

萬有文庫

第一集一千種

王雲五主編

代數學
二次方程式

林鶴一 伊藤新重郎著

鄭心甫譯

TRUE LIGHT MIDDLE SCHOOL
LIBRARY

真光中學白鶴岡圖書館

商務印書館發行

46

+

17

2 042 8765 4

代 數 學
二 次 方 程 式

林鶴一 伊藤新重郎著
鄭心南譯

算 學 小 叢 書

3150

57811

編主五雲王

庫文有萬

種千一集一第

式程方次二一學數代

著郎重新藤伊 一鶴林

譯南心鄭

路山寶海上
館書印務商

者刷印兼行發

埠各及海上
館書印務商

所行發

QUADRATIC EQUATIONS

By
HARGASIL and TIO
Translated by
S. CHENG

THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China

1930
All Rights Reserved

B
一
三
八
分

目 次

第一章 一元二次方程式之解法

一元二次方程式之定義.....	1
特別之解法.....	2
一般之解法.....	7
一元二次方程式根之公式.....	12
虛數.....	14
虛數之計算.....	16
練習問題 I.....	19

第二章 一元二次方程式根之研究

判別式.....	21
根及係數之關係.....	24
作既知二次方程式之根之對稱式或交代式.....	26
作適合於題之根之方程式.....	29
二根間有一定之關係時，係數間所應存在之條件.....	33
練習問題 II.....	34

第三章 一元二次方程式之應用

二次三項式之因數分解.....	36
應用問題.....	38
練習問題 III.....	42

第四章 分數方程式

分數方程式，整方程式.....	43
分數方程式之根.....	45
分數方程式之解法.....	46

AmT 3/10

分數方程式解法之別法	48
應用問題	54
練習問題 IV	58

第五章 無理方程式

無理方程式之定義	59
無理方程式之解法	60
應用問題	68
練習問題 V	70

第六章 高次方程式

重二次方程式	72
逆數方程式	77
二項方程式	81
三項方程式	87
觀察法	88
練習問題 VI	90

第七章 聯立方程式

一個一次方程式及二次二元聯立方程式之解法	91
由二個二次方程式所成之聯立方程式	97
成對稱形之方程式	107
二元聯立高次方程式之特例	110
多元聯立方程式	112
練習問題 VII	120
聯立方程式應用問題	122
練習問題 VIII	126

答及解法指針

代數學——二次方程式

第 一 章

一元二次方程式之解法

1. 定義。於含有一未知數 x 之方程式將各項移置左邊所得之式，如對於 x 為二次整式時稱此方程式為二次方程式。

例如

$$x^2=0$$

$$x^2-36=0$$

$$3x^2-10=0$$

$$7x^2+6x=0$$

$$6x^2-x-1=0$$

2. 二次方程式一般之形

二次方程式常可列為如次之形

$$ax^2+bx+c=0$$

稱為二次方程式一般之形。但 a, b, c 為任意之數 b, c 為可等於0之數。然 a 不可等於0，何則？如 a 為0則此方程式，成為 $bx+c=0$ 即成為一次方程式故也。

3. $c=0$

此時方程式(1)成爲如次之形

$$ax^2+bx=0$$

$$\text{即 } x(ax+b)=0$$

然欲使二數之積爲零，則其中任意一方之因數爲零，
爲必要而且充分之條件

$$\text{即 } x=0$$

$$\text{或 } ax+b=0$$

第二方程式移項後，以 a 除時，

$$x = -\frac{b}{a}$$

故方程式 $ax^2+bx=0$ 有二組之根如下：

$$\begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{b}{a} \end{cases}$$

例 解 $7x^2+6x=0$

解 於此方程式，將 x 置於括弧外時

$$x(7x+6)=0$$

故 $x=0$

及 $x = -\frac{6}{7}$

〔問 1〕 解下列各方程式

(一) $9x^2+5x=0$ (二) $10x^2-8x=0$

(三) $13x^2-26x=0$ (四) $21x^2+49x=0$

(五) $24x^2-11x$

4. $b=0$

此時方程式，成爲如次之形：

$$ax^2 + c = 0$$

移 c 於右

$$ax^2 = -c$$

然 a 不等於 0，故以 a 除時

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

— $\frac{c}{a}$ 由 a, c 之值，而取種種之值，區別論之如次。

I $-\frac{c}{a}$ 爲完全平方數時

例 1. 解 $x^2 - 1 = 0$

解 移項 $x^2 = 1$

然平方爲 1 之數，爲 +1 及 -1

故 $x = +1$ 及 $x = -1$ 。

總括記爲 $x = \pm 1$ 。

例 2. 解 $9x^2 - 49 = 0$

解 移項 $9x^2 = 49$

以 9 除時 $x^2 = \frac{49}{9}$

然平方爲 $\frac{49}{9}$ 之數，爲 $+\frac{7}{3}$ 及 $-\frac{7}{3}$

$$\therefore x = \pm \frac{7}{3}$$

注意。以上二例所示，1 之平方根及 $\frac{49}{9}$ 之平方根，爲絕對值相等，而符號反對之二根。

[問 2.] 解下列各方程式

(一) $x^2=25$

(二) $x^2=36$

(三) $x^2=81$

(四) $4x^2=1$

(五) $9x^2=25$

(六) $7x^2-343=0$

(七) $8x^2-512=0$

(八) $5x^2-80=0$

II. $-\frac{c}{a}$ 爲正數而不爲完全平方數時

例 1. 解 $x^2-5=0$

解 移項 $x^2=5$

然平方而能得 5 之數，不在整數及分數之範圍內，故此時如欲使此方程式有根，須設新數以 $\pm\sqrt{5}$ 表示平方而能得 5 之數，此種根數稱爲不盡根數，此時以

$$x = \pm\sqrt{5}$$

爲本題方程式之根。

注意 1. 欲求 5 之平方根，施行算術之開平方時得 2.23606... 任如何運算不能開斷。

$$\begin{aligned} \text{即} \quad & 2 < \sqrt{5} < 3 \\ & 2.2 < \sqrt{5} < 2.3 \\ & 2.23 < \sqrt{5} < 2.24 \\ & 2.236 < \sqrt{5} < 2.237 \end{aligned}$$

故 $\sqrt{5}$ 雖非整數，亦非分數，然可盡量求其至近之值，即能無限制的接近於 $\sqrt{5}$ ，使其差成爲所望之至小之數，而在二帶小數之間，此兩側之數稱爲近似值，小者爲不足之近似值，大者爲過剩之近似值。

注意 2. 方程式之根，得不盡根數時，通例照此放置而不開方。

注意 3. 以上三例所求方程式之根之絕對值 $1, \frac{7}{3}, \sqrt{5}$ 各稱爲 $1, \frac{49}{9}, 5$ 之算術的平方根; $\pm 1, \pm \frac{7}{3}, \pm \sqrt{5}$ 各稱爲 $1, \frac{49}{9}, 5$ 之代數的平方根。

例 2. 解 $3x^2 - 7 = 0$

解. 移項 $3x^2 = 7$

兩邊各以 3 除之 $x^2 = \frac{7}{3}$

$$\therefore x = \pm \sqrt{\frac{7}{3}}$$

例 3. 解 $x^2 = 8$

解 $x = \pm \sqrt{8}$

二數之積之平方根, 等於各因數平方根之積, 故

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore x = \pm 2\sqrt{2}$$

[問 3.] 解下列各方程式。

(一) $x^2 = 7$

(二) $2x^2 = 6$

(三) $3x^2 = 15$

(四) $4x^2 - 24 = 0$

(五) $7x^2 - 17 = 0$

(六) $100x^2 - 13 = 0$

例 4. 解下列方程式。

$$(2x-3)^2 + (3x+2)^2 = 15$$

解 解括弧。

$$4x^2 - 12x + 9 + 9x^2 + 12x + 4 = 15$$

簡約同類項

$$13x^2 = 2$$

兩邊以 13 除之

$$x^2 = \frac{2}{13}$$

$$\therefore x = \pm \sqrt{\frac{2}{13}}$$

$$\text{即 } x = \pm \frac{\sqrt{26}}{13}$$

例 5. 解 $\frac{5x^2-1}{3} - \frac{3x^2+2}{7} = \frac{8}{21}$

解 以分母之最小公倍數 21 乘各項

$$7(5x^2-1) - 3(3x^2+2) = 8$$

解括弧。

$$35x^2 - 7 - 9x^2 - 6 = 8$$

$$\text{即 } 26x^2 = 21$$

$$\therefore x^2 = \frac{21}{26}$$

$$\therefore x = \pm \frac{\sqrt{546}}{26}$$

[問 4.] 解下列各方程式

(一) $(4x+5)^2 + (5x-4)^2 = 100$ (二) $(x+12)(x-12) = 150$

(三) $(3x+2)(3x-2) = 15$ (四) $(2x+1)(2x-1) = x^2$

(五) $(2x+1)(x-3) = 6-5x$ (六) $(8x+4)^2 - 25 = 10+24x$

(七) $\frac{3(x^2+1)}{5} - \frac{2(2x^2-3)}{10} - \frac{43}{20} = 0$

(八) $\frac{5(x^2+9)}{2} + \frac{3x^2-11}{16} = \frac{13(x^2-70)}{4}$

例 6. 解 $(x-5)^2 = 9$

解. 本題之方程式, 視 $x-5$ 為未知數時,

$$x-5 = \pm 3,$$

$$\text{故 } x-5 = +3, \quad x=8$$

$$x-5 = -3, \quad x=2,$$

$\therefore$ 8 及 2 為所求之根.

驗算 如 $x=8$ 則本題之方程式

$$\text{左邊} = (8-5)^2 = 3^2 = 9.$$

又如 $x=2$ 則

$$\text{左邊} = (2-5)^2 = (-3)^2 = 9.$$

即 8 及 2 各能滿足。

[問 5.] 解下列各方程式

$$(一) \quad (x-5)^2 = 36 \qquad (二) \quad (2x-3)^2 = 16$$

$$(三) \quad (3x+7)^2 = 25 \qquad (四) \quad (5x+4)^2 = 3$$

$$(五) \quad \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \qquad (六) \quad \left(x + \frac{2}{7}\right)^2 = \frac{3}{5}$$

III. $-\frac{c}{a} = 0$ 時

$$\text{此時} \quad x^2 = 0$$

$$\text{故} \quad x = 0$$

[問 6.] 解下列方程式

$$(一) \quad (7x-3)(7x+3)+9=0 \qquad (二) \quad 7(3x^2-5)=-35.$$

$$(三) \quad \frac{2}{3}x^2 + \frac{2(x^2+1)}{5} = \frac{2}{5}$$

IV. $-\frac{c}{a}$ 爲質數時

例如 $x^2 = -1$ 另節論之。

5. 一般之形

例 1. 解 $x^2 - 10x + 16 = 0$

解 移已知項 16 於右邊

$$x^2 - 10x = -16$$

以 x 一次項之係數之半 (即 10 之半 5) 之平方 25 加於兩邊

$$\text{則} \quad x^2 - 10x + 25 = 25 - 16$$

$$\text{即} \quad (x-5)^2 = 9$$

此與前節之例 6 所解之方程式相同

$$\begin{aligned} \text{即} \quad x-5 &= \pm 3 \\ \therefore \quad x &= 8 \text{ 或 } 2 \end{aligned}$$

注意。如上所述，移既知數於右邊，加 x 一次項之係數之半之平方使左邊成完全之平方式，稱為完成平方。

例 2. 解。 $15x^2+11x-12=0$

解 移既知項於右邊

$$15x^2+11x=12$$

以 x^2 之係數除各項

$$x^2 + \frac{11}{15}x = \frac{12}{15}$$

欲完成左邊之平方，加 $\left(\frac{11}{30}\right)^2$ 於兩邊

$$x^2 + \frac{11}{15}x + \left(\frac{11}{30}\right)^2 = \frac{12}{15} + \left(\frac{11}{30}\right)^2$$

$$\text{即} \quad \left(x + \frac{11}{30}\right)^2 = \frac{811}{900}$$

$$\therefore \quad x + \frac{11}{30} = \pm \frac{29}{30}$$

$$\text{如} \quad x + \frac{11}{30} = +\frac{29}{30} \quad \text{則} \quad x = \frac{3}{5}$$

$$\text{如} \quad x + \frac{11}{30} = -\frac{29}{30} \quad \text{則} \quad x = -\frac{4}{3}$$

故 $\frac{3}{5}$ 及 $-\frac{4}{3}$ 皆為所求之根

驗算 於本題之方程式 如 $x = \frac{3}{5}$ 則

$$\text{左邊} = 15\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 11 \times \frac{3}{5} - 12 = \frac{27}{5} + \frac{33}{5} - 12 = 0$$

$$\text{又如} \quad x = -\frac{4}{3} \quad \text{則}$$

$$\text{左邊} = 15\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 11\left(-\frac{4}{3}\right) - 12 = \frac{80}{3} - \frac{44}{3} - 12 = 0$$

即 $x = \frac{3}{5}$ 及 $-\frac{4}{3}$ 俱滿足於本題之方程式

【法則】 欲解一元二次方程式，須先移未知項於左邊，既知項於右邊，以 x^2 之係數兩邊除之，又因欲完成左邊之平方，加一次項係數之半之平方於兩邊，然後求兩邊之平方根，而解所得之二個一次方程式。

別解。 以上例 1 例 2 之方程式，適用因數分解法亦可解之。

先將 $x^2 - 10x + 16 = 0$ 之左邊分解為因數，

則得 $(x-2)(x-8) = 0$

欲使左邊為 0，則二因數中，須有一因數為零，為必要而且充分之條件。

如 $x-2=0$ 則 $x=2$

$x-8=0$ 則 $x=8$

故 2 及 8 為 $x^2 - 10x + 16 = 0$ 之根

例 2 之方程式 $15x^2 + 11x - 12 = 0$ 之左邊分解為因數則得

$$(5x-3)(3x+4) = 0$$

如 $5x-3=0$ 則 $x = \frac{3}{5}$

$3x+4=0$ 則 $x = -\frac{4}{3}$

故 $\frac{3}{5}$ 及 $-\frac{4}{3}$ 為 $15x^2 + 11x - 12 = 0$ 之根。

注意。 簡單之二次方程式，如上別解所示，每以用因數分解，較為簡便。

〔問 7.〕 下列各方程式，先由完成平方解之，次用因數分解法解之。

(一) $x^2 - 15x + 56 = 0$

(二) $x^2 - 10x + 21 = 0$

(三) $x^2 - 19x + 90 = 0$

(四) $x^2 + 7x + 10 = 0$

(五) $x^2 - 6x - 27 = 0$

(六) $x^2 - 3x - 54 = 0$

(七) $x^2 - 5x - 24 = 0$

(八) $x^2 - 4x - 45 = 0$

(九) $6x^2 + x - 2 = 0$

(十) $14x^2 - 39x - 35 = 0$

例 3. 解 $7x^2 - 13x + 2 = 0$

解 移既知項於左邊，兩邊各以 7 除之。

$$x^2 - \frac{13}{7}x = -\frac{2}{7}$$

加 $\left(\frac{13}{14}\right)^2$ 於兩邊以完成左邊之平方時，

$$\left(x - \frac{13}{14}\right)^2 = \frac{169}{196} - \frac{2}{7}$$

即 $\left(x - \frac{13}{14}\right)^2 = \frac{113}{196}$

$$\therefore x - \frac{13}{14} = \pm \frac{\sqrt{113}}{14}$$

故 如 $x - \frac{13}{14} = +\frac{\sqrt{113}}{14}$ 則 $x = \frac{13}{14} + \frac{\sqrt{113}}{14}$

$$x - \frac{13}{14} = -\frac{\sqrt{113}}{14} \quad \text{則} \quad x = \frac{13}{14} - \frac{\sqrt{113}}{14}$$

驗算。 於本題之方程式，如 $x = \frac{13}{14} + \frac{\sqrt{113}}{14}$ 則

$$7x^2 - 13x + 2 = (7x - 13)x + 2$$

$$= \left\{ 7 \left(\frac{13 + \sqrt{113}}{14} \right) - 13 \right\} \left(\frac{13 + \sqrt{113}}{14} \right) + 2$$

$$= \left(\frac{13 + \sqrt{113}}{2} - 13 \right) \left(\frac{13 + \sqrt{113}}{14} \right) + 2$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{\sqrt{113}-13}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{113}+13}{14} \right) + 2 \\
 &= \frac{113-169}{28} + 2 \\
 &= \frac{113-169+56}{28} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

依同理 $x = \frac{13}{14} - \frac{\sqrt{113}}{14}$ 亦滿足於本題方程式。

注意。此後不一一驗算，學者宜自行之。

例 4. 解 $(3x+5)^2 - (4x-3)^2 = (5x+2)(10x-1)$

解。除去本題方程式之括弧。

$$9x^2 + 30x + 25 - 16x^2 + 24x - 9 = 50x^2 + 15x - 2$$

移項而整理之，則

$$-57x^2 + 39x = -18$$

$$\text{即} \quad 19x^2 - 13x = 6$$

$$\therefore \quad x^2 - \frac{13}{19}x = \frac{16}{19}$$

欲完成左邊之平方，加 $\left(\frac{13}{38}\right)^2$ 於兩邊，

$$\left(x - \frac{13}{38}\right)^2 = \frac{625}{1444}$$

$$\therefore \quad x - \frac{13}{38} = \pm \frac{25}{38}$$

$$\text{故如} \quad x - \frac{13}{38} = \frac{25}{38} \quad \text{則} \quad x = \frac{13}{38} + \frac{25}{38} = 1$$

$$x - \frac{13}{38} = -\frac{25}{38} \quad \text{則} \quad x = \frac{13}{38} - \frac{25}{38} = -\frac{6}{19}$$

即 1 及 $-\frac{6}{19}$ 為所求之根。

例 5. 解 $\frac{7x^2-5x}{3} + \frac{x^2-5}{6} = \frac{7(x-1)}{12}$

解 以分母之最小公倍數 12 乘方程式之兩邊而除去分母時，

$$4(7x^2-5x) + 2(x^2-5) = 7(x-1)$$

解括弧並整理之，則

$$30x^2 - 27x = 3$$

即 $10x^2 - 9x = 1$

∴ $x = \frac{9 \pm \sqrt{81}}{20}$

故 $x=1$ 及 $-\frac{1}{10}$ 爲所求之根。

[問 8.] 解下列各方程式。

(一) $(5x-2)(6x-5)=3$

(二) $(2x-1)^2 - (3x+5) + 2 = 0$

(三) $x(16x+5)-3=7x^2-(x-45)$

(四) $x^2-3=\frac{1}{6}(x-3)$

(五) $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} = 2(x+2)$

(六) $\frac{2+x^2}{3} - \frac{x-x^2}{2} = 1-x+x^2$

6. 一元二次方程式根之公式

如上所述一元二次方程式一般之形，爲

$$ax^2 + bx + c = 0 \dots\dots\dots (1)$$

欲解此方程式可照前節例題之手續行之，先移 c 於右邊，則

$$ax^2 + bx = -c$$

以 x^2 之係數 a 除兩邊，則得

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \dots\dots\dots (2)$$