初中数学内容精要与单元检测

（初二年级使用）

贺信淳　张燕成　邓少军　袁为民　编

科学出版社　龍門書局

同步训练与应试指南丛书

初中数学
内容精要与单元检测

（初二年级使用）

贺信淳　张燕成
邓少军　袁为民　编

科学出版社
龍門書局
1994

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书是以国家教委颁发的数学大纲为依据编写的，是与现行教材紧密配合、与教学进度相同步的学习辅导读物。全书对照初二数学教材分成两部分：代数与平面几何，代数分六章，平面几何分两章。每章再以适当的学习内容分成若干单元，引导学生深入理解课文，并通过精选的习题对学生进行科学训练，培养学生独立思考、灵活运用、分析问题和解答问题的能力。书后附有练习题答案，可供学生自我检测时参考。

本书可供初中学生及数学教师参考使用。

同步训练与应试指南丛书
初中数学
内容精要与单元检测
（初二年级使用）
贺信淳 张燕成
邓少举 袁为民 编
责任编辑 操时杰 陆晓明
科学出版社
龙门书局 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1994 年 7 月第 一 版 开本：787×1092 1/32
1994 年 7 月第一次印刷 印张：12 3/4
印数：1－10 010 字数：298 000
ISBN 7-03-004406-1/G·470
定价：8.90 元

编 写 说 明

教学实践证明，要达到中学各科教学目标，除着眼于提高课堂教与学的效率外，还应重　　外复习，做适量的习题，进行科学训练。在做精心选编的习题过程中，学生可以充分独立思考，灵活应用各科知识、技能，以及发展和提高自己的分析问题和解决问题的能力．受科学出版社之约由北京部分重点中学及教师进修院校的老师编写的《同步训练与应试指南丛书》，就是为了及时强化和灵活运用所学的知识和技能，培养科学的学习方法，开发智力，科学育人．

本丛书，包括初中数学、物理、化学和外语四科共九册的《内容精要与单元检测》．各科均按国家教委颁发的教学大纲为依据编写的，是一套与现行教材内容紧密配合、与教学进度同步的学习辅导读物．教学的重点、关键，在训练与检测的题目中得到准确的体现．

本丛书的特点有五：

首先是与教学同步．以适当的学习内容为一单元，引导学生深入理解、系统巩固、灵活应用．

其次，题型精活．选编题目在注意覆盖面中"精"字在培力能力提高中体现"活"字，题目有一定梯度和相当的难度．在"审题"与"解题"的训练中，能激发学生思考较广泛的问题．

第三，及时反馈．在独立钻研、认真解答题目后，可以把所附答案仔细看一遍，检查有无错漏之处，及时改正后．认真思考解题中应用了哪些有关概念、定律、知识和基本技能，总

结通过解题训练在知识和技能上的收获.

第四，具有多种功能. 既可供学习新课时使用，又可供各年级期末复习和初三总复习时使用.

第五，本丛书中的应试指南部分，详细分析了各年级期末考试试题及中考试题的题型特点，题目分布及应试对策，可以开扩学生思路，提高应试能力.

遵循学科知识结构之序、学生认识过程之序和学生心理发展之序编写的《同步训练与应试指南丛书》，将有效地满足教与学的实际需要. 我们衷心祝愿学习和使用本丛书的同学们，知识掌握得更加扎实和灵活，头脑变得更加聪明.

《同步训练与应试指南丛书》

编　者

1994.6

目　　录

同步训练部分

代数部分

平面几何部分

应试指南部分

同步训练部分

代数部分

第八章　因式分解

第一单元　提取公因式法

一、重点内容精讲

通过本单元的学习，应掌握下述两个问题：

1. 因式分解的意义

把一个多项式化为几个整式的积的形式，叫做多项式的因式分解.

正确理解因式分解的意义是学好因式分解的基础，应从四个方面理解：

(1) 因式分解是对多项式而言，因为单项式本身已经是整式的积的形式，所以没有必要研究单项式的因式分解.

(2) 因式分解是把一个多项式化为几个整式的积的形式，即被分解的式子以及分解的结果都应当是整式，所以因式分解是整式范畴内的概念，如

$$\frac{4}{9}a^2-0.01b^2=\left(\frac{2}{3}a\right)^2-(0.1b)^2$$

$$=\left(\frac{2}{3}a+0.1b\right)\left(\frac{2}{3}a-0.1b\right),$$

虽然系数中出现了分数和小数，但它们仍然是整式，所以符合因式分解的要求.

又如，$a-b=\frac{(a-b)(a+b)}{a+b}=\frac{1}{a+b}(a+b)(a-b)$，因为结果中出现了分式，所以上述变形就不是因式分解.

(3) 因式分解的最后结果应当是"积"，如

$$x^2+4x+8=x^2+4(x+2)$$

或 $$x^2+4x+8=x(x+4)+8,$$

最后结果都不是乘积. 所以都不是因式分解. 而 $a^4-1=(a^2+1)(a^2-1)$，最后结果虽然是整式的积，可是由于 a^4-1 在有理数范围内还可以继续分解，所以也不符合因式分解的要求.

总之，在指定的数集内，每个因式都应分解到不能再分解为止. 如

$$a^4-1=(a^2+1)(a-1)(a+1)$$

才符合因式分解的要求.

(4) 因式分解与整式乘法既有区别又有联系，从一定意义上讲，因式分解是整式乘法的相反变形. 如

$$(x+5)(x-7)\underset{\text{因式分解}}{\overset{\text{整式乘法}}{\rightleftharpoons}}x^2-2x-35.$$

可见，整式乘法是求几个因式的积，最后结果应是和差形式或单项式；而因式分解是求因式的过程，最后结果是积的形式. 例如

计算 $(x+1)(x+2)-6=x^2+3x+2-6=x^2+3x-4$，

将 $(x+1)(x+2)-6$ 分解因式，则应为

$$(x+1)(x+2)-6=x^2+3x+2-6$$
$$=x^2+3x-4=(x-1)(x+4).$$

2. 提取公因式法

(1) 提取公因式的理论根据是乘法对加法的分配律，即

$$m(a+b-c)=ma+mb-mc,$$

根据因式分解与乘法的关系，反过来则有

$$ma+mb-mc=m(a+b-c).$$

这就是说，把多项式 $ma+mb-mc$ 化成了两个因式 m 与 $a+b-c$ 的积的形式，即进行了因式分解.

(2) 使用提取公因式法的关键是确定公因式，其方法如下：

①当系数是整数时，要把各项系数的最大公约数提出来，做为公因式的系数；

②取各项都含有的字母的最低次幂做公因式的因式.

③公因式可能是单项式，也可能是多项式，当公因式是多项式时，应注意下述变形：

① $b+a=a+b$;

② $b-a=-(a-b)$;

③ $(b-a)^2=(a-b)^2$;

④ $(b-a)^3=-(a-b)^3$;

⑤ $(b-a)(c-a)=(a-b)(a-c)$;

⑥ $(b-a)(c-a)(d-a)=-(a-b)(a-c)(a-d)$.

(4) 提取公因式后所得乘积形式应为

$$n\text{ 项式}=\text{公因式}\times\text{新的 }n\text{ 项式}.$$

可见，当公因式和原多项式中某项相同时，提取公因式后，该项应当是 ± 1，而不应当是零.

(5) 提取公因式法是因式分解应当首先考虑的方法，但不是全部方法，所以在提取公因式后，还应当考虑使用其他方法继续分解.

二、典型例题解析

例1 分解因式 $-24x^3+18x^2-12x$.

分析 如果多项式的第一项系数为负时，应提取负系数公因式，以使第一项系数为正，从而为继续分解创造条件.

解 $-24x^3+18x^2-12x=-6x(4x^2-3x+2)$.

例2 分解因式 $2a(a-b)^3-a^2(a-b)^2+ab(b-a)^2$

分析 提取公因式要彻底，并且要一次完成，不能分成几次去提取公因式；在提取公因式后，要把每个因式内部化简，相同的因式要写成幂.

解 $2a(a-b)^3-a^2(a-b)^2+ab(b-a)^2$

$=2a(a-b)^3-a^2(a-b)^2+ab(a-b)^2$,

$=a(a-b)^2[2(a-b)-a+b]$,

$=a(a-b)^2(2a-2b-a+b)$,

$=a(a-b)^2(a-b)$,

$=a(a-b)^3$.

例3 分解因式 $12x^{m+1}y^{n-1}-8x^my^n+6x^{m-1}y^{n+1}$.

分析 由于 x,y 的指数含有字母，所以更应注意确定公因式的条件.

解 $12x^{m+1}y^{n-1}-8x^my^n+6x^{m-1}y^{n+1}$

$=2x^{m-1}y^{n-1}(6x^2-4xy+3y^2)$.

三、单元学习训练

训 练 题 一

1. 填空：

(1) 把一个________化为____________的形式，叫做因式分解.

(2) $ma+mb-mc=m(a+b-c)$，这样的因式分解叫做

________.

(3) 多项式的乘法与多项式的因式分解都是______变形．它们的区别：前者是__________，后者是______．

(4) 单项式 $-4a^2bc^3, 12ab^2c, 8ab^3$ 的公因式是______．

(5) 多项式 $9x^3y-36xy^3+3xy$ 提取公因式 $3xy$ 后，另一个因式是____项式，这个因式是____________．

2．选择答案：

(1) 在下列各式中：$a-b=b-a$, $(a-b)^2=(b-a)^2$, $(a-b)^2=-(b-a)^2$, $(a-b)^3=(b-a)^3$, $(a-b)^3=-(b-a)^3$, $(a-b)(a+b)=(-a+b)(-a-b)$，正确的等式有（　　）．

（A）1 个　　（B）2 个　　（C）3 个　　（D）4 个

(2) 在下面各式中，从等号左边到右边的变形是因式分解的为（　　）．

（A） $(x-3)(x+3)=x^2-9$

（B） $x^2+x+1=x(x+1)+1$

（C） $-5x^2y^3=-5xy\cdot(xy^2)$

（D） $x^2-3x-4=(x-4)(x+1)$

(3) 在分解 $-5x^3(3a-2b)^2+(2b-3a)^2$ 时，提出公因式 $-(3a-2b)^2$ 后，另一个因式是（　　）．

（A） $5x^3$　（B） $5x^3+1$　（C） $5x^3-1$　（D） $-5x^3$

(4) 在 $(a+c)^{m+1}(b+c)^{n+1}-(a+c)^m(b+c)^{n-1}$（$m, n$ 是自然数，$n>1$）中，各项的公因式是（　　）．

（A） $(a+c)(b+c)$　　（B） $(a+c)^m(b+c)^{n+1}$

（C） $(a+c)^m(b+c)^{n-1}$　　（D） $(a+c)^{m+1}(b+c)^{n+1}$

(5) 分解 $b^2(x-2)+b(2-x)$，结果应为（　　）．

（A） $(x-2)(b^2+b)$　　（B） $b(x-2)(b+1)$

（C） $(x-2)(b^2-b)$　　（D） $b(x-2)(b-1)$

训 练 题 二

1. 把下列各式分解因式(m,n是自然数)：

(1) $5a^2b-10a^3b^4$；　　(2) $20a^3b-25a^2b^2+5a^2b$；

(3) $-12x^4y+8x^2y^2-4x^2y$；　(4) n^m-n^{m+1}；

(5) $y^{2n}+3y^n$；　　(6) $-4a^{n+2}+6a^{n+1}-14a^n$.

2. 把下列各式分解因式：

(1) $3a(a-2)-(2-a)$；　(2) $7a(x-y)^2-4b(y-x)^2$；

(3) $3x(x-y)^3+6y(y-x)^3$；

(4) $a^3b^2(a-b)^3-a^2b^3(b-a)^3$；

(5) $4a(a-b)^3-6b(b-a)^2$；

(6) $a(x-2)+b(x-2)-c(2-x)$.

3. 把下列各式分解因式：

(1) $15a(a-2)-9b(a-1)(2-a)$；

(2) $24x^2y(a-3b)^3-18xy^2(3b-a)^2$；

(3) $(a-b)(b-c)-(b-a)(c-b)xy$；

(4) $8a(a-1)-4(1-a)(a-3)$.

训 练 题 三

1. 把下列各式分解因式：

(1) $a(a-b)^3+2a^2(a-b)^2-2ab(b-a)^2$；

(2) $ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)$；

(3) $(ax+by)^2+(bx-ay)^2$；

(4) $(ax+by)^2+(ay-bx)^2+c^2x^2+c^2y^2$.

2. 利用因式分解计算：

(1) $13.4\times12+46.6\times12$；

(2) $32\times3.14+56\times3.14+12\times3.14$.

3. 证明　$(a+2)(a+3)+(a+1)(a+4)+(a+1)(a+3)$

$+(a+2)(a+4)$

$=(2a+3)(2a+7)$.

4. 证明：奇数的平方减去1能被8整除.

5. 已知$2n-m$是3的倍数，证明$8n^2+10mn-7m^2$是9的倍数(m,n是整数)

四、单元自我检测

1. 在方框内添上适当的符号，使等式成立：

(1) $2y-3x=\square(3x-2y)$；

(2) $(5a-3b)^3=\square(3b-5a)^3$；

(3) $(2x^2-y^2)^2=\square(y^2-2x^2)^2$；

(4) $(-a-b)(b-a)=\square(a+b)(a-b)$；

(5) $(b+a)(b-c)(c-a)=\square(a+b)(b-c)(a-c)$.

2. 把下列各式分解因式：

(1) $(1-xyz)a+(x+y+z)(xyz-1)$；

(2) $a^2b^3(3a^2-4b^2)^3-a^3b^2(4b^2-3a^2)^2$；

(3) $ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$；

(4) $(x+2)(x+3)-6$.

3. 已知$0<a<1$，试比较a^3与a^2的大小.

4. 球的面积计算公式是$S=4\pi R^2$(R是球的半径)，今有三个球的半径分别为6厘米，8厘米，10厘米. 求这三个球的总面积.

第二单元　应用公式法

一、重点内容精讲

通过本单元的学习，应掌握下述三个问题：

1. 平方差公式　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

平方差公式的结构特征是：

(1) 多项式是二项式或能变成二项式的形式.

(2) 两项都是完全平方，并且符号相反，即a^2-b^2，$-a^2+b^2=-(a^2-b^2)$能用平方差公式分解. 而a^2+b^2，$-a^2-b^2$则不能用平方差公式分解. 也就是多项式能够化成$(\quad)^2-(\quad)^2$的形式时，就可以用平方差公式分解，括号内可以是具体的数，可以是单项式，也可以是多项式.

2. 立方和与立方差公式

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

3. 完全平方公式　$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$

完全平方公式的结构特征是：

(1) 多项式是三项式或能化成三项式的形式；

(2) 把三项式按其中某一字母降幂排列后，第一，三两项是完全平方，且同为正；

(3) 第二项的绝对值恰好是第一、三项底数乘积的2倍.

另外，如果一个二项式能用公式分解，即能用平方差公式、立方和与立方差公式分解，那么一定是得到两个不同的因式，应当写成积的形式，如果一个三项式能够用完全平方公式分解，那么一定得到两个相同的因式，应当写成幂. 有时，根据上述特征可以判断分解的正误.

二、典型例题解析

例1　把下列各式分解因式：

(1) $9x^4-y^4$；　　　　(2) $25a^2-100b^2$；

(3) $-\frac{1}{4}m^2+0.09n^2$；　　　　(4) m^4-81n^4.

分析　在使用平方差公式分解因式时，应注意反用幂的乘方法则，把完全平方写成平方的形式；并注意要先提取公因式再使用平方差公式分解，同时，还可以连续使用平方差公式分解因式.

解　(1) $9x^4-y^4=(3x^2)^2-(y^2)^2=(3x^2-y^2)(3x^2+y^2)$；

(2) $25a^2-100b^2=25(a^2-4b^2)=25(a-2b)(a+2b)$；

(3) **解法一**　$-\frac{1}{4}m^2+0.09n^2=-\left(\frac{1}{4}m^2-0.09n^2\right)$

$$=-\left(\frac{1}{2}m-0.3n\right)\cdot\left(\frac{1}{2}m+0.3n\right);$$

解法二　$-\frac{1}{4}m^2+0.09n^2=0.09n^2-\frac{1}{4}m^2$

$$=\left(0.3n-\frac{1}{2}m\right)\left(0.3n+\frac{1}{2}m\right);$$

(4) $m^4-81n^4=(m^2)^2-(9n^2)^2=(m^2-9n^2)(m^2+9n^2)$

$=(m-3n)(m+3n)(m^2+9n^2)$.

例 2　分解因式 a^6-64b^6.

解法一　$a^6-64b^6=(a^2)^3-(4b^2)^3$

$=(a^2-4b^2)(a^4+4a^2b^2+16b^4)$，

$=(a-2b)(a+2b)[(a^2+4b^2)^2-4a^2b^2]$，

$=(a-2b)(a+2b)(a^2-2ab$

$+4b^2)(a^2+2ab+4b^2)$；

解法二　$a^6-64b^6=(a^3)^2-(8b^3)^2$，

$=(a^3-8b^3)(a^3+8b^3)$，

$=(a-2b)(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)(a^2$

$+2ab+4b^2)$.

说明 此题应先使用平方差公式进行分解，这样降次迅速，可以避免出现 $a^4+4a^2b^2+16b^4$.

例 3 把下列各式分解因式：

(1) $9a^2-12ab+4b^2$； (2) $-16x^2+40xy^2-25y^4$；

(3) $x^4-10x^3y+25x^2y^2$； (4) $16x^4-8x^2y^2+y^4$.

解 (1) $9a^2-12ab+4b^2=(3a)^2-2\cdot 3a\cdot 2b+(2b)^2$

$=(3a-2b)^2$；

(2) $-16x^2+40xy^2-25y^4=-(16x^2-40xy^2+25y^4)$

$=-[(4x)^2-2\cdot 4x\cdot 5y^2+(5y^2)^2]=-(4x-5y)^2$；

(3) $x^4-10x^3y+25x^2y^2=x^2(x^2-10xy+25y^2)$

$=x^2(x-5y)^2$；

(4) $16x^4-8x^2y^2+y^4=(4x^2)^2-2\cdot 4x^2\cdot y^2+(y^2)^2$

$=(4x^2-y^2)^2=(2x-y)^2(2x+y)^2$.

例 4 把下列各式分解因式：

(1) $(3x^2-y^2)^2-(x^2-3y^2)^2$；

(2) $(x^2+y^2)^2-4xy(x^2+y^2)+4x^2y^2$；

(3) $(a^2+ab)^2-(ab+b^2)^2$； (4) $x^8-2x^4y^4+y^8$.

分析 注意综合使用平方差公式及完全平方公式进行因式分解，并注意检验每个因式是否还能继续分解.

解 (1) $(3x^2-y^2)^2-(x^2-3y^2)^2$

$=(3x^2-y^2+x^2-3y^2)(3x^2-y^2-x^2+3y^2)$,

$=(4x^2-4y^2)(2x^2+2y^2)$,

$=8(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$；

(2) $(x^2+y^2)^2-4xy(x^2+y^2)+4x^2y^2$

$=(x^2+y^2-2xy)^2=(x-y)^4$；

(3) $(a^2+ab)^2-(ab+b^2)^2$

$=(a^2+ab+ab+b^2)(a^2+ab-ab-b^2)$,