四好一体
4Good

笑傲高考

教好·学好·练好·考好

3+X高考总复习

数学

学生用书

教好贵在高屋建瓴

学好重在触类旁通

练好巧在举一反三

考好尽在四好一体

陕西师范大学出版社

四好一体 4Good

策划 雷永利 张 昊

笑傲高考

3+X高考总复习

数学

学生用书

主　编 张软生
副主编 校书祥 胡家谷 李东乾
编　者 陆金兴 白惠玲 刘启慧
段全庆 王海英 冯瑞先
史鸿璐 朱四清 校书祥
胡家谷 张软生 李东乾
张新慧 梁春兰 鲁海舟

陕西师范大学出版社

图书代号:JF201100

图书在版编目(CIP)数据

高考总复习·数学/张软生主编. -西安:陕西师范大学出版社,2001.7
(学生用书)

ISBN 7-5613-2224-0

Ⅰ.高 … Ⅱ.张 … Ⅲ.数学课-高中-升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 030107 号

特约编辑 吴 平
责任编辑 李长安
封面设计 高 超
责任校对 何红霞
技术设计 鹏 飞
出版发行 陕西师范大学出版社
社　　址 西安市陕西师大 120 信箱(邮政编码:710062)
网　　址 http://www.snuph.com
经　　销 新华书店
印　　刷 西安新华印刷厂
开　　本 787×1092 1/16
印　　张 19.5
字　　数 512 千
版　　次 2001 年 7 月第 1 版
印　　次 2001 年 7 月第 1 次
定　　价 20.00 元

开户行:西安工行小寨分理处 账 号:216-144610-44-815
读者购书、书店添货或发现印刷装订问题,请与发行科联系、调换。
电 话:(029)5251046(传真) 5233753 5307864
E-mail: nuph@pub.xaonline.com

本书导读

《笑傲高考》丛书3+X总复习系列由教师指导用书和学生复习用书同步配套组成。教师用书内容全面丰富,所有习题均有详细的解析过程;学生用书在教师用书基础上按需取舍,突出检测,所有训练题答案统一附在全书之后。既注重教与学的同步性,更体现教与学的互动性,从而使教、学、练、考成为一个严谨而实用的整体。

本丛书的主要栏目有:

【知识网络】 用图表对本章知识进行归纳、梳理。

【高考要求】 依据最新考纲,指明本章复习应达到的高考要求。

【命题透视】 结合历届高考,分析阐述本部分内容在高考中的考点、热点、所占分值、常见题型。

【重点难点点拨】 对本章重点、难点、疑点剖析讲解,详而不赘、疏而不漏,旨在答疑解惑,夯实基础,突破难关。

【典型例题剖析】 精选有针对性和代表性例题,指出命题意图、考查知识点并提供多种解题思路,点拨解题技巧,总结解题规律,剖析易混概念和常见错误。

【备选例题】 供教师在教学中根据学生实际灵活选用。

【随堂指导训练】 依据各节复习内容,选取难度适中习题,其中教师用书提供详尽解题过程,学生用书简明答案附在全书最后。

【课后分级训练】 分A、B两级,A级为基础巩固题,重在覆盖知识面,难度接近高考;B级为拓展拔高题,旨在综合运用,难度等同高考。

【教学建议】 专为教师更好地指导复习所设。

【开放型与探索型试题导航】 以发掘和培养学生的发散思维能力为目标,通过对近几年出现的与生产及生活实际结合紧密的应用型新题型的举例剖析,增强学生适应和解答新题型的能力。

【高考专题讲座】 含有"解题方法策略、高考试题回顾、高考命题趋向、3+X综合辅导"四个专题。

1. **解题方法策略**:通过典型例析对解题方法、规律及技巧进行归纳、梳理、类化,并结

合每一种方法进行专项训练；

2. 高考试题回顾：选取近年高考典型试题进行剖析、讲解，让学生接受仿真训练；

3. 高考命题趋向：分析近年高考题的热点及方向，对题型、题量、考查重点进行预测，帮助学生作好临考准备；

4. 3+X综合辅导：根据3+X综合考试新要求，通过归纳例析学科内知识综合点和与其他学科的跨学科知识联系点，使学生体会并明确3+X综合考试的目的、要求、切入点、题型及复习方法，从而全面系统地适应3+X考试。

【综合检测】 每部分(单元)配备一套综合能力测试题，书末设有高考模拟题，题型、题量、难度均以高考要求为准，包含开放型和探索型创新题。

让微笑永远陪伴着你

（代　前　言）

高考，承载着国家的期望和民族的重托，更是中学生人生的一个重要转折点，因而竞争超乎寻常的激烈。在这没有硝烟的大搏战中，一线教师为高考升学率而殚精竭虑，苦苦思索；莘莘学子为闯过难关而心力交瘁，茶饭不香；家长更因望子成龙而四处奔波，坐卧不宁。为了使更多的学生学而有章，考而不乱，圆大学之梦，获取更大的发展，回报亲人和社会，我们北上海淀，南下黄冈，兵分多路走访了全国近百所重点中学，在充分调研并认真听取广大一线教师建议的基础上，紧跟高考最新动向，广纳教改最新信息，融合复习最新策略，策划编写了《笑傲高考》丛书。旨在使教师减轻压力，胸有成竹执教；让学生放下包袱，轻松裕如学习。

本丛书包括新教材高中同步点面突破系列和 3 + X 高考总复习系列，每一学科均由教师指导用书和学生复习用书同步配套组成，变一般教辅书单纯以学生为使用对象为以教师、学生共同为使用对象，突出了教与学的同步性和互动性，使教、学、练、考成为一个严谨而实用的整体。其突出特点是：

全　一是学科全，覆盖了高中从同步到高考的所有学科，含高考文科综合、理科综合；二是内容全，融知识串讲、专项讲座、阶段测试于一体，体现知识间的交叉和渗透，包含了知识网络、典型例题剖析、指导训练与分级训练、开放型与探索型试题导航、高考命题专项研究、3 + X 综合辅导等 20 多个栏目。

新　一是体例新，依据考纲创新设计各章节框架，将解题方法指导、3 + X 综合辅导、专项检测跟踪于每章节内容之后，教师用书应有尽有，详尽分析和解答直接跟在每道题后（含例题和习题），学生用书按需取舍，简答附在全书最后；二是题型新，所选例题和习题反映最新教改动向和信息，切合高考改革趋势，突出综合型和应用型，体现预测性和实战性。

精　一是选题精，所选习题均有很强的示范性和针对性；二是剖析精，每道例题均按命题目的、思路分析、解析指导、易错指津、规律总结等多角度进行分析，使教师教学挥洒自如，学生学习触类旁通。

省　一是省时省力，将教师教学用书与学生复习学习用书同步浓缩、有机整合成一个整体，避免了教与学的分离和学生多品种寻找参考资料的烦恼，互用互动，相得益彰，教师省力，学生省时；二是省心省钱，买几套书才能解决的复习学习问题，用《笑傲高考》一套就能达到同样效果，学生省心，家长省钱。

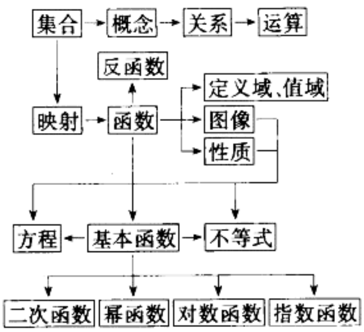
抓住高考每一分，理想势必变成真。融教好、学好、练好、考好为一体的《笑傲高考》丛书助你梦想成真，笑傲人生！

《笑傲高考》丛书策划组

目 录

第1章 幂函数、指数函数与对数函数

知识网络



高考要求

1. 理解集合、子集、交集、并集、补集的概念，了解空集和全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义，能掌握有关的术语和符号，能正确地表示一些较简单的集合.

2. 理解 $|ax+b|<c$、$|ax+b|>c(c>0)$ 型不等式的概念，并掌握它们的解法；了解二次函数、一元二次不等式及一元二次方程三者之间的关系，掌握一元二次不等式的解法.

3. 了解映射的概念，在此基础上理解函数及其有关的概念，掌握互为反函数的函数图像间的关系.

4. 理解函数的单调性和奇偶性的概念，并能判断一些简单函数的单调性和奇偶性，能利用函数的奇偶性与图像的对称性的关系描绘函数的图像.

5. 掌握函数图像的平移变换和对称变换，并利用这些变换作出一些简单函数的图像.

6. 理解分数指数幂、根式的概念，掌握分数指数幂的运算法则.

7. 理解对数的概念，掌握对数的性质和运算法则.

8. 掌握幂函数的概念及其图像和性质，在考查掌握函数性质和运用其解决问题时，所涉及到的幂函数 $f(x)=x^a$ 中的 a 限于在集合 $\left\{-2,-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{2},1,2,3\right\}$ 中取值.

9. 掌握幂函数、指数函数、对数函数的概念及其图像和性质，并会解简单的指数方程和对数方程.

10. 会利用本章所学的知识解决一些简单的实际问题.

命题透视

分值 年 / 知识点	1995年	1996年	1997年	1998年	1999年	2000年
集　合	4分	4分	4分		4分	
映射与函数				4分	8分	4分
函数图像	4分	4分	4分	4分	4分	
函数性质	4分	5分	5分		4分	6分
函数不等式	4分	12分	12分			6分
函数应用	12分			12分	5分	12分

从上表中不难看出，本章内容在近几年高考试题中所占比重较大，有选择题、填空题及解答题，题的难度有低档题、中档题和高档题，每年高考中本章所占分值20～30分不等，尤其是函数、不等式与函数的综合应用是每年高考的重点和难点，因此在复习中不但要掌握有关的基本知识和基本方法，还要注重综合应用所学知识能力的培养.

第一节　集合的概念及其运算

重点难点点拨

1. 掌握集合的特征是解有关集合问题的重要一

环.比如方程的解集、不等式的解集、函数的定义域、函数的值域、函数图像上的点集等,都是本节研究的重要内容.

2. 注意两大关系的区分:一是元素与集合用$\in$和$\notin$符号连接,二是集合与集合用$\subseteq$、$\supseteq$、$\subset$、$\not\subseteq$、$=$等符号连接.

3. 空集是一个特殊的集合,注意它有两条重要性质:空集是任何一个集合的子集,是任何非空集合的真子集.

4. 解有关集合问题时,要对集合进行化简或转化为熟知的代数、三角、几何问题.

5. 掌握子集、交集、并集、补集的性质,对有关集合问题进行等价转化.

6. 数形结合的思想:

(1) 在深刻理解集合的交、并、补概念的基础上,用文氏图解有关集合问题,可化难为易.

(2) 两个集合都是数集,求它们的交、并、补,通常用数轴直观表示.

(3) 若集合中的元素是点时,只要把满足条件的点在坐标平面上表示出来,转化为解析几何问题.

典型例题剖析

[例1] 已知集合 $M=\{a,a+d,a+2d\}$,$N=\{a,aq,aq^2\}$,其中 $a\neq 0$,且 $M=N$,求 q 的值.

命题目的: 通过考查集合相等的概念,使学生复习巩固分类讨论的思想和解方程组的基本方法和技巧.

思路分析: 根据 $M=N$,M 和 N 中的元素应完全相同,而 a 与 a 已经相同,关键是 $a+d$ 与 aq 相等还是与 aq^2 相等?都有可能.所以应分两种情况去解.

解: 由 $M=N$ 得

(1) $\begin{cases} a+d=aq, & ① \\ a+2d=aq^2. & ② \end{cases}$ 或

(2) $\begin{cases} a+d=aq^2, & ③ \\ a+2d=aq. & ④ \end{cases}$

由(1)知 ①×2−② 式得 $a=a(2q-q^2)$,

$\because a\neq 0$, $\therefore q^2-2q+1=0$, $\therefore q=1$.

因为集合中的元素是互异的,所以 $q=1$ 应舍去.

由(2)知 ③×2−④ 式得 $a=a(2q^2-q)$,

$\therefore 2q^2-q-1=0$, $\therefore q=1$ 或 $q=-\dfrac{1}{2}$.

同理舍去 $q=1$,所以 q 的值应是 $-\dfrac{1}{2}$.

评注: 在解方程组(1)和(2)时用的都是加减消元法,本题当然也可以用代入消元法,同学们应该清楚解方程组的思路就是消元,消元的两种最基本的方法就是代入法和加减法,当然还有一些特殊方法,如平方相加、两式相除等,在以后的学习中可以不断地进行总结.

[例2] 已知集合 $A=\{x\mid x^2+mx+1=0,\ x\in\mathbf{R}\}$,若 $A\cap\mathbf{R}^-=\varnothing$,求 m 的取值范围.

命题目的: 综合考查集合的交、并、补的知识和有关方程的知识.

思路分析: ① 直接由 $A\cap R^-=\varnothing$ 得,应考虑分两种情况:$A=\varnothing$ 和 $A\neq\varnothing$.$A=\varnothing$ 即 $\Delta<0$;$A\neq\varnothing$,只须方程 $x^2+mx+1=0$ 的根非负.② 可间接考虑,先求 $A\cap\mathbf{R}^-\neq\varnothing$ 时 m 的取值范围,然后取其补集即可得 $A\cap\mathbf{R}^-=\varnothing$ 时 m 的取值范围.而 $A\cap\mathbf{R}^-\neq\varnothing$ 只须考虑一种情况,即 $x^2+mx+1=0$ 的根都是负数(不可能出现一正一负情况).

[例3] 已知集合 $A=\{$函数 $y=x^2-ax$ 的最小值,$x\in[0,1]\}$,$B=\{$函数 $y=x+a$ 的最小值,$x\in[0,1]\}$,求 $A\cap B$.

命题目的: 通过集合的概念来考查函数最值的有关知识,主要目的还是在于考查对集合概念的理解.

思路分析: 对集合 B 容易求出 $B=\{a\}$,对于集合 A,有很多读者认为 $y=x^2-ax=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}\geqslant-\dfrac{a^2}{4}$,$\therefore A=\left\{-\dfrac{a^2}{4}\right\}$.从而使 $a=-\dfrac{a^2}{4}$,即 $a=0$ 或 $a=-4$,故所求的 $A\cap B=\{0,4\}$.以上解法错误有二:① 当 $x\in[0,1]$ 时,$y=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}$ 的最小值未必是 $-\dfrac{a^2}{4}$;② 本题要求的是 $A\cap B$ 而不是数值 a 的集合.

随堂指导训练

1. 判断下列命题及式子是否正确.

(1) 所有的小正数组成一个集合;

(2) 集合 $\{y\mid y=x^2-x-1\}$ 与集合 $\{(x,y)\mid y=x^2-x-1\}$ 是同一个集合;

(3) 集合 $\{a,b,c\}$ 与集合 $\{c,a,b\}$ 表示同一个集合;

(4) $\{1,2\}\subseteq\{1,2\}$;

(5) $\varnothing=\{0\}$;

(6) $a\subset\{a\}$;

(7) $\varnothing \subset \{0\}$;

(8) $\varnothing \in \{\varnothing\}$.

2. 满足 $\{a\} \subseteq M \subset \{a,b,c,d\}$ 的集合 M 共有 ( )

A.6个　B.7个　C.8个　D.15个

3. 把图 1－1 中阴影部分所表示的集合用 A、B、C 表示出来是________.

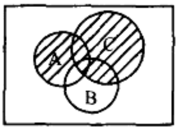


图 1－1

4. 设 $P = \{(x,y) \mid |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$, $Q = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant a, a > 0\}$, 要使 $P \cap Q = P$, 则 a 的取值范围是________.

课后分级训练

A 级

1. 设 $A = \{0,1\}$, 且 $B = \{x \mid \varnothing \subset x \subseteq A\}$, 则用列举法表示 B 应为________.

2. 下列四个推理:① $a \in (A \cup B) \Rightarrow a \in A$, ② $a \in (A \cap B) \Rightarrow a \in (A \cup B)$, ③ $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$, ④ $A \cup B = A \Rightarrow A \cap B = B$, 其中正确的个数为 ( )

A.1　B.2　C.3　D.4

3. 满足 $A \cup B = \{a_1, a_2\}$ 的集合 A、B 的组数为 ( )

A.5　B.7　C.9　D.10

4. 设集合 $A = \{x \mid x^2 = 1\}$, $B = \{x \mid x^2 - 2ax + b = 0\}$, 若 $B \neq \varnothing$, 且 $B \subseteq A$, 求 a, b 的值.

5. 已知 $A = \{x \mid x^3 + 3x^2 + 2x > 0\}$, $B = \{x \mid x^2 + ax + b \leqslant 0\}$, 且 $A \cap B = \{x \mid 0 < x \leqslant 2\}$, $A \cup B = \{x \mid x > -2\}$, 求 a, b 的值.

6. 已知集合 $A = \{y \mid y^2 - (a^2 + a + 1)y + a(a^2 + 1) > 0\}$, $B = \{y \mid y = \dfrac{1}{2}x^2 - x + \dfrac{5}{2}, 0 \leqslant x \leqslant 3\}$, 若 $A \cap B = \varnothing$, 求实数 a 的取值范围.

B 级

1. 已知集合 $A = \{x \mid |2x - 1| > x + 1\}$, $B = \left\{x \,\middle|\, \dfrac{2x-1}{x+1} \geqslant 1\right\}$ 且全集 $I = \mathbf{R}$, 则 $A \cup \bar{B} =$________.

2. 若 I、$\varnothing$ 表示全集和空集, $(\bar{A} \cup B) \subset A$, 则 ( )

A. $\varnothing \subset A \subset B$　　B. $B \subset A \subset I$

C. $B = \varnothing$　　D. $A = I$ 且 $B \neq A$

3. 已知全集 $I = \{(x,y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$,

$A = \{(x,y) \mid y = 3x - 2\}$,

$B = \left\{(x,y) \,\middle|\, \dfrac{y-4}{x-2} = 3\right\}$, 求 $A \cap B$ 及 $\bar{A} \cup B$.

4. 设 a、b 是两个实数,

$A = \{(x,y) \mid x = n, y = na + b, n \in \mathbf{Z}\}$,

$B = \{(x,y) \mid x = m, y = 3m^2 + 15, m \in \mathbf{Z}\}$,

$C = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 144\}$,

是平面 xOy 内的点集合,讨论是否存在 a 和 b 使得(1) $A \cap B \neq \varnothing$ ($\varnothing$ 表示空集), (2) $(a,b) \in C$ 同时成立.

第二节　二次函数及其应用(一)

重点难点点拨

1. 一元二次函数是初中学过的内容,但它在高中学习中起到非常重要的作用,贯穿高中全部学习过程,同时也是高考要考的主要内容之一.很多学生由于这方面知识薄弱,从而影响了整个高中阶段的学习,因此希望同学们对本节知识学习要高度重视.

2. 一元二次函数的内容有:

定义域: $x \in \mathbf{R}$.

值域: 当 $a > 0$ 时, $y \geqslant \dfrac{4ac - b^2}{4a}$,

当 $a < 0$ 时, $y \leqslant \dfrac{4ac - b^2}{4a}$;

图像是条抛物线,对称轴方程是 $x = -\dfrac{b}{2a}$;

当 $a > 0$ 时,开口向上, $a < 0$ 时,开口向下,顶点坐标是 $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

性质: 当 $b = 0$ 时,是偶函数;

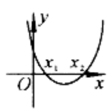
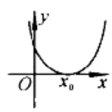
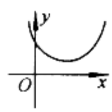
当 $b \neq 0$ 时,是非奇非偶函数;

当 $a > 0$ 时,在 $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$ 上是减函数,在 $\left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$ 上是增函数;

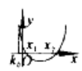
当 $a < 0$ 时,在 $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$ 上是增函数,在 $\left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$ 上是减函数.

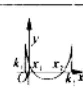
3. 一元二次函数的应用很广,本节主要是讲解它在不等式和方程方面的应用.利用二次函数的图像可以来解一元二次不等式和讨论一元二次方程的实根分布情况.为了学习的方便,我们在解一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 和 $ax^2 + bx + c < 0$ 时,二次项系数 a 都变为正数.解一元二次方程时二次项系数 a 同样也

变为正数，当我们在解一个一元二次方程时，且其根有一个限制条件，我们往往要借助于二次函数的图像来解，见下列两个表格

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$y=ax^2+bx+c$ 的图像 $(a>0)$			
方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解	$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0=-\frac{b}{2a}$	无解
$ax^2+bx+c>0$ 的解	$x<x_1$ 或 $x>x_2$	$x\neq x_0$	$x\in\mathbf{R}$
$ax^2+bx+c<0$ 的解	$x_1<x<x_2$	$x\in\varnothing$	$x\in\varnothing$

在解一元二次不等式时要注意反过来时的问题．尤其是一元二次不等式的解是 $\varnothing$ 和 $\mathbf{R}$ 的情况的等价命题：$ax^2+bx+c>0$ 的解是 $\mathbf{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\\Delta<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=b=0\\c>0\end{cases}$；$ax^2+bx+c<0$ 的解是 $\mathbf{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\\Delta<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=b=0\\c<0\end{cases}$．同学们在做题时易丢掉特殊情况．

根的分布	$x_1<x_2<k$	$k<x_1<x_2$	$x_1<k<x_2$
图像			
充要条件	$\begin{cases}f(k)>0\\-\frac{b}{2a}<k\\\Delta>0\end{cases}$	$\begin{cases}f(k)>0\\-\frac{b}{2a}<k\\\Delta>0\end{cases}$	$f(k)<0$

根的分布	$x_1,x_2\in(k_1,k_2)$	$k_1<x_1<k_2<x_2<k_3$	在 (k_1,k_2) 内有且仅有一个根
图像			
充要条件	$\begin{cases}f(k_1)>0\\f(k_2)>0\\k_1<-\frac{b}{2a}<k_2\\\Delta>0\end{cases}$	$\begin{cases}f(k_1)>0\\f(k_2)<0\\f(k_3)>0\end{cases}$	$f(k_1)f(k_2)<0$ 或 $\Delta=0$ 且 $-\frac{b}{2a}\in(k_1,k_2)$

以上列出的6种情况是我们学习中常见的情况，一元二次方程实根分布情况很多，其余情况同学们可以根据以上情况依此类推．

典型例题剖析

[例1] 若二次函数 $f(x)=4x^2-2(p-2)x-2p^2-p+1$ 在区间 $[-1,1]$ 内至少存在一点 c，使 $f(c)>0$，求实数 p 的取值范围．

命题目的： 考查二次函数和不等式的基本知识．

思路分析： 可以利用二次函数在 $[-1,1]$ 上的图像特征得 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值一定是 $f(-1)$ 或 $f(1)$．尤其是要求在 $[-1,1]$ 上至少有一个实数 c，使 $f(c)>0$，我们可利用补集法或直接法．

解法1：（补集法）

令 $\begin{cases}f(-1)\leqslant 0,\\f(1)\leqslant 0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2p^2+p+1\leqslant 0,\\-2p^2-3p+9\leqslant 0.\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}p\leqslant-\frac{1}{2}\text{ 或 }p\geqslant 1\\p\leqslant-3\text{ 或 }p\geqslant\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow p\leqslant-3$ 或 $p\geqslant\frac{3}{2}$，

$\therefore$ 符合题意的解是 $-3<p<\frac{3}{2}$．

解法2：（直接法）

依题意，有 $f(-1)>0$ 或 $f(1)>0$，

即 $2p^2-p-1<0$ 或 $2p^2+3p-9<0$，

$\therefore -\frac{1}{2}<p<1$ 或 $-3<p<\frac{3}{2}$．

评注： 两种解法都涉及解不等式，但一是求交集，另一是求并集，要好好理解其中的涵义．

[例2] 关于 x 的实系数二次方程 $x^2+ax+b=0$ 的两实根为 α、β，证明：

(1) 如果 $|\alpha|<2$，$|\beta|<2$，

那么 $2|a|<4+b$ 且 $|b|<4$；

(2) 如果 $2|a|<4+b$ 且 $|b|<4$，

那么 $|\alpha|<2$，$|\beta|<2$．

命题目的： 考查一元二次方程根与系数的关系，绝对值不等式的性质和证明，一元二次方程的实根分布理论，逻辑推理能力和分析问题、解决问题的能力．

思路分析： 根据(1)和(2)互逆的两个命题，所以重点是证(1)．要证 $2|a|<4+b$ 且 $|b|<4$，由韦达定理很容易得 $|\alpha||\beta|=|b|<4$，所以只须证 $2|a|<4+b$，它等价于 $-4-b<2a<4+b$，由求根公式找到 α、β 与 a、b 之间的关系，再由 $|\alpha|<2$，$|\beta|<2$ 可得要证的不等式．或由 $|\alpha|<2$、$|\beta|<2$ 知 α、$\beta\in(-2,2)$，利用实根分布理论找出要证的不等关系．

证明1：依题意，设二次方程有两实根 α、β，所以判别式 $\Delta = a^2 - 4b \geqslant 0$.

不妨设 $\alpha = \frac{1}{2}(-a - \sqrt{\Delta}), \beta = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{\Delta})$.

(1) $\because |\alpha| < 2, |\beta| < 2$,

$\therefore |b| = |\alpha||\beta| < 4$,

且 $-2 < \frac{1}{2}(-a - \sqrt{\Delta}), \frac{1}{2}(-a + \sqrt{\Delta}) < 2$.

$\therefore 0 \leqslant \sqrt{\Delta} < 4 - a, \quad 0 \leqslant \sqrt{\Delta} < 4 + a$.

平方得 $a^2 - 4b < 16 - 8a + a^2$,

$a^2 - 4b < 16 + 8a + a^2$,

由此得 $-4(4 + b) < 8a < 4(4 + b)$,

$\therefore 2|a| < 4 + b$.

(2) $\because 2|a| < 4 + b, |b| < 4$,

$\therefore |a| < \frac{1}{2}(4 + |b|) < 4$，即 $4 \pm a > 0$,

且 $\Delta = a^2 - 4b < a^2 - 4 \times (2|a| - 4)$

$= a^2 \pm 8a + 16 = (4 \pm a)^2$.

$\therefore \sqrt{\Delta} < 4 \pm a$,

得 $-4 < -a - \sqrt{\Delta} \leqslant -a + \sqrt{\Delta} < 4$.

$\therefore -2 < \frac{1}{2}(-a - \sqrt{\Delta}) \leqslant \frac{1}{2}(-a + \sqrt{\Delta}) < 2$,

即 $-2 < \alpha \leqslant \beta < 2$.

$\therefore |\alpha| < 2, |\beta| < 2$.

证明2：(1) 根据韦达定理 $|b| = |\alpha \cdot \beta| < 4$.

因为二次函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ 开口向上，$|\alpha| < 2, |\beta| < 2$.

故必有 $f(\pm 2) > 0$,

即 $4 + 2a + b > 0, 2a > -(4 + b)$;

$4 - 2a + b > 0, 2a < 4 + b$.

$\therefore 2|a| < 4 + b$.

(2) 由 $2|a| < 4 + b$ 得 $4 + 2a + b > 0$，即

$2^2 + 2a + b > 0, f(2) > 0$; ①

及 $4 - 2a + b > 0$,

即 $(-2)^2 + (-2)a + b > 0, f(-2) > 0$, ②

由此可知 $f(x) = 0$ 的两个实根或者都在区间 $(-2,2)$ 之内或者都在 $(-2,2)$ 之外，不会出现一内一外情况．若两根 α、β 均落在 $(-2,2)$ 之外，则与 $|\alpha| \times |\beta| = |b| < 4$ 矛盾，所以 α, β 均落在 $(-2,2)$ 内．

$\therefore |\alpha| < 2, |\beta| < 2$.

评注：本题是1993年全国高考理科试题最后一题，难度系数是0.13．大部分考生得零分，主要原因是不能综合、灵活应用所学的知识．

[例3] 已知集合 $P = \{x \mid x^2 - x - 2 > 0\}, Q = \{x \mid x^2 + 4x + a < 0\}$，若 $Q \cap P = Q$，求实数 a 的取值范围．

命题目的：综合考查解不等式、集合、一元二次方程的实根分布理论和等价转换的思想．

思路分析：由 $Q \cap P = Q \Leftrightarrow Q \subseteq P$，所以应对 Q 分空集和非空集两种情况讨论．对 Q 为空集容易解决；对 Q 为非空集时，$Q \subseteq P$ 实质上是要求一元二次方程 $x^2 + 4x + a = 0$ 的两根都小于等于 -1 或都大于等于 2，问题转化为一元二次方程的实根分布理论．

[例4] 设 $f(x)$ 是定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上以2为周期的函数，对 $k \in \mathbf{Z}$，用 I_k 表示区间 $(2k - 1, 2k + 1)$，已知当 $x \in I_0$ 时 $f(x) = x^2$.

(1) 求 $f(x)$ 在 I_k 上的解析式；

(2) 对自然数 k，求集合 $M_k = \{a \mid$ 使方程 $f(x) = ax$ 在 I_k 上有两个不相等的实根$\}$.

命题目的：本题主要考查周期函数概念、解不等式的能力、数形结合的思想．

思路分析：(1) 可由函数图像平移变换的相关知识得到．(2) 由(1)得出 $f(x)$ 在 I_k 上的解析式为 $(x - 2k)^2$，方程 $f(x) = ax$ 变为 $(x - 2k)^2 = ax$，要使此方程在 $I_k = (2k - 1, 2k + 1)$ 上有两个不相等实根可以从三方面考虑：① 把方程的两根解出，大根小于 $2k + 1$，小根大于 $2k - 1$，即能求出 a 的取值范围．② 把方程 $(x - 2k)^2 = ax$ 重新整理为 $x^2 - (4k + a)x + 4k^2 = 0$，只须此方程在 $(2k - 1, 2k + 1)$ 上有两个不相同的根，利用一元二次方程的实根分布理论来做．③ 数形结合法，在同一坐标系内作出函数 $y_1 = (x - 2k)^2$ 和 $y_2 = ax$ 的图像 $(x \in (2k - 1, 2k + 1))$，只须两个图像有两个不同的交点即可．

随堂指导训练

1. 二次函数 $y = f(x)$ 满足 $f(3 + x) = f(3 - x)$ 且 $f(x) = 0$ 有两个实根 x_1、x_2，则 $x_1 + x_2$ 等于 ( )

A. 0　　B. 3

C. 6　　D. 不能确定

2. 不等式 $ax^2 + 6x + b < 0$ 的解是 $x < 1$ 或 $x > 2$，则 $a + b$ 的值是______.

3. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-6<0\}$，$B=\{x\mid x^2+2x-8>0\}$，$C=\{x\mid x^2-4ax+3a^2<0\}$，若 $A\cap B\subseteq C$，求实数 a 的取值范围.

4. 若方程 $x^2-11x+(30+a)=0$ 的两根不相同且均大于 5，求实数 a 的取值范围.

课后分级训练

A 级

1. 关于 x 的方程 $x^2+(a^2-1)x+(a-2)=0$ 的一根比 1 大，另一根比 1 小，则有（　　）

A. $-1<a<1$　　B. $a<-2$ 或 $a>1$

C. $-2<a<1$　　D. $a<-1$ 或 $a>2$

2. 若关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c<0(a\neq0)$ 的解集是空集，那么（　　）

A. $a<0$ 且 $b^2-4ac>0$

B. $a<0$ 且 $b^2-4ac\leqslant0$

C. $a>0$ 且 $b^2-4ac\leqslant0$

D. $a>0$ 且 $b^2-4ac>0$

3. 已知关于 x 的方程 $x^2+2mx+2m^2-3=0$ 的两根都大于 2，则 m 的取值范围是________.

4. $f(x)=(x-1)\log_3^2a-6x\log_3a+x+1$ 在区间 $[0,1]$ 上恒为正值，求实数 a 的取值范围.

5. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid y=-x^2+mx-1\}$，$B=\{(x,y)\mid x+y-3=0,0\leqslant x\leqslant3\}$，若 $A\cap B$ 为单元素集合，求实数 m 的取值范围.

6. 解方程 $x^2-2x+m=0,x\in[0,3]$.

B 级

1. 函数 $f(x)$ 对一切实数 x 都有 $f(2+x)=f(2-x)$，如果方程 $f(x)=0$ 恰好有 4 个不同的实根，那么这些根之和是________.

2. 方程 $x\mid x\mid-3\mid x\mid+2=0$ 的实根个数是（　　）

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

3. 对于 $-1\leqslant a\leqslant1$，求使不等式

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+ax}<\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+a-1}$ 恒成立的 x 的取值范围.

4. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 和一次函数 $g(x)=-bx$，其中 $a、b、c$ 满足 $a>b>c$，$a+b+c=0\ (a,b,c\in\mathbf{R})$.

(1) 求证：两函数的图像交于不同的两点 $A、B$；

(2) 求线段 AB 在 x 轴上的射影 A_1B_1 的长的取值范围.

第三节　二次函数及其应用(二)

重点难点点拨

1. 本节主要是学习二次函数在求最值方面的应用. 求一个二次函数的最值，要分两种情况，其一当自变量 x 可取一切实数时，$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的最值可以用公式 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ 求得，当然也可以用配方法把 $x=-\frac{b}{2a}$ 代入解析式求得；其二是当自变量 x 有一限制条件时，要求 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的最值，最好是用图像法，画出 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 在限制范围内的图像，由图像看出最大值和最小值.

2. 当遇到一个求最值的实际问题时，我们要建立一个二次函数关系式. 当这个二次函数关系式建立以后，要想方设法求出自变量的取值范围即函数的定义域，然后再利用上述介绍的方法去求最值.

3. 当一个二次函数关系式中含有参数且自变量又有限制条件时，要对参数进行讨论，一般分对称轴在限制条件内和限制条件外两大类进行分类讨论来解决问题.

典型例题剖析

[例 1] 已知函数 $f(x)=-x^2+2ax+1-a$ 在 $0\leqslant x\leqslant1$ 时有最大值 2，求 a 的值.

命题目的： 考查含参数且自变量又有限制条件的二次函数求最值的方法及分类讨论思想.

思路分析： 因为 x 有限制条件，要求函数最值，最好是作出函数图像，作二次函数图像时先看开口方向，再看对称轴位置，因为此函数的对称轴是 $x=a$ 位置不定，并且在不同位置产生的结果也不相同，所以要对对称轴的位置进行分类讨论.

解： 当对称轴 $x=a<0$ 时，如图 1－2 所示，当 $x=0$ 时，y 有最大值，$y_{max}=f(0)=1-a$，所以 $1-a=2$，即 $a=-1$，且满足 $a<0$，$\therefore a=-1$.

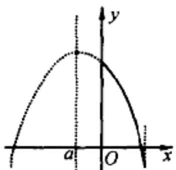


图 1－2

当对称轴 $0\leqslant a\leqslant1$ 时，如图 1－3 所示，当 $x=a$ 时，y 有最大值，$y_{max}=f(a)=-a^2+2a+1-a=a^2-a+1$，