（京）新登字 039 号

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/全国化工石化系统高校数学协作组编.
刘慧主编. —北京：化学工业出版社，2000. 6
高等学校教材
ISBN 7-5025-2805-9

Ⅰ. 线… Ⅱ. 刘… Ⅲ. 线性代数-高等学校-教材
Ⅳ. O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 21611 号

高等学校教材
线 性 代 数
全国化工石化系统高校数学协作组 编
刘 慧 主编
责任编辑：唐旭华
责任校对：洪雅姝
封面设计：田彦文
*
化学工业出版社
教 材 出 版 中 心 出版发行
（北京市朝阳区惠新里 3 号 邮政编码 100029）
http：//www. cip. com：cn
*
新华书店北京发行所经销
北京市彩桥印刷厂印刷
三河市延风装订厂装订
开本 850×1168 毫米 1/32 印张 9½ 字数 265 千字
2000 年 6 月第 1 版 2000 年 6 月北京第 1 次印刷
印 数：1—10100
ISBN 7-5025-2805-9/G・724
定 价：15. 00 元

前　　言

数学是培养和造就各类高层次理工人才的共同基础，是工科大学生重要的基础理论课。传统的工科数学教育曾对培养高级工程技术人才发挥了重要作用。随着科学技术、信息和知识的迅猛发展，传统的数学观念和教学体系受到冲击，工程技术对现代数学观点、方法及基础数学内容需求量的不断膨胀与有限的计划学时之间的矛盾日益突出。在当前工科数学教育中，迫切需要转变重继承、轻创造的教育思想和更新重传统、轻现代的教学内容，以适应高等工程教育面向21世纪人才培养模式的需要。在教学内容、课程体系及教学方法的改革中，教学内容的改革首当其冲，为此，全国化工石化系统高校数学协作组在成员校多年教学实践与改革探索的基础上，充分发挥各院校的优势，组织各校专家、教授编写了一套具有鲜明特点，又符合教学改革新形势需要的教材及教学参考书。

本套教材包括《高等数学》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《数学建模》等；教学参考书包括《高等数学学习指导》、《线性代数学习指导》、《概率论与数理统计学习指导》等。

本套教材编委会名单如下：主编　黄金坤；副主编　刘慧、韩芝隆、李生训、郭金吉；编委　黄晋阳、蒋逢海、刘彬、仇计清、赵璧、战学秋、李志林。

全国化工石化系统高校数学协作组

2000年1月

第一章 行 列 式

线性方程组是线性代数中的一个重要基础部分，来源于求解线性方程组的行列式，不仅在线性代数中占有最基本、最常用、最有力的工具地位；同时它被广泛应用于数学和其它学科领域。

本章从二元、三元线性方程组出发，引进二阶、三阶行列式；然后逐步深入介绍 n 阶行列式的概念、基本性质、按行（列）展开定理，以及应用行列式求解线性方程组。

第一节 二阶和三阶行列式

二阶和三阶行列式是从研究二元与三元线性方程组的公式解引出来的，故先讨论解线性方程组的问题。

设含有两个未知量 x_1，x_2 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1}$$

用消元法求解。

用 a_{22}乘第一个方程，用 a_{12}乘第二个方程，然后两式相减，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2$$

同样消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

设 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{2}$$

引进记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{3}$$

叫做二阶行列式，D 称之为二元线性方程组（1）的系数行列式，数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}叫这个行列式的元素。同样

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

若 $D\neq0$，则由（2），（3）可以得到线性方程组（1）的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D} \tag{4}$$

现在求含有三个未知量 x_1，x_2，x_3 的线性方程组的解

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{5}$$

同样用消元法，先消去 x_2，x_3 得仅含 x_1 的方程

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})\ x_1$$
$$=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3$$

x_1 的系数记作 D，当 $D\neq0$ 时，得

$$x_1=\frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3) \tag{6}$$

类似可得

$$x_2=\frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}) \tag{7}$$

$$x_3=\frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}) \tag{8}$$

将 D 记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33} \tag{9}$$

称为三阶行列式。它有三行、三列，是六项的代数和。在 (9) 式中三项取正号，其中一项是主对角线上三元素的乘积，另二项是位于主对角线的平行线上两元素与它对角上的元素的乘积；三项取负号，可由次对角线类似得出。为便于记忆，如图 1 表示的三阶行列式对角线规则为

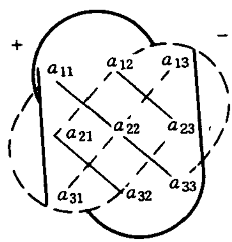

图 1

即实线上元素所组成之乘积在其前加正号，虚线上的则加负号。

例 1 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned}&=2\times2\times(-5)+1\times0\times3+4\times7\times(-3)-\\&\quad 4\times2\times3-1\times(-3)\times(-5)-2\times0\times7\\&=-143\end{aligned}$$

按三阶行列式定义，线性方程组 (5) 的解 (6)，(7)，(8) 式中的分母都是行列式 D，分子是把行列式 D 中的第一、二、三列分别换成常数项 b_1，b_2，b_3 所得到的行列式，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}\qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

因此方程组（5）的解可以简单表示成

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad x_3=\frac{D_3}{D} \tag{10}$$

例 2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3=0 \\ 2x_1+4x_2-x_3=3 \\ -x_1-x_2+x_3=2 \end{cases}$$

解 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} D&=1\times4\times1+(-1)\times(-1)\times(-3)+2\times(-1)\times2- \\ &\quad(-1)\times4\times2-2\times(-3)\times1-1\times(-1)\times(-1) \\ &=10 \end{aligned}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-7 \qquad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=19$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=32$$

根据公式（10），得方程组的解

$$x_1=-\frac{7}{10}, \quad x_2=\frac{19}{10}, \quad x_3=\frac{32}{10}$$

第二节 n 阶行列式的定义

为了把二阶、三阶行列式推广到 n 阶行列式，必须找出二阶和三阶行列式计算公式的共同规律，为此需要先给出排列的概念。

一、排列

定义 1 由 1，2，…，n 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列。

n 级排列的一般形式为 $j_1j_2\cdots j_n$，其中 j_1，j_2，…，j_n 均是 1，2，…，n 中的某一个数，且互不相等，下标表示这 n 个数的次序，如 j_3 表示排列中第三个数。

例如，321 是一个三级排列，51423 是一个五级排列。

我们知道，由 1，2，…，n 这 n 个数组成的不同的 n 级排列总个数是 $n!$；其中 $12\cdots n$ 显然是一个 n 级排列，这个排列具有自然顺序，就是按递增的顺序排列起来，称为 n 级标准排列。

定义 2 在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个**逆序**；一个排列中逆序的总个数称为这个排列的逆序数。n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记作 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$。

定义 3 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**，逆序数为奇数的排列称为**奇排列**。

例 1 三级排列共有六个不同的排列，即

$$123，231，312，132，213，321$$

其中 123 是标准排列。在排列 231 中，因为 2 排在 1 前面，但 $2>1$，所以形成一个逆序；同样道理 31 也形成一个逆序，于是有 $\tau(231)=2$，三级排列 231 是一个偶排列，而由于 $\tau(213)=1$，所以 213 是奇排列。容易算出 123，312，都是偶列；132，321，都是奇排列。

定义 4 将一个排列中某两个数的位置互相对换而其余的数不动，就得到另一个排列，这种对排列的变换方法称为对换。

例如，排列 2413 经过 2 与 3 对换就得到排列 3412。

由前面的例子可以得到

定理 1 任一排列经过一次对换后必改变其奇偶性。

证明 略。

二、二阶、三阶行列式展开式的规律

现在来分析二阶、三阶行列式展开式的共同特征。我们在第一节中已经得到关于三阶行列式的展开式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1}$$

分析（1）式可以得到以下结论。

1. 三阶行列式是一个数，是 $3!=6$ 项的代数和，每一项都是取自不同行不同列的三个元素的乘积。

2. 每一项的各元素都有两个下标，第一个下标表示这个元素所在行的序数，第二个下标表示这个元素所在列的序数。当每一项中各元素的行指标是 1，2，3 的标准排列时，其列指标都是 1，2，3 的一个三级排列，并且每一个排列对应着三阶行列式的一项。

3. 每一项的符号，当其行指标是标准排列时，由列指标排列的奇偶性决定；列指标排列是偶排列时，该项取正号；列指标排列是奇排列时，该项取负号。

这样（1）式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

这里$\sum$表示连加，即

$$\sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有三阶排列求和。

定义 5 用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示的 n 阶行列式是一个**数**，它是 $n!$ 项的代数和，每一项都是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}, a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$，其中 $j_1\ j_2\ j_3 \cdots j_n$ 是自然数 1，2，…，n 的 n 阶排列，项 $a_{1j_1}\ a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$的符号是 $(-1)^{\tau(j_1\ j_2\ \cdots\ j_n)}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \qquad (2)$$

当 $n=1$ 时 $|a_{11}|=a_{11}$，当 $n=2$，3 时就是二阶、三阶行列式。

例 2 计算上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 由 n 阶行列式定义可知，展开式中的一般形式为

$$a_{1j_1}\ a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中，由于 D 中许多元素为零，所以只需要求出上述一切项中不为零的项即可。在 D 中，第 n 行元素除 a_{nn}外，其余元素都是零，所以只有取 $j_n=n$；在第 $n-1$ 行中除 $a_{(n-1)(n-1)}\ a_{(n-1)n}$外都是零，并且因为已经取了 $j_n=n$，所以只有取 $j_{n-1}=n-1$，才可能使对应的乘积不为零；依次类推，D 的 $n!$ 项中，除了排列 $j_1 j_2 \cdots j_n=12\cdots n$ 对应的乘积项外，其余全为零。又因为 τ $(12\cdots n)=0$，所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

即上三角形行列式的值等于主对角线上各元素的乘积。同理可求得下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别是

$$D=\begin{vmatrix} a_{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n} \end{vmatrix}=a_{1}a_{2}\cdots a_{n}$$

对于 n 阶行列式的任一项

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

由于乘法的可交换性，可以把该项列指标组成的排列 $j_1j_2\cdots j_n$，经过 t 次对换变成标准排列 $1\ 2\cdots n$，与此同时，行指标组成的标准排列 $1\ 2\cdots n$ 经过 t 次对换变成了排列 $i_1i_2\cdots i_n$，即有

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

根据排列性质的定理1，可知 $j_1j_2\cdots j_n$ 与 $i_1i_2\cdots i_n$ 具有相同的奇偶性，所以

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

因此，n 阶行列式的展开式又有下列表达方法

$$D=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \tag{3}$$

第三节　行列式的性质

当行列式阶数较高时，直接根据定义计算 n 阶行列式的值较困难。因此，我们将介绍行列式的一些性质；应用这些性质可以简单地计算出行列式的值，同时这些性质在理论上也有重要意义。

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^T 称为行列式 D 的**转置行列式**。

性质 1 行列式与它的转置行列式的值相等。即 $D=D^T$。

证明 设 D 的转置行列式为

$$D^T=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $b_{ij}=a_{ji}$（i，$j=1$，2，…，n）。根据第二节公式（3）有

$$\begin{aligned} D^T &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} b_{j_11}b_{j_22}\cdots b_{j_nn} \\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \\ &= D \end{aligned}$$

性质 1 表明对于一个行列式而言，行和列的地位是对等的，因此凡是有关行的性质，对列也同样成立。例如在例 2 中，下三角形行列式是上三角形行列式的转置，因此它们的值相等。下面在叙述和证明行列式性质时，我们只对行来做。

性质 2 互换行列式的任意两行（列），行列式改变符号。

证明 设给定行列式

$$D=\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

交换 D 的第 i 行与第 j 行得到

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} i\text{行} \\ = \\ j\text{行} \end{matrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

按行列式的定义有

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{t_1t_2\cdots t_n}(-1)^{\tau(t_1\cdots t_i\cdots t_j\cdots t_n)}b_{1t_1}b_{2t_2}\cdots b_{it_i}\cdots b_{jt_j}\cdots b_{nt_n} \\ &= \sum_{t_1t_2\cdots t_n}(-1)^{\tau(t_1\cdots t_i\cdots t_j\cdots t_n)}a_{1t_1}\cdots a_{jt_i}\cdots a_{it_j}\cdots a_{nt_n} \\ &= \sum_{t_1t_2\cdots t_n}(-1)^{\tau(t_1\cdots t_j\cdots t_i\cdots t_n)+1}a_{1t_1}\cdots a_{it_j}\cdots a_{jt_i}\cdots a_{nt_n} \\ &= -\sum_{t_1t_2\cdots t_n}(-1)^{\tau(t_1\cdots t_j\cdots t_i\cdots t_n)}a_{1t_1}\cdots a_{it_j}\cdots a_{jt_i}\cdots a_{nt_n} \\ &= -D \end{aligned}$$

性质 3 若行列式中有两行（列）元素对应相等，则这个行列式等于零。

证明 设行列式 D 的第 i 行与第 j 行（$i\neq j$）元素对应相等；由性质 2 知，交换这两行后，行列式改变符号；所以新的行列式等于 $-D$。另外把元素相同的两行交换，行列式的值不变，仍为 D，因此有 $D=-D$，即 $D=0$。

性质 4 行列式中某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式符号外面。

证明 设行列式 D_1 的第 i 行有公因子 k，

即
$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由定义，有

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (k a_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\
&= k \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\
&= kD
\end{aligned}
$$

推论 行列式中有一行（列）的元素全为零，行列式的值等于零。

这是性质 4 中 $k=0$ 的特例。

性质 5 若行列式中有两行（列）元素成比例，则行列式的值等于零。

性质 5 可以由性质 3 和性质 4 直接推出。

性质 6 如果行列式的某一行（列）是两组数的和，那末这个行列式就等于两个行列式的和，而这两个行列式除这一行以外全与原来行列式对应的行一样。

即若

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \cdots & b_n + c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{第 } i \text{ 行}
$$

则 D 等于以下两个行列式的和

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

性质 6 可以由行列式定义直接证得。

性质 7 若在行列式的某一行（列）元素上加上另一行（列）对应元素的 k 倍，行列式的值不变。

即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 7 可以由性质 5 和性质 6 直接证得。

行列式的性质在行列式的计算和证明过程中起着重要作用，熟练地掌握并且适当地运用行列式的性质，可以简化行列式的计算，下面举例说明。

为方便起见，用记号 r_i+kr_j 表示把第 i 行的每个元素加上第 j 行每个对应元素的 k 倍；用记号 c_i+kc_j 表示把第 i 列的每个元素加上第 j 列每个对应元素的 k 倍。

例 1 计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

解 这个行列式的特点是各行四个数的和都是 6，把第二、三、四各列同时加到第一列，把公因子提出；然后从第二、三、四各列都减去第一列就成为三角行列式；具体计算如下

$$D \xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal[c_4-c_1]{\substack{c_2-c_1\\c_3-c_1}}6\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\1&0&2&0\\1&0&0&2\end{vmatrix}=6\times 2^3=48$$

例 2 设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}0&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\-a_{12}&0&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\-a_{13}&-a_{23}&0&\cdots&a_{3n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-a_{1n}&-a_{2n}&-a_{3n}&\cdots&0\end{vmatrix}$$

在这个行列式中 $a_{ij}=-a_{ji}$，这样的行列式称为**反对称行列式**。证明当 n 是奇数时，反对称行列式 $D=0$。

证明 由性质 1 $\qquad D=D^T$

$$D^T=\begin{vmatrix}0&-a_{12}&-a_{13}&\cdots&-a_{1n}\\a_{12}&0&-a_{23}&\cdots&-a_{2n}\\a_{13}&a_{23}&0&\cdots&-a_{3n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{1n}&a_{2n}&a_{3n}&\cdots&0\end{vmatrix}$$

每行提取公因子（-1），得

$$D=D^T=(-1)^nD=-D$$

所以 $$D=0$$

第四节 行列式按行(列)展开定理

上节中应用行列式性质简化行列式，简化后行列式阶数不变，但利用定义直接计算高阶行列式是很麻烦的，所以在这节我们考虑将高阶行列式化为低阶的方法。这种方法不仅在计算上，在理论上也有很重要的意义。

定义 6 在 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中，任取 k 行 k 列，将位于这些行、列相交处的元素按原来的相对位置排成一个 k 阶行列式 N，称 N 是 D 的一个 k 阶子式。把 N 所在的行、列划去，剩下的元素按原来的相对位置构成一个 $n-k$ 阶行列式 M，称 M 为 N 的余子式（显然 N 也是 M 的余子式）。如果 N 所在的行、列分别是 i_1，i_2，…，i_k，j_1，j_2，…，j_k，则称

$$A=(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}M$$

为 N 的**代数余子式**。

例如在四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

中，取定第一、二行，第二、四列得到一个二阶子式

$$N=\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

N 的余子式为

$$M=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$$

N 的代数余子式为

$$A=(-1)^{1+2+2+4}M=-\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$$

当 $k=1$ 时，就是元素 a_{ij}的余子式和代数余子式的概念。如在 D 中

第二行、第二列元素-1的代数余子式记为A_{22}，即

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & 2 & -4\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -3 & 3\end{vmatrix}$$

对三阶行列式进行运算，得到下列结果

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}D&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\\ &=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\end{aligned} \tag{1}$$

利用定义 6，(1) 式可以写成

$$\begin{aligned}D&=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}\\ &=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}\end{aligned} \tag{2}$$

一般地，当D的阶数等于n时，D的展开式也有如上形式。

定理 2 n阶行列式D等于它的任意一行（列）所有元素与它们对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

或 $$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

证明 略。

例 1 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{vmatrix}$$

解 按定理 2，行列式D可以按第一行展开，得