上海研究生教育用书

泛函微分方程的数值处理

匡蛟勋 著

科学出版社

内 容 简 介

本书是作者在多年科研基础上汇集了1975年以来国内外主要成果加工整理而成的．主要包括线性多步法、Runge-Kutta方法、BDF方法及块方法、线性与非线性延时系统的数值处理、中立型方程的数值处理、延时积分方程的数值解及变数延时量方程的数值处理．本书取材精炼，内容新颖，结构严谨，论述清楚．

本书可作为研究生的一本入门读物，亦可供有关科研工作者参考．

图书在版编目（CIP）数据

泛函微分方程的数值处理/匡蛟勋著．-北京：科学出版社，1999

ISBN 7-03-007342-8

Ⅰ．泛… Ⅱ．匡… Ⅲ．泛函方程：微分方程-数值计算 Ⅳ．O241.8

中国版本图书馆CIP数据核字（1999）第04637号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

科地亚印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1999年10月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1999年10月第一次印刷 印张：7 3/8

印数：1—2500 字数：190 000

定价：15.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉）

前　　言

本书将集中讨论泛函微分方程的一个重要分支，即延时微分方程（delay differential equations）的数值处理. 延时微分方程在生态学、环境科学、电力工程及自动控制等领域中有广泛的应用. 如一般的种群增长模型$N'(t)=K[1-N(t-\tau)/P]N(t)$便是一个非线性延时微分方程；电力网络中的能量损耗将出现中立型方程$\chi'(t)=A\chi'(t-\tau)+B\chi(t)+C\chi(t-\tau)$. 一般说来，常见的延时微分方程中，只有极少数能够获得理论解的解析表达式，因此这类微分方程的数值处理显得十分必要.

国际上对延时微分方程的数值处理，在 1975 年以前，只有个别学者的零星论文发表，如 1960 年的 Zverkina，1962 年的 Miranker，1964 年的 Feldstein，1965 年的 Snow，1971 年的 Tavernini 等. 直到 1975 年 Barwell 提出了数值方法的 P 稳定及 GP 稳定性概念后才开始有系统的研究. 1985 年，Watanabe 最早研究了线性多步法的 P 稳定性及 GP 稳定性，1986 年 Zennaro 首先讨论了 Runge-Kutta 方法的 P 稳定及 GP 稳定性，1991～1992 年，荷兰 Leiden 大学的 in′Hout，M. Z. Liu 及 Spijker 对 P 稳定性及 GP 稳定性又进行了十分细致深刻的研究，1984～1986 年 Jackiewicz 研究了中立型方程的数值处理，1989～1992 年 Torelli 研究了非线性延时微分方程的数值处理，并提出了 PN 稳定及 GPN 稳定的概念，1993～1994 年作者针对多延时量方程的数值解，提出了 Pm 稳定及 GPm 稳定的概念，针对中立型方程的数值处理，提出了 NP 稳定及 NGP 稳定的概念.

总的说来，国际上在 80 年代中期掀起一个研究高潮，国内 90 年代初涉足此领域，但主要对常用方法，如线性 θ 方法，线性多步法，隐式 Runge-Kutta 法，块 θ 方法等进行线性稳定性分

析，即使是线性非自治延时方程数值解的稳定性分析也研究得很少，以非线性延时方程为模型的数值稳定性分析也只是开了个头．鉴于以上原因，本书也只是以较多的篇幅介绍线性稳定性分析，在最后的章节里适当介绍非线性稳定性分析的现有成果．另外，在现有的文献中，数值试验的报道极为有限，针对延时微分方程数值处理的新方法尚未见报道．前面提到的种种数值稳定性，与数值常微分方程中的 A 稳定性及 AN 稳定性类似．

考虑到本书的系统性，我们将详细地介绍常微分方程数值解中常用的方法及其稳定性分析．尽管笔者涉足此领域为时不久，但为了不失时机地把这一新的研究领域介绍给读者，撰写此书，以引起国内学者的共鸣，乃是笔者的最终愿望．另外，仓促上阵，疏漏之处还可能有，望广大读者批评指正．

作者

1997 年于上海

目　　录

第一章 线性多步法

§1.1 引言

在较早的年月里，人们往往认为泛函微分方程，特别是延时微分方程的数值处理，与常微分方程的数值处理没有区别，没有必要加以特别的研究. 事实并非如此，用通常的线性多步法或Runge-Kutta方法去求解延时微分方程，其数值稳定性问题的分析，要比用它们去求解常微分方程初值问题复杂得多，有些问题至今悬而未决，便是有力证明. 例如，用线性多步法

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}, \quad \alpha_k \neq 0, \alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0 \tag{1.1}$$

求解方程

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \geqslant t_0, \\ y(t_0) = \eta \end{cases} \tag{1.2}$$

时,为了考察它的数值稳定性,用(1.1)去解试验方程

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), & \mathrm{Re}(\lambda) < 0, \\ y(t_0) = \eta, \end{cases} \tag{1.3}$$

便得递推关系

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h\lambda \sum_{j=0}^{k} \beta_j y_{n+j}. \tag{1.4}$$

式(1.4)也称为关于$\{y_n\}$的线性差分方程. 这个差分方程的解$\{y_n\}$(对任意的初始值$y_0, y_1, \cdots, y_{k-1}$)满足$\lim\limits_{n \to \infty} y_n = 0$的充要条件是(1.4)的特征多项式

$$p(z) = \rho(z) - \bar{h}\sigma(z), \quad \bar{h} = \lambda h, h > 0 \tag{1.5}$$

是Schur多项式,即多项式的每个零点皆位于单位圆内部,其中$\rho(z) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j z^j, \sigma(z) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j z^j$. 为了判定$p(z)$是否为Schur多项

式，由于 $p(z)$的次数是固定的(k 次)，因此可以使用 Schur 准则，逐步降低 $p(z)$的次数，最后只要判别一个低次多项式是否为 Schur 多项式. 具体过程如下：设

$$p(z) = C_k z^k + C_{k-1} z^{k-1} + \cdots + C_1 z + C_0,$$

$$\hat{p}(z) = C_0^* z^k + C_1^* z^{k-1} + \cdots + C_{k-1}^* z + C_k^*,$$

其中 $C_i^*(i=0,1,\cdots,k)$为 C_i 的共轭复数. Schur 准则如下

$p(z)$是 Schur 多项式当且仅当

$$p_1(z) = \frac{1}{z}[\hat{p}(0)p(z) - p(0)\hat{p}(z)]$$

是 Schur 多项式及$|\hat{p}(0)|>|p(0)|$.

不难看出，$p_1(z)$最多是 $k-1$ 次多项式. 重复上面的过程；最终只要判定一个低次多项式是否为 Schur 多项式.

接下去，我们用多步法(1.1)去求解延时方程的一个最简单的模型问题

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t) + by(t-\tau), & t \geqslant 0, \\ y(t) = \varphi(t), & t \leqslant 0, \end{cases} \tag{1.6}$$

其中 $\tau>0, |b|<-\mathrm{Re}(a)$. 方法(1.1)的步长 $h=\tau/m$, $m\geqslant 1$ 是某个自然数. 我们有

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = ha\sum_{j=0}^{k} \beta_j y_{n+j} + hb\sum_{j=0}^{k} \beta_j y_{n+j-m}. \tag{1.7}$$

上列差分方程的特征多项式是(参看第四章§4.3)

$$p_m(z) = Q(z)z^m + p(z), \tag{1.8}$$

其中

$$Q(z) = \rho(z) - \bar{a}\sigma(z),$$

$$p(z) = \sigma(z)\bar{b},$$

$$\bar{a} = ha,$$

$$\bar{b} = hb.$$

值得注意的是，这里 $m\geqslant 1$ 可以是一个任意的自然数，Schur 准则难以使用，必须寻找别的方法来判定，$p_m(z)$是否为 Schur 多项

式.我们已经看出,这里的问题比常微分方程中出现的问题复杂得多.

§1.2 收敛性与零稳定性

定义 2.1 设初值问题(1.2)的解 $y(t)$唯一存在,用(1.1)去求解(1.2)时的解序列为$\{y_n\}$,其中初始值 $y_0, y_1, \cdots, y_{k-1}$满足

$$\lim_{h\to 0} y_\mu = \lim_{h\to 0} \eta_\mu(h) = \eta, \quad \mu = 0,1,\cdots,k-1$$

时,有

$$\lim_{h\to 0} y_n = y(t_n)$$

$$nh = t_n - t_0$$

对任意的 $t_n \in [t_0, b]$成立,我们就称线性多步法(1.1)是**收敛的**.

例 用 Euler 方法

$$y_{n+1} = y_n + hf_n, \quad f_n = f(t_n, y_n) \tag{2.1}$$

去求解方程

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

令 $t = nh$. 固定,于是

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n-1} + hf_{n-1} \\ &= (1 + \lambda h) y_{n-1} \\ &= (1 + \frac{\lambda t}{n})^n y_0 \\ &= (1 + \frac{\lambda t}{n})^n \eta_0(h) \longrightarrow e^{\lambda t}, (h \to 0), \end{aligned}$$

由此可知,Euler 方法是收敛的.

令 $y(t) \in C^1[t_0, b]$,

$$\mathscr{L}[y(t)_j h] \equiv \sum_{j=0}^{k} [\alpha_j y(t + jh) - h\beta_j y'(t + jh)], \tag{2.2}$$

把(1.10)中出现的 $y(t+jh)$及 $y'(t+jh)$皆在 t 处展开为 Taylor 级数,然后合并 h 的同次幂,得

$$\mathscr{L}[y(t)_j h] = C_0 y(t) + C_1 h y'(t) + \cdots + C_q h^q y^{(q)}(t) + \cdots, \tag{2.3}$$

其中

$$
\begin{cases}
C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k, \\
C_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + k\alpha_k - (\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_k), \\
\quad \vdots \\
C_q = \dfrac{1}{q!}(\alpha_1 + 2^q\alpha_2 + \cdots + K^q\alpha_k) \\
\qquad - \dfrac{1}{(q-1)!}(\beta_1 + 2^{q-1}\beta_2 + \cdots + K^{q-1}\beta_k).
\end{cases}
\tag{2.4}
$$

定义 2.2 倘(2.4)中的 $C_i(i=0,1,2,\cdots)$满足

$$
\begin{aligned}
C_0 &= 0, \\
C_1 &= 0, \\
&\vdots \\
C_p &= 0, \\
C_{p+1} &\neq 0,
\end{aligned}
$$

我们就称差分算子 $\mathscr{L}$ 或相对应的线性多步法$\langle\rho,\sigma\rangle$的**收敛阶为** $\boldsymbol{p}$, $C_{p+1}/\sigma(1)$称为此方法的**误差常数**.

定义 2.3 倘使方法(1.1)的收敛阶 $p\geqslant1$,我们称此方法是**相容的**.

显然方法(1.1)相容的充分必要条件为

$$C_0 = C_1 = 0,$$

或

$$\rho(1) = 0, \rho'(1) = \sigma(1).$$

定义 2.4 令

$$T_{n+k} \equiv \mathscr{L}[y(t_n)_j h],$$

则称 T_{n+k}为线性多步法(1.1)于 t_{n+k}处的**局部截断误差**.

倘使我们给线性多步法(1.1)以**局部化假设**:

$$y(t_{n+j}) = y_{n+j}, \qquad j = 0,1,\cdots k-1,$$

那末不难推出 T_{n+k}正比于$[y(t_{n+k})-y_{n+k}]$. 我们常称$[y(t_{n+k})-y_{n+k}]=e_{n+k}$(没有局部化假设)为线性多步法(1.1)的**总体截断误差**.

下面给出零稳定的概念.

定义 2.5 设线性多步法$\langle\rho,\sigma\rangle$的第一特征多项式 $\rho(\xi)$的根为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$,且$|\xi_j|\leqslant 1(j=1,2,\cdots,k)$,如果对某一个 j_0, $|\xi_{j_0}|=1$ 时,ξ_{j_0}必为 $\rho(\xi)$的单根,那末我们说方法$\langle\rho,\sigma\rangle$是**零稳定的**(或说是 Dahlquist 稳定的,或说方法(1.1)**满足根条件**).

定理 2.1 如果方法(1.1)是收敛的,那末它是零稳定的.

证明 考察方程

$$y'(t)=0,$$
$$y(0)=0,$$

其解 $y(t)\equiv 0$.用(1.1)去求解上列初值问题,得

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n+j}=0. \tag{2.5}$$

上列差分方程(2.5)之特征多项式为

$$\rho(\xi)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\xi^j. \tag{2.6}$$

假定(2.6)之零点互不相同,为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$,那末差分方程(2.5)的通解为

$$y_n=[d_1\xi_1^n+d_2\xi_2^n+\cdots+d_k\xi_k^n]h,$$

其中 $d_i(i=1,2,\cdots,k)$为任意常数.由于 d_i 之任意性,$y_n\to 0(n\to\infty)$当且仅当,对每一 i

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t}} h\cdot\xi_i^n=0,$$

即

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t}} t\cdot\frac{\xi_i^n}{n}=0\Leftrightarrow|\xi_i|\leqslant 1.$$

如果(2.6)有重根,重数为 q,那末通解中必有 $d_s h n^q\xi_s^n$ 的项。由 $y_n\to 0(n\to\infty)$再次推出

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t}} h\cdot n^q\xi_s^n=0,$$

或

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t}} tn^{q-1}\xi_s^n = 0 \Leftrightarrow |\xi_s| < 1,$$

定理 2.1 证毕.

定理 2.2 倘使(1.1)收敛,那末(1.1)是相容的($p\geqslant 1$).

证明 先证 $C_0=0$. 为此考虑初值问题

$$\begin{cases} y'(t) = 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

其解为 $y(t)=1$. 我们用(1.1)去求解上列初值问题,得

$$\alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n+1} + \cdots + \alpha_k y_{n+k} = 0. \tag{2.7}$$

再假设 $y_n=1, n=0,1,\cdots,k-1$. 因为(1.1)是收敛的,故

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ hn=t}} y_n = 1,$$

在(2.7)中令 $n\to\infty$,由此得

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 0,$$

即 $C_0=0$. 再考虑方程

$$\begin{cases} y'(t) = 1, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

其解为 $y(t)\equiv t$. 用(1.1)去求解上列初值问题,得

$$\alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n+1} + \cdots + \alpha_k y_{n+k} = h[\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_k]. \tag{2.8}$$

容易验证 $y_n = nh\kappa$ 为(2.8)的一个解序列,其中

$$\kappa = (\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_k)/(k\alpha_k + \cdots + \alpha_0),$$

注意到 $\rho'(1)\neq 0$,故上式有意义. 再注意(1.1)是收敛的,有

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t}} y_n = t,$$

于是

$$t\kappa = t,$$

故 $\kappa=1\Rightarrow\rho'(1)=\sigma(1)$. 定理 2.2 证毕.

定义 2.5 设$\{y_n\}$及$\{z_n\}$是(1.1)的两个解序列. 如果对任意正数 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,当

$$\max_{0\leqslant j\leqslant k-1} |z_j - y_j| \leqslant \delta, \quad 0 < h \leqslant h_0$$

时，总有

$$\max_{t_0\leqslant t_n\leqslant b}|z_n-y_n|\leqslant\epsilon,$$

那末我们就说(1.1)是**稳定的**.

定理 2.3 如果方法(1.1)是相容的，那末

$$(1.1)\ 是稳定的 \Leftrightarrow (1.1)\ 是零稳定的.$$

证明 再次考虑初值问题

$$\begin{cases}y'(t)=0,\\ y(0)=0,\end{cases}$$

其解为 $y(t)\equiv 0$. 我们用(1.1)去求解上列方程，且取 $y_0=y_1=\cdots=y_{k-1}=0$，得

$$y_n=0,\qquad \forall n\in N.$$

再取初值 $z_0=\varepsilon, z_1=\varepsilon\xi_j,\cdots z_{k-1}=\varepsilon\xi_j^{k-1}$，得

$$z_n=\varepsilon\xi_j^n,\qquad \forall n\in N.$$

倘使 $\rho(\xi)$的某零点 ξ_j, $|\xi_j|>1$，那末

$$\max_{0\leqslant t_n\leqslant b}|y_n-z_n|\leqslant\varepsilon|\xi_j|^{N(h)},$$

这里 $N(h)$表示 $nh\leqslant b$ 的最大自然数. 显然当 $h\to 0$ 时 $N(h)\to\infty$. 从而

$$\max_{0\leqslant t_n\leqslant b}|y_n-z_n|\to\infty\quad(h\to 0),$$

这说明方法(1.1)不是稳定的，对于某 ξ_j, $|\xi_j|=1$ 且是重根，也可类似证明.

反之，假设(1.1)是零稳定的，我们来证明方法是稳定的. 为了证明简明，我只针对方程 $y'=\lambda y$ 加以证明. 再假定 $\rho(\xi)$只有单根. 用(1.1)去求解 $y'=\lambda y$，得

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n+j}=h\lambda\sum_{j=0}^{k}\beta_j y_{n+j},\tag{2.9}$$

令 $e_n=y_n-z_n$，且$|e_n|\leqslant\varepsilon$, $n=0,1,\cdots,k-1$. 由上式得

$$\sum_{j=0}^{k}(\alpha_j-h\lambda\beta_j)e_{n+j}=0.\tag{2.10}$$

只要 $h>0$ 充分小，上列差分方程的特征方程之零点也是互异的，

它们是 $\xi_1(\overline{h}),\xi_2(\overline{h}),\cdots,\xi_k(\overline{h})$，其中 $\overline{h}=h\lambda$，$\xi_i=\xi_i(0)(i=1,2,\cdots,k)$ 是 $\rho(\xi)$ 之零点，那末(2.10)的通解能表示为

$$e_n = \sum_{j=0}^{k} r_j[\xi_j(\overline{h})]^n, \quad n \geqslant 0. \tag{2.11}$$

写出(2.11)中当 $n=0,1,\cdots,k-1$ 时的方程，得

$$\begin{aligned} &r_1 + r_2 + \cdots + r_k = e_0, \\ &r_1\xi_1(\overline{h}) + \cdots + r_k\xi_k(\overline{h}) = e_1, \\ &\quad\vdots \\ &r_1[\xi_1(\overline{h})]^{k-1} + \cdots + r_k[\xi_k(\overline{h})]^{k-1} = e_{k-1}, \end{aligned}$$

把 $r_1,r_2,\cdots,r_k$ 看成上列线性方程组的解，那末 r_i 将与右端 $e_0,e_1,\cdots,e_{k-1}$ 有相同的界，注意定义 2.5 便可得

$$\max_{1\leqslant j\leqslant k} | r_j | \leqslant C_1\varepsilon, \tag{2.12}$$

其中 C_1 为常数，已知 $\xi_j(\overline{h})(j=1,2,\cdots,k)$ 是方程

$$\rho(\xi) - \overline{h}\sigma(\xi) = 0 \tag{2.13}$$

的根. 那末按扰动定理

$$\xi_j(\overline{h}) = \xi_j(0) + \overline{h}\,\frac{\sigma(\xi_j)}{\rho'(\xi_j)} + O(\overline{h}^2)$$

所以

$$\begin{aligned} | \xi_j(\overline{h}) | &\leqslant | \xi_j | + | \lambda h | C_2 \\ &\leqslant 1 + | \lambda h | C_2, \end{aligned}$$

进而

$$\begin{aligned} | \xi_j(\overline{h}) |^n &\leqslant [1 + | \lambda h | C_2]^n \\ &\leqslant e^{C_2 nh|\lambda|} \\ &\leqslant e^{C_2|\lambda|(b-t_0)}, \end{aligned}$$

再结合(2.11)及(2.12)，便得

$$| e_n | \leqslant C_3 \cdot \varepsilon e^{C_2(b-t_0)|\lambda|}, \quad 0 < h \leqslant h_0,$$

这表明(1.1)是稳定的. 定理 2.3 证毕.

定理 2.4 设方法(1.1)是相容的，则方法(1.1)是收敛的当且仅当它是零稳定的.

证明 收敛性推出零稳定性的证明可见定理 2.1 之证明. 现假设方法(1.1)是零稳定的, 我们来证明它是收敛的. 我们仍然只对方程 $y'(t)=\lambda y(t), y(0)=1$. 再假设 $\rho(\xi)$只有单重零点. 此时(1.1)的通解为

$$y_n = \sum_{j=1}^{k} r_j[\xi_j(\overline{h})]^n, \tag{2.14}$$

我们来证明

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t}} y_n = e^{\lambda t}.$$

为此我们将证明 $r_1[\xi_1(\overline{h})]^n \to e^{\lambda t}, (n\to\infty)$, 而(2.14)中其余各项趋于零, 再次使用扰动定理得

$$\xi_1(\overline{h}) = \xi_1 + \frac{\sigma(\xi_1)}{\rho'(\xi_1)}\overline{h} + O(\overline{h}^2).$$

由于(1.1)是相容的, 故 $\rho(1)=0$. 由此可令 $\xi_1=1$,

$$\xi_1(\overline{h}) = 1 + \frac{\sigma(1)}{\rho'(1)}\overline{h} + O(\overline{h}^2).$$

再因为相容性, 知 $\rho'(1)=\sigma(1)$, 从而

$$\begin{aligned}
\xi_1(\overline{h}) &= 1 + \overline{h} + O(\overline{h}^2) \\
[\xi_1(\overline{h})]^n &= e^{nh\lambda}[1 + O(\overline{h}^2)]^n \\
&= e^{\lambda t}[1 + O(\overline{h})].
\end{aligned}$$

故

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t}} [\xi_1(\overline{h})]^n = e^{\lambda t}.$$

余下的只需证明 $r_1 \to 1, (h\to 0)$. 由(2.14),

$$\begin{aligned}
&r_1 + r_2 + \cdots + r_k = y_0, \\
&r_1\xi_1(\overline{h}) + \cdots + r_k\xi_k(\overline{h}) = y_1, \\
&\quad\vdots \\
&r_1[\xi_1(\overline{h})]^{k-1} + \cdots + r_k[\xi_k(\overline{h})]^{K-1} = y_{k-1}.
\end{aligned}$$

用 Cramer 法则来表示 r_1,

$$r_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & 1 & \cdots & 1 \\ y_1 & \xi_2(\overline{h}) & \cdots & \xi_k(\overline{h}) \\ \vdots & & & \\ y_{k-1} & \xi_2(\overline{h})^{k-1} & \cdots & \xi_k(\overline{h})^{k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \xi_1(\overline{h}) & \xi_2(\overline{h}) & \cdots & \xi_k(\overline{h}) \\ \vdots & & & \\ \xi_1(\overline{h})^{k-1} & \xi_2(\overline{h})^{k-1} & \cdots & \xi_k(\overline{h})^{k-1} \end{vmatrix}},$$

再注意 $y_\mu = y_\mu(h) \to 1, (h \to 0), \mu = 0, 1, \cdots, k-1$，及 $\xi_1(0) = 1$，故 $r_1 \to 1 (h \to 0)$.(2.14)中其余各项趋于零是显然的事.定理 2.4 证毕.

推论 2.5 如果方法(1.1)是相容的，则(1.1)收敛的充分必要条件是(1.1)是稳定的.

推论 2.5 便是著名的 Lax 等价性定理.

§1.3 线性多步法的最高可达阶

对于线性多步法

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}, \tag{3.1}$$

若 $\beta_k \neq 0$，则方法是隐式的.我们规范化 $\alpha_k = 1$，那末(3.1)中共有 $2k+1$ 个参数可供选定，我们要求其阶是 p，则要求满足 $p+1$ 个条件来确定 $\alpha_i, \beta_i (i = 0, 1, \cdots, k)$.这样 $2k+1 = p+1$，粗略地看出 $p = 2k$.当 $\beta_k = 0$ 时是显式方法，其阶可望达 $p = 2k-1$.但前面的定理 2.4 指出，收敛的方法必须是零稳定的，一般不可能达 $2k$ 或 $2k-1$ 阶.那末零稳定的线性多步法其最高可达阶是多少呢？本节将回答这个问题.

首先讨论一个问题，给定多项式 $\rho(\xi), \rho(1) = 0$，要求构造多项式 $\sigma(\xi)$，使得算子 $\mathscr{L}$ 的阶至少是 $k+1$，其中

$$\mathscr{L}[y(t)_j h] = \rho(E) y(t) - h\sigma(E) y'(t),$$