工作.”(引自 1997 年中国科学院,科学发展报告).“海外的数学家都很尊重华先生在这方面的成就”,这是我在国外亲眼目睹,亲身感受的.华先生在多复变函数方面的贡献的确是举世公认的.他的名著《多复变数函数论中的典型域的调和分析》也早已成为多复变数函数论的经典著作.大家这样尊重华先生在多复变数函数论的成就,归根结蒂因为这是我们中国人开创的、具有鲜明特色的“自己的方向”,是“从数学的根本上的研究方向”.正因为这是具有高度创新的工作,以至于至今生命不息,还在不断地向前发展.

在华先生写完了上述那部名著之后,他就指出:作为这项工作的进一步发展之一,应建立起典型群上的调和分析.他自己写了这方面的第一篇论文(见本书参考文献[2]).20世纪50年代,我在他的指导下,进行这方面的研究.后来一批当时的年轻人继续做了很多很好的工作.20世纪70年代末,当我写《典型群上的调和分析》一书来总结这方面的研究工作时,很少为他人写序言的华先生,欣然命笔,为拙著写了一篇十分精彩的序言.他指出了这项研究工作的意义,而序言的最后一句话是:“这是一个有丰富前途的方向,乐之为序.”岁月匆匆,华先生写这篇序言已是20年前的事了,而他老人家也已离开我们14年了.但值得告慰他老人家的是:他对数学,尤其是多复变函数的创造性的贡献,愈来愈为人们所认识,所肯定.他开创的具有鲜明中国特色的“自己的方向”正在不断地发扬光大.

这部由郑学安教授撰写的专著,就是由华先生栽下的大树上结的又一个硕果.从典型群上的调和分析,继续沿着华先生的路线,以李群、李代数的表示为工具,来研究紧致李群与紧致齐性空间上的调和分析是顺理成章的事.当然其难度较之典型群上的调和分析要难得很多很多.郑学安教授以他深厚的数学功底、勤奋的工作,出色地、创造性地完成了这项研究工作.这是一部具有鲜明的中国特色的专著,是继续沿着中国人“自己的方向”向前奋进的书.正因为如此,本书所叙述的那些研究成果,较之国外在这项课题上的研究成果要系统得多,深刻得多.并且仍有很多很有意义的问题有待于进一步的发展与研究.这也再次证明:华先生在20年前所说的:“这是一个有丰富前途的方向”是多么有远见!

2000年是华先生的90寿辰,也是他逝世15周年.本书的出版,无疑是对他老人家的一个十分有意义的纪念.他虽已离开我们,但他开创的“自己的方向”依然指引着我们,他依然活在我们的心中.

龚 开
己卯春节

前言

紧致齐性空间上的调和分析,是抽象调和分析的重要内容,也是经典的 Fourier 级数理论的自然而深刻的发展. 紧致齐性空间上的调和分析还与多复变函数论的某些领域有着密切而深刻的联系.

当一个连通的紧致黎曼流形上的等度量变换群在其上的作用可递时,就称它为紧致齐性空间,因此紧致齐性空间包含了广泛的几何对象:紧致李群、欧氏空间中的球面、多复变有界对称域的 Silov 边界等,都是紧致齐性空间的特例.

本书是作者沿着华罗庚教授和龚昇教授的研究路线,在紧致齐性空间上的调和分析中所作工作的一个小结. 本书分成四部分:第 1 章是预备知识,内容包括李群李代数、复半单李代数、紧致李群的表示等理论的简要叙述,介绍了紧致齐性空间上的 Fourier 级数、广义函数的卷积和 Laplace 算子;介绍了紧致齐性空间上的 Dirichlet-龚核、Abel-龚核与 Riesz-龚核. 其中由龚昇教授在酉群上的调和分析研究中建立的 Abel-龚核和 Riesz-龚核,在紧致齐性空间调和分析的研究中有着深刻而广泛的应用.

第 2 章主要讨论紧致李群上的调和分析,主要内容有:Fourier 系数的渐近性质、Fourier 级数的求和、Poisson 求和公式、Riesz 位势与 Bessel 位势、Riesz 变换与 Bessel 变换、Riesz-龚平均在逼近论中的应用等.

除了龚昇教授在酉群上的调和分析中所指出的重要差别外,紧致齐性空间上的调和分析与经典 Fourier 级数最重要的差别之

一,也许就是第2章中关于 Fourier 系数渐近性质的结果. 在经典的 Fourier 级数的理论中,关于 Fourier 系数的 Riemann—Lebesgue 的定理是众所周知的. 但是对于非交换的紧致李群和紧致齐性空间,它的可积函数的 Fourier 系数的性质就变得极为复杂. 简单地说,在非交换的情形,只有平方可积函数,即 L^2 函数,经典的 Riemann—Lebesgue 定理才成立,而对于 $1 \leq p < 2$ 的 L^p 函数,经典的定理已经不成立了. 第2章中还给出了上面当 $1 \leq p < 2$ 时,“最坏的” L^p 函数的 Fourier 系数发散于无穷时阶的精确估计.

当用 Poisson 非切向极大来定义紧致齐性空间上的 H^p 空间时,就需要讨论上面定义之下的 H^p 空间的刻画问题. 本书第3章主要讨论紧致齐性空间上的 H^p 空间的基本问题. 紧致齐性空间上的 Poisson 核是很复杂的,直接讨论 Poisson 核和 Poisson 积分整体的分析性质也是相当困难的. 在第3章中,通过对 Abel—龚核和 Poisson 核间相互关系的讨论,通过建立适当的 Grand 极大函数,及对 Grand 极大函数性质的讨论,得到了包括 H^p 空间原子分解在内的紧致齐性空间上 H^p 空间理论的基本结果.

本书第4章,是应用紧致齐性空间上的调和分析,讨论多复变函数论中的某些课题,包括对多复变有界对称域的 Bergman 核、Poisson—华核和 Cauchy 核相互关系的讨论,得到了上述的 Poisson—华核和 Cauchy 核可以用 Bergman 核准确地表示出来. 研究了一类典型域上 Poisson—华积分与 Cauchy 积分的边界性质. 本章内容仅是应用紧致齐性空间上的调和分析来讨论多复变函数论中若干课题的初步结果,这方面存在着许多尚未解决的课题,有待进一步的研究.

作者对安徽大学的李世雄教授和著名数学家、中国科学技术大学的龚昇教授表示衷心的感谢,正是上述两位导师,指导作者走上了数学研究之路.

作者

1999年3月

于北京师范大学

目 录

序 前 言

第 1 章 引论	1
§ 1.1 引言.....	1
§ 1.2 李群与李代数.....	3
§ 1.3 紧致李群与紧致齐性空间	20
§ 1.4 紧致李群的表示	36
§ 1.5 紧致李群与紧致齐性空间上的调和分析	65
§ 1.6 Abel—龚核、Poisson 核与热核	83
 第 2 章 紧致李群上的调和分析	90
§ 2.1 紧致李群上的 Fourier 系数的渐近性质	90
§ 2.2 Poisson 求和公式	110
§ 2.3 Fourier 级数的求和与 Peter-Weyl 定理	128
§ 2.4 Riesz 位势与 Bessel 位势	153
§ 2.5 紧致齐性空间上的 Riesz 位势与 Bessel 位势	173
§ 2.6 Riesz 变换与奇异积分	182
§ 2.7 Riesz—龚平均在逼近论中的应用	204
 第 3 章 紧致齐性空间上的调和分析	218
§ 3.1 $H^p(M)$ 空间与 Poisson 积分	218
§ 3.2 Grand 极大函数	266

§ 3.3 $H^*(M)$ 的原子分解结构.....	284
第4章 在多复变函数论中的某些应用.....	303
§ 4.1 多复变的有界对称域及其核函数.....	303
§ 4.2 有界对称域的 Bergman 核	309
§ 4.3 Poisson—华核与 Cauchy 核	324
§ 4.4 Poisson—华积分与 Cauchy 积分的边界性质	343
参考文献.....	357

CONTENTS

Preface

Chapter 1. Introduction	1
§ 1.1 Introduction	1
§ 1.2 Lie groups and Lie algebras	3
§ 1.3 Compact Lie groups and Compact homogeneous spaces	20
§ 1.4 Representations of Compact Lie groups	36
§ 1.5 Harmonic analysis on Compact Lie groups and Compact homogeneous spaces	65
§ 1.6 Kernels of Abel-Gong, Poisson and heat kernels	83
 Chapter 2. Harmonic Analysis on Compact Lie Groups	 90
§ 2.1 Asymptotic properties of Fourier coefficients on Compact Lie Groups	90
§ 2.2 Poisson summation formulae	110
§ 2.3 Summations of Fourier series, Peter-Weyl Theorem	128
§ 2.4 Riesz and Bessel potentials	153
§ 2.5 Riesz and Bessel potentials on Compact Homogeneous spaces	173
§ 2.6 Riesz transformations and Singular integrals	182
§ 2.7 Riesz-Gong means and its applications	204
 Chapter 3. Harmonic Analysis on Compact Homogeneous Spaces	 218

§ 3. 1	$H^p(M)$ spaces and Poisson integrals	218
§ 3. 2	Grand maximal functions	266
§ 3. 3	Characterizations of $H^p(M)$	284
Chapter 4.	Applications to several complex variables	303
§ 4. 1	Bounded symmetric domains and the kernel functions	303
§ 4. 2	Bergmann kernel functions of bounded symmetric domains ...	309
§ 4. 3	Poisson-Hua kernel functions and Cauchy kernel functions ...	324
§ 4. 4	Boundary behaviours of Poisson-Hua integrals and Cauchy integrals	343
References		357