非线性物理理论及应用

周凌云
王瑞丽　吴光敏　段良和　编著

科学出版社

内 容 简 介

在简明介绍非线性科学的一些基本概念及理论的基础上，本书以孤立子、混沌及分形为主线，介绍了物理学诸多分支中的一些非线性问题，以及非线性理论在这些问题的应用，其中包括了作者及其合作者多年来的工作成果．本书适合于非线性相关学科的大学师生及科研人员．

图书在版编目(CIP)数据

非线性物理理论及应用/周凌云等编著．-北京：科学出版社，2000.3

ISBN 7-03-007595-1

Ⅰ．非…　Ⅱ．周…　Ⅲ．物理学-非线性理论　Ⅳ．O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 19308 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码 100717

新蕾印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

2000 年 3 月第 一 版　开本：850×1168 1/32

2000 年 3 月第一次印刷　印张：8 7/8

印数：1－1 800　字数：231 000

定价：18.00 元

前　言

当新世纪的曙光将洒向人间之际，科学世界也将经历一系列的变革．这些变革的趋势现已初露端倪．表现在，不同学科之间的渗透、融会，大批新兴学科亦将应运而生；另一重要表现是，非线性科学的崛起，对它的研究将成为当代科学奋进的主流，一些学者已将之誉为本世纪继相对论和量子力学之后自然科学的“第三次大革命”．它发展气势之磅礴不亚于量子力学当年之雄风．正如左拉(Zola)所说，“当真理被埋在地下时，它仍在生长着；它虽受压抑，但却蓄积着一种爆炸性力量，一旦冒出就会炸毁一切．”人们对非线性现象的发现，至少可追溯到上世纪 30 年代，但长期被人们当作“个性极强”、无从逾越的难题．每一具体问题似乎都要求发明特殊的算法，运用新颖的技巧，那些算法和技巧被人们视为“凤毛麟角”的“手工艺”珍品．人们还很少悟出其普遍启示，更未窥出其内在联系．到了本世纪 60 年代，人们才在非线性现象的两个极端取得了令人鼓舞的成果．下面将谈谈这两个“成果”[4]．

其一为孤立子理论，它反映了物理保守系统中的内秉对称性，逆散射法的研究成果使这方面的理论探索取得了很大进展(扩展了原有哈密顿系统的可积性概念)．另一成果是在不可积的极端，它揭示了保守力学系统中随机运动的普遍性，而在耗散系统中则发现一批奇怪吸引子和混沌运动的实例，计算科学的长足进步使人们对混沌现象及复杂系统行为有了一定认识[4]．

由于上述诸方面的研究汇成了非线性科学(孤立子、混沌、分形及复杂图像等)的洪流．这股洪流已冲出了少数学者的象牙塔，奔腾澎湃，势不可挡，对原有的自然科学和社会科学理论进行“冲击”和改造，将使一切应用学科和工程技术旧貌换新颜．作为研究物质存在形式及其运动规律之科学的物理学，也必然受到这一洪

流的冲击．经典物理学及本世纪初诞生的量子力学与狭义相对论的基本理论体系是线性的．人们发现,即使在这些线性理论框架内,当处理实际问题时,也会得到一些非线性性质的实例,现举二例以说明之．

1．用牛顿第二定律,可导出有周期驱动力作用的线性阻尼单摆的动力学方程

$$\theta_{tt} + r\theta_t + g\sin\theta = A\cos\omega t \tag{1}$$

此方程即为一非线性微分方程．

2．用量子力学讨论一维铁磁体运动时,也可导出,其运动方程为一非线性薛定谔方程

$$i\hbar\phi_t(x,t) = a\phi - b\phi_{xx} - c|\phi|^2\phi \tag{2}$$

如此的实例还可举出很多．更何况物质运动的规律本身还应是非线性的,如在非线性理论框架上来研究事物,那就更不用说了．这就是说,世间一切自然现象,其本质均应是非线性的,线性性质乃是近似描写．物理规律也应是非线性的．这已是多数学者的认识．著名物理学家费米(Fermi)就如此感叹过:“《圣经》里并没有说自然定律要表示成线性的．”非线性现象已在物理学的各个领域(力、热、电、声、光)被大量揭示,而且在许多相邻学科的非线性问题研究中,也往往借助一定的物理模型．如果我们将上述两方面的内容,称之为“非线性物理学”的话,那么,这个“非线性物理学”无疑是非线性科学这股洪流的“干流”,事实上它的一些分支已为人们所熟知了,诸如“非线性力学”、“非线性光学”、“非线性声学”、“量子混沌理论”、“非线性电磁学”、“非线性量子理论”、“分形物理学”等等．而一些推动 21 世纪工业和技术革命的高精尖技术:光导及光纤通讯,混沌通讯,等离子技术,超导及 squid 器件技术,超临界现象的应用等等,也与“非线性物理学”密切相关．看来,“非线性物理学”必将在下世纪取得巨大发展,对 21 世纪的社会进步起到巨大的推动作用．

作者在学习及讲授“非线性科学理论”,研究“非线性问题”中得到无比乐趣,混沌、孤立子、分形理论无疑都是人类思维最精美

的结晶，是大自然的赞美诗，它使人们窥见未来世界的壮丽图景．将我们学习它和研究它的一些快乐，与读者分享，这是我们写此书的初衷，但限于自身学识水平及语言表达能力之不足，虽经数载艰辛，仍不能将非线性科学的精妙表达于万一，如能唤起读者对非线性物理之兴趣，我们就倍感欣慰了．

我最欣赏培根(Bacon)的一句话："科学的目的是把新的发明和财富赋予人类．"我想非线性物理学定能赋予人类更多的物质文明和精神文明．

本书得到"云南省级重点学科(光学)"，国家自然科学基金项目(19774046)及云南省科学基金项目(96A022M)的资助．并在写作过程中得到云南省科委，昆明理工大学及云南师范大学等单位的支持和帮助，作者在此表示深深的谢意．

囿于笔者学识，书中难免谬误，敬祈斧正．

作者

目　　录

4

绪　论

§1　何为非线性和非线性科学

什么是非线性科学,这是初涉此领域的人首先想知道的.但迄今还不能像定义物理学那样定义它.只有一个粗看起来似嫌多余的定义,其为:非线性科学是研究那些不是线性的数学系统和自然现象的学科.正如Stan Ulam所说,这是"类似于通过把动物学的绝大部分称为研究'非大象的动物'来定义动物学",他的要点显然是指绝大部分数学方程和自然现象是非线性的,而线性是例外却是重要的情况.

为"领悟"上述那似嫌多余的定义,下面我们再从数学及物理上看看线性和非线性问题.

数学上讲,线性和非线性,首先是区别函数 $y=f(x)$ 对自变量的依赖关系,线性函数 $y=ax+b$,画出来是一条直线,其它一切高于 x 一次方的多项式函数和其它函数均是非线性函数,如 $y=ax^2+bx+c$, $y=\sin x$, $y=e^x$ 等等.从方程上看,线性方程和非线性方程之间的本质差别是很明显的.一个线性方程的任何两个解可以加在一起构成一个新解;这就是线性叠加原理.事实上,只要认真想想,就会认识到,叠加是与其它复杂性无关的,实质上是用来解决任何线性问题的系统方法的关键.例如,Fourier变换方法和Laplace变换方法都与解能够叠加有关.顺其自然,人们把问题分成许多小问题,然后把分散的解加起来,得到整个问题的解.这就是线性的性质[2,3].

与此相反,一个非线性方程的两个解(如果有解的话)不能线性相加在一起构成另一个解.线性叠加失效了,因此,人们必须整个地考虑非线性问题;不能,至少不能明显地把问题分成一些小的问题而把它们的解加起来.由此,对求解典型的非线性方程不存在一般的分析方法或许就不会感到奇怪了,事实上,正如我们将要

讨论的，某些描述物理混沌运动的非线性方程是没有任何有用的分析解的．

另外，线性关系是互不相干的独立贡献，而非线性是相互作用的．如 x 代表某种昆虫数目，每个昆虫产 α 个卵，总数即为 $y=\alpha x$ 的线性关系决定．但如果 x 个昆虫因争食而咬斗，咬斗事件之数目可能与 $y=\frac{x(x-1)}{2}$ 种组合有关，此即为非线性关系，相互作用使得整体不简单地等于部分之和．

物理上，线性和非线性行为之间的区别最好是从一些例子中概括出来．例如，当水流以低速通过一根管道时，它的运动是层流的并且具有线性行为的特征，即运动是规则的，可预测的，可用简单的分析数学的术语来描述．但是，当速度超过某一临界值时，运动就变成了湍流，其中具有一些局部旋涡，这些旋涡以具有非线性行为特征的复杂、不规则且反复无常的方式运动着．一般说来，许多物理系统都可视为"黑盒子"．人们输入具有一定频率的信号，如输入信号和输出信号频率相同，仅有强弱变化，那黑盒子为一线性系统，如输入信号有两频率 ω_1 和 ω_2，而输出有 0、$2\omega_2$、$(\omega_1+\omega_2)$ 甚至 $n\omega_1+m\omega_2$（n 和 m 为整数），则此黑盒子是一非线性系统[2]．

另外，非线性是引起突变的原因，对线性的细小偏离，往往不会引起突变，而非线性就可能引起突变．一个线性系统对它的参数的微小变化或外部激发的响应通常是光滑的，并且正比于激发，但对于非线性系统，参数的微小变化却可能产生运动中巨大的定性上的差别．而且，对外部激发的响应可以与激发本身不同；例如，周期地驱动的非线性系统可能表现出譬如 1/2、1/4 或 2 倍激发周期．在一个线性系统中，一个局部的"凸起"或脉冲通常将随时间的推移通过扩张而衰减．这种称为弥散的现象使线性系统中的波失去它自身的特性并消失，例如，小振幅的水波随着它远离原始扰动而消失．与此相反，非线性系统可能具有高度拟序的、稳定的局部结构（例如湍流中的涡），这些结构或者维持很长时间，或者在某些理想化的数学模型中能永远维持．由这些持久的拟序结构

所反映的明显有序，与它们本身所进行的不规则的反复无常的运动形成鲜明的对照．

§2 非线性物理现象和非线性物理学

前言中已提及，物理现象从本质上讲应是非线性的．而线性规律，仅是物质世界的近似描写．事实上，非线性问题与物理学相伴而生，物理学形成伊始，开普勒(Kepler)对天体轨迹的研究，就是对非线性问题探索之发端．1813年法拉第(Faraday)通过振动水槽实验发现水中有槽振动频率一半的分频，法拉第可算是观察分岔现象之始祖，1834年罗素(Russell)在爱丁堡-戈拉斯高运河上发现了孤立波，在此之后庞加莱(Poincaré)在天体物理的研究中，瑞利(Rayleigh)在声和光的衍射研究中，雷诺(Reynolds)对流体湍流的研究中均发现了不少非线性问题．20世纪初，非线性问题在物理学圈内，似乎被淡漠，被认为非线性问题仅是数学问题．但很快就察觉，那种观点是极短视的．近20年来的科技进展表明，非线性问题已不是物理学中的个别特殊现象，它已渗透到力、热、电、声、光、原子物理和粒子物理等物理学的各个领域．而且达到物理学及其相关学科的每一新的进展几乎都与“非线性”相关的程度．物理学与非线性科学的关系已日渐紧密．为突出非线性科学在物理学发展的重要作用，推动科技的进展，不少学者已撰写了有关专集，如“非线性力学”、“分形物理学”、“混沌动力学”，“非线性电磁学”，“非线性光学”等等，有的学者认为，不宜从“非线性科学”中单独划分“非线性物理”、“非线性化学”等．而我们认为大可不必作茧自缚，只要有利于学科之发展和新知识的传播，不必过于咬文嚼字，过分追求什么“严谨而全面的界说”．我们现在所写的这本《非线性物理理论及应用》，是介绍这样的内容：非线性科学的基本理论及其在物理学及相关学科中的应用，特别突出非线性物理现象，非线性科学在物理学中的应用．这从本书目录即可看出，我们是以非线性科学的体系来划分章节的，而不是按物理学的力、热、电、

声、光、原子物理、粒子物理来分章节的．但毕竟是非线性物理学，故仍以物理内容为主，而不太多涉及非线性科学的数学理论方面的内容．那方面的内容，不少既深奥又繁杂，而本书只讲一些基本的知识，以能简述非线性物理的一些基本问题为限．

最后，我们用伟大的数学家庞加莱在《最后的沉思》中的一段话作本书绪论的结语吧："科学使我们与比自己更伟大的某些事物保持恒定的联系；科学向我们展示出日新月异的和浩瀚深邃的景象．在科学向我们提供的伟大视野背后，它引导我们猜测一些伟大的东西；这种景象对我来说是一种乐趣，在此中，达到忘我境界……"

第一章　具有确定状态的非线性系统

§1.1　单摆的非线性现象

让我们从一个非常简单的物理系统即平面单摆开始探讨，这个系统至少从某种意义上说是一个经典的例子．首先，它是所有初入学的大学生都能求解的一个问题；其次，关于我们如何使人们正确理解非线性的普遍性和重要性方面，它是一个经典的例子．

如图 1.1 所示，对平面单摆，应用牛顿运动定律给出了描述时间演变的一个二阶常微分方程

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta(t)=0 \quad (1.1.1)$$

式中 θ 是单摆离开铅直线的角位移，l 是臂长，g 是重力加速度．方程(1.1.1)显然是非线性的，因为

$$\sin(\theta_1+\theta_2)\neq\sin\theta_1+\sin\theta_2$$

但是，如果我们研究的是小位移状态，会发生什么情况呢？$\sin\theta$ 的 Taylor 展开式

$$(\approx\theta-(1/6)\theta^2+\cdots)$$

告诉我们，对于很小的 θ，方程近似是线性的：

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta(t)\approx 0 \quad (1.1.2)$$

线性方程的通解是两项的叠加，即

$$\theta(t)=\frac{1}{\omega}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0\sin\omega t+\theta_0\cos\omega t \quad (1.1.3)$$

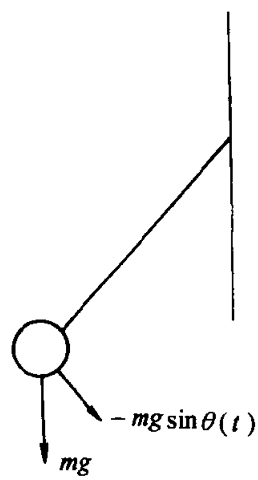

图 1.1　单摆，可以看出，根据牛顿运动定律，角向的重力分量 $-mg\sin\theta(t)$ 等于该方向的动量变化率 $ml\,d^2\theta(t)/dt^2$，这是描述平面单摆运动的非线性方程

式中 θ_0 和 $\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)_0$ 是初始时刻的角度和角速度，频率 ω 是由 $\omega=\sqrt{g/l}$给出的常数．用单摆的哈密顿(函数)开始我们的分析最有益，此单摆用角度 θ(一个广义坐标)和相应的(广义)动量 $p_\theta=ml^2\,\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$来表示．这里的哈密顿函数具有如下形式：

$$H(p_\theta,\theta)=\frac{p_\theta^2}{2ml^2}-mgl\cos\theta \tag{1.1.4}$$

利用哈密顿方程

$$\frac{\partial H}{\partial p_\theta}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \quad 和 \quad \frac{\partial H}{\partial\theta}=-\frac{\mathrm{d}p_\theta}{\mathrm{d}t}$$

我们得到(在消去 p_θ 后)一个只用角度 θ 和它的微商表示的方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0 \tag{1.1.5}$$

注意到$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]$和$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\sin\theta=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\cos\theta)$，我们看出方程(1.1.5)可以通过乘上 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ 而变成一个全微分

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2-\frac{g}{l}\cos\theta\right]=0 \tag{1.1.6}$$

因此，我们可以立即积分方程(1.1.6)而得到

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2=\frac{g}{l}\cos\theta+C \tag{1.1.7}$$

通过比较方程(1.1.4)和(1.1.6)并由 p_θ 的定义，我们看出

$$C=H(p_\theta,\theta)/ml^2$$

当然，常数 C 正比于哈密顿函数之值，刚好是熟悉的能量守恒表达式，并表明能量值决定了摆的运动性质．

我们只限于考虑摆动，即单摆的运动是来回振动而不摆过悬挂点的顶端．我们可以用当 $\theta=\theta_{\max}$时 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t=0$ 的条件通过 θ 来计算 C，由此给出

$$C=-(g/l)\cos\theta_{\max}$$

这又意味着

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_{max})} \qquad (1.1.8)$$

然后，运动的整个周期 T 是如下的定积分：

$$T = 4\int_0^{\theta_{max}} \left[d\theta \Big/ \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_{max})} \right] \qquad (1.1.9)$$

最后这个积分可以通过三角恒等式的重新定义变量而转换为第一类椭圆积分．尽管这不如线性近似中出现的正弦和余弦那样为人们所熟悉，但椭圆积分已制成表并很容易计算．因此，非线性摆的整个运动方程可以对任意初始条件按封闭形式求解．

非线性物理现在所讨论的问题，仅限于确定状态的非线性系统．所谓确定状态，是指其状态遵从确定的物理规律随时间演化；呈这样状态的系统常称之为确定系统(甚至还包括用波函数 Ψ 完全描述的系统)．为了简明地了解所谓确定状态的非线性系统，我们常以平面单摆为例．此单摆遵从牛顿定律，在恒定重力场中运动(如图 1.1 所示)，其运动状态，由上述随时间演化的二阶常微分方程(1.1.1)描述．该方程是可积的，下面将分析平面单摆更复杂的运动状态，其描述状态的方程是非线性常微分方程，此类方程反映了确定系统的诸多非线性现象．

为了便于了解非线性现象及非线性理论，不妨由此引入一些概念．

(1) 自治系统：其自变量 t 不显含于常微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ i = 1,2,3,\cdots,n \qquad (1.1.10)$$

称为自治系统．单摆运动方程可写为

$$\dot{\theta} = \dot{x}_1 = x_2/ml^2,\ x_2 = P_\theta$$

$$\dot{x}_2 = -mgl\sin x_1$$

应为自治系统．

(2) 相和相平面：在上文，对单摆运动，引入了广义坐标 $\theta = x_1$ 和广义动量 $p_\theta = p_1$，可得哈密顿方程

$$\frac{\partial H(p_1,x_1)}{\partial p_1}=\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\partial H(p_1,x_1)}{\partial x_1}=-\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$$

一般而言有，H 可表示为 $H(p_1,p_2,p_3,\cdots;x_1,x_2,x_3,\cdots)$，在此运动系统中，$(p_1,p_2,p_3,\cdots;x_1,x_2,x_3,\cdots)$确定了系统的运动状态，我们称之为相；点$(p_1,p_2,p_3,\cdots;x_1,x_2,x_3,\cdots)$的全体构成之集合谓之曰相空间．上述单摆之$(\theta,p_\theta)$就是其相．

通过分析一系统的相和相空间可得诸系统的运动信息．下面以单摆为例作说明，单摆方程可简化为

$$\dot{x}_1=p_1,\dot{p}_1=-\sin x_1$$

可得其 x_1-p_1 相平面的相轨如图 1.2 所示，(0,0)及$(0,\pm 2n\pi)$表

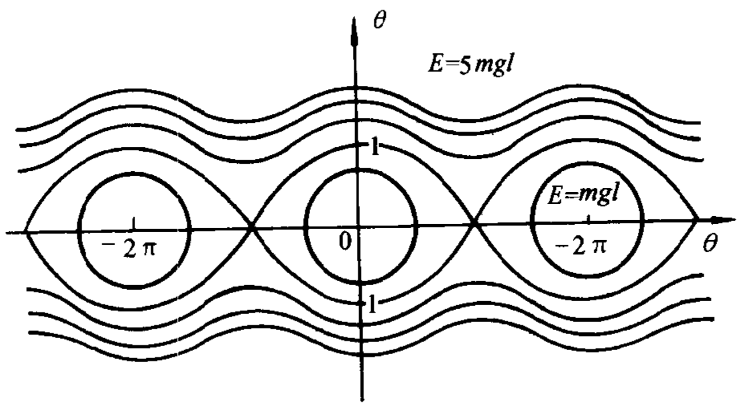

图 1.2　谐振子相空间$(\theta,\dot{\theta})$

示摆势能最小的点，称为稳定的中心点；而$(0,\pm(2n+1)\pi)$为势能最大的点，为不稳定的鞍点，摆于此点极不稳定，稍有扰动摆即离此点，在水平轴($p_1=0$)附近之闭曲线表示周期振动，而远离水平轴时(p_1 甚大使 $H>$势能峰值 $\frac{g}{l}$)开口的“波状”相轨代表无界运动，即绕原点的转动．

上述二者仍为周期运动，如果我们考虑介于二者之间的临界

运动时，得到的就不是周期运动．此时，$H=\frac{g}{l}=\omega_0^2$ 在相轨图中为上述二类相轨之分界轨，界轨上之运动方程即为

$$\dot{x}_1=\pm\ 2\omega_0\cos\frac{x_1}{2}$$

设 $t=0$ 时 $x=0$. 积分上式，可得两支界轨上的运动状态，为

$$x_1=4\arctan e^{\pm\omega_0 t}-\pi$$

速度表示式为

$$v=\dot{x}_1=\pm\ 2\omega_0\operatorname{sech}(\omega_0 t)$$

由第二章可知，此为一孤立波解，这就是说单摆界轨上运动速度变化为一“速度孤立子”，而孤立子运动为一非线性现象，这就意味着，即使在无重力以外的其它驱动力的作用下的无阻单摆仍可作非周期的非线性运动．

当单摆受阻(取最简单的线性阻尼)和周期驱动力作用时．其运动方程可书为

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\alpha\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\frac{g}{l}\sin\theta=\Gamma\cos\Omega t \qquad (1.1.11)$$

式中 α 为阻尼系数，Γ 和 Ω 为驱动力之振幅和频率．此方程在一般情况下不能得到像方程(1.1.1)那样的解析解，也就是说，此方程不可积．此系统的运动特征十分复杂，完全是随机的不可预测的形态，这就是第三章要讲的混沌运动状态．从单摆这一似甚简单的运动系统，就可窥见确定性状态的随机行为，分析其运动，即可初识混沌这一非线性运动状态．

§1.2　可积与不可积动力学系统

上节讨论的单摆运动中，已谈及可积与不可积概念，这是讨论确定状态的非线性系统的行为之重要概念，必须有所认识．

一个动力学系统可积，就是说，描述其系统运动状态的微分方程或方程组有解析解；说得确切一点，一个具有 N 个自由度的自治系统，如有 N 个运动常数(运动积分)，即类似于(1.1.7)式的 N

个积分，且这些常数彼此相容，此系统即为可积系统．刘维尔-阿诺尔德(Liouville-Arnold)定理指出，一个 N 自由度哈密顿系统，当且仅当有 N 个独立的彼此对合(泊松括号须恒等于 0)的孤立积分存在时，它才是可积的(G. M. Zaslavsky，Chaos in Dynamical Systems，1985，Harwood Academic Publishers)．

对于可积系统而言，尽管有明显的非线性，但仍在相空间的所有区域表现出光滑运动的明显规则性．这个事实与不可积系统完全不同，一个少到只有 1.5 个自由度的不可积系统(如上文的方程(1.1.10)所示有三个广义坐标的阻尼驱动系统)，可表现出确定性混沌，其相轨极点不规则，其运动在摆动与转动间混乱变化．绝大多数具有两个以上自由度的哈密顿系统是不可积的，一般而论，不可积的哈密顿系统都存在混沌运动．当然这不是绝对的，甚至，“无限”自由度哈密顿系统中也有完全可积的例子．在本书第二章所要阐述的 KdV 方程，sine-Gordon 方程就是具有“无限”自由度的完全可积系统．“无限”自由度(或称无穷维)可积系统与有限自由度可积系统比较，又出现了一些新的性质，这将在第三章作些介绍．

在 60 年代初，由于柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)、阿诺尔(Arnol)和莫塞(Moser)的出色工作(他们提出并证明了 KAM 定理)，开辟了“近可积系统”及“弱混沌”的问题等具有十分重要价值且甚广泛的研究领域．所谓近可积系统，是指那些可看成受微扰的可积系统之不可积系统．可这样表示其哈密顿量 $H=H_0+\varepsilon V(I,\theta)$，其中 H_0 是未受扰动的可积系统，I 和 θ 是 N 维矢量，是未扰动可积系统 H_0 的作用变量和角变量，$\varepsilon\ll 1$ 为微扰参数．至于 KAM 定理，因需补充较多的数学知识才能理解其内容，限于篇幅，本书就不作介绍(详细内容可参见 A. J. Lichtenberg et al，Regular and Stochastic Motion，Springer-Verlag，New York，1983)．但可定性说明其对近可积系统的分析：由 KAM 定理可知，当微扰不大时，近可积系统即使具有混沌，也仅限于相空间中某些很小区域内，对二自由度自治哈密顿系统，“KAM 环面”(参见 134 页)的存