数学模型

〔日〕近藤次郎 著

宫荣章 付尚信 靖德权
张春茹 卢英林 译

潘德惠 付尚信 宫荣章 校

机械工业出版社

本书共分十五章：数学模型、数量化、确定型模型、最小二乘法、周期模型、概率模型、相关模型、线性模型、动态模型、离散和连续、微观模型、宏观模型、随机过程、模拟、最优化方法。

本书的特点是以大量实例阐明从现象建立数学模型的一般原则和有关方法，并介绍了自然科学和技术科学中实际过程的数学模型所涉及的各种数学知识。本书内容丰富且具有启发性。书中各节之后还安排了一定数量的习题，书后附有答案，便于自学。

本书可供理工科高等院校师生、研究生阅读，并可供科研人员和工程技术人员学习和参考。

数学モデル
现象の数式化
近藤次郎　著
丸善株式会社
1976年3月第一版
1979年8月第三次印刷

*　*　*

数　学　模　型

〔日〕近藤次郎　著

宫荣章　付尚信　靖德权
张春茹　卢英林　译

潘德惠　付尚信　宫荣章　校

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）
（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）
三环印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32·印张 15 7/8·字数 412 千字
1985年6月北京第一版·1985年6月北京第一次印刷
印数 00,001—12,200·　定价 3.95 元

*

统一书号：15033·5763

译　　序

随着我国科学技术的迅速发展，在自然科学和技术科学领域内，关于如何从现象建立数学模型以及建立数学模型的要领是什么，等等的基本问题，已有越来越多的人在关心了。有关这方面的书籍资料目前国内出版甚少，我们出于工作的需要，参阅了本书。发现本书的内容丰富并富有启发性，特别是以大量实例阐明了从现象建立数学模型的一般原则和有关方法，还介绍了自然科学和技术科学中实际过程的数学模型所涉及的各种数学知识，每章各节后面还附有习题，使我们阅读时，感到比较易于理解和掌握要领。所以特意翻译出来以飨我国对此有兴趣的读者。

由于本书内容涉及专业面广，限于我们的水平和力量，虽经努力，错误和不妥之处仍难于避免，欢迎批评指正。

本书由潘德惠、付尚信和宫荣章总校订，序、读法说明及第一、八章由宫荣章译，第二、五、十章由张春茹译，第三、四、七、九章由卢英林译，第六、十一章由付尚信、宫荣章译，第十二～十五章由靖德权译，习题答案由付尚信译。

此书华北电力学院孙昭星、沈自钧二同志亦已全部译出，达到出版水平，由水利电力出版社列入出版计划。现经该社与机械工业出版社协商，为避免重复，议定由列选较早的机械工业出版社出版我们的译文。

序

近年来随着计算机的普及，数学不仅在自然科学，而且也在社会科学和人文科学的广泛领域内得到应用，并取得了显著成果。在上述应用中，必须先把现象用数学式子表示出来。用数学式表示的假定叫作数学模型。

用数学阐明自然现象是从物理学开始的，在理工科领域内很早就这样作了。而且一旦建立起现象的基本方程式，就在各种条件下对方程求解，用解来解释现象及进行预测、管理、利用与设计，等等。关于基本方程式的解法，在国内外已有以寺泽宽一的《自然科学者应用数学概论》(1931 年初版，岩波书店) 为代表的不少好书。但是一个研究人员在面对着未知的现象时，首先必须把它用数学式表示出来。

在物理学方面，首先根据研究人员的自然观用现象的物理模型来建立数学模型。此时物理模型与数学模型之间相互有关。就是说，如果注意到特定的现象与特殊的数学式间存在着一定的联系，那么就能理解到建立数学模型是有一定原则的。本书的目的就是要说明这样的原则。现在由于可以利用计算机，所以，一旦数学模型建立起来之后，求解就不太困难了。

假定在我们面前有一现象，想用数学方法把它解释清楚。在此情况下，首先要建立数学模型。这种方法一直被认为要具有天才闪烁着的才华或是积累处理很多问题的经验才能领会，而跟别人学习是学不到手的。并且，以往的数学教育主要讲授如何处理数学式，因此以方程式的解法为主，最近也在讲授用计算机将数学模型进行数值处理的方法。对于重视应用的工科教育，则是以求出适于所建立的基本方程式的各种条件的解为主。但是，关于建立现象的数学模型的方法本身，在学校教育期间却很少讲授。

本书是以具体例子来说明从现象建立数学模型的一般原则。要领会建立数学模型的方法的普遍原理及原则，确实是不容易的。但如果观察各种成功的例子，将会发现在其中有着某种方针。本书收集了各方面的多种例子正是为了这个目的。

著者已经写了由东洋经济新报社出版的《社会科学用的数学入门（数学模型的建立法）》和由日科技連出版社出版的《数学模型入门》。本书则是为自然科学工作者和理工科技术工作者按同样目的而编著的一本书。此外，1965年由丸善出版了《技术者、研究者应用数学，上、下》。它主要叙述的是基本方程式的解法。

本书的内容是以著者在东京大学工学院从1973年以来所开的《应用解析学，第Ⅰ》这门课的讲稿为基础的。近来，由于想到编写成教科书对学生会更方便些，虽然这个讲稿每年都会有更新的部分，还是决定出版了。按上述宗旨，如果本书在自然科学工作者应用数学去阐明现象时多少有些帮助，著者将感到荣幸。

著者

1976年2月

目　录

第一章 数学模型

数理是宇宙的根本原理这种思想远自古希腊时期就有了。应用数学来阐明现象的尝试是从自然科学发达初期的文艺复兴时期开始的。实际上，存在着这种情况，即数学本身的进步也有与阐明现象或者和它的应用一起实现的。从那时以后，与科学发达的同时，数学完成了它独自的发展。而现代用称为“数理科学”的数学方法去理解现象的做法，扩大到了自然科学的各个领域。

数学模型是本书的主题。本章作为绪论首先叙述什么是数学模型，它有什么用处，如何利用它。而且也就数学模型的分类以及建立数学模型的方法概要地予以说明。第一节说明数学模型在自然科学中所占的地位与它的任务，第二节列举了作为数学模型的万有引力法则与误差法则。这些不是定理而是依靠天才的优异的直观引进的假定，亦即数学模型。第三节是关于数学模型的分类，它分为按建立方法，也就是按现象的观察法进行的分类与按数学式的种类进行的分类。最后在第四节叙述数学模型建立方法的要领。

第一节 数理科学与数学模型

一、自然科学与数学模型 牛顿（1642～1727）将力学法则用单纯的数学式表达出来了。按照这个法则与由他创始的微积分方法，能够通过计算求出从地上的潮汐涨落、摆的周期、直到天体中行星的运行。牛顿力学就是以这种意义与数学密切地结合在一起的。

自从牛顿力学有了光辉的成就以来，在包含物理学在内的自然科学领域中出现了一种趋势：致力于用单纯的数学式表示自然法则，求出它的解，并与实验和观测结果相比较去理解现象。例如，

费马（P. Fermat，1601～1665)的“光沿着所需通过时间最小的路径前进”这一光学原理是用变分法表示的，也是作为哈密顿（W. R. Hamilton，1805～1865）最小原理的一个力学原理的表述。像这样在自然科学中出现了用尽可能单纯的数学式与最小限度的法则去解释现象的倾向。

这种把现象数式化的思想可以追溯到古代的伽利略（Galileo Galilei 1564～1642)。他认为支配着宇宙的原理是数理。他曾说过：“哲学在我们眼前展现着，它书写在那伟大的书本中，我们必须首先学习那些言辞以及符号，不然就理解不了用它们书写的哲学”㊀。

像这样的想法也扩展到了物理学以外的领域。那是因为用数学式能够正确而客观地把问题表示出来。最近赖特希尔（M. J. Lighthill，1924-　　）对数学的应用强调如下㊁：

数学的方法可以更新物理概念，例如，在冗长的数学计算之后可以抓住清楚的物理形象。新的物理概念并不是从旧的物理见解中产生出来的。数学的方法则是新物理形像形成过程的手段。物理概念这种东西是笼统的，所以其真正的意义在哪里不很清楚，但把数学作为基础的物理观却象强韧的弹簧钢一样，即使硬把它折弯，它自己也会回复到正确的位置上。

二、工程学的研究与数学模型

在工程学的领域内数学已被视为与实验同等重要了。其理由有下面几个：

1、设计的时候，选择材料或者确定尺寸时，只靠定性的判断并不充分，必须定量地预测其状态和性能。若不按这样的方法，在化学工业方面，就不能确定装置的大小、原料供给量、催化剂的种类和数量、温度调节方法以及其他条件。在机械工业方面，决定产品性能、尺寸、切削加工方法等也很困难。

㊀ 鈴木敬信訳（ジーンズ著）：神秘な宇宙，岩波新書(1938)。

㊁ Lighthill. M. J.，“Mathematical methods in compressible flow theory”, Communication on Pure and Applied Mathematics, 7(1954) pp. 1-10.

2. 由于系统越来越高性能化或复杂化，若不靠数学的方法，单纯的实验已难于使严峻的状况重现出来。例如，阿波罗卫星返回地球时在高 120 公里左右的大气层上端竟达到每秒11公里的速度，仅用30分钟左右就回到地面。即使想要将这样的状态用风洞实验来重现，由于必须有极大规模的设备而终究不能实现。

3. 有某些种类的东西只有使用数学模型方能明了其状况。例如，最近的电子仪器或机械零部件性能稳定而且可靠性已非常高，其中包括故障率为百万分之一的极优秀产品。但谈到人造卫星则因它是汇集了 500 万个以上这种零部件构成的，所以实际上有发生故障的时候。对这种系统的可靠性就有必要作出故障或可靠度的数学模型。那是因为故障的出现是极少有的现象，因而难于依照多数实验结果作统计处理来确定复杂系统的可靠度。

4. 计算机的性能已经提高，而且计算机也普及了。目前甚至可以把计算机看做是一个实验装置，同时它是能够用于多目的和多用途的万能实验装置，应用计算机不但能模拟化学反应，对复杂结构的应力计算或物体周围气流的再现也逐渐成为可能的了。这种研究方法与过去的小规模实验相比，方式不同，因而使用了计算机科学这个新名词。

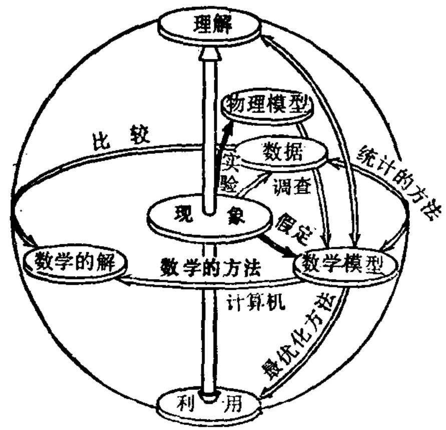

图1.1 现象的理解与利用

在工程学方面应用数学的目的首先在于理解现象，利用它以创造新价值。其情况如图 1.1 所示，建立起现象的数学模型，然后求解，或者作实验以及调查得到数据，与用数学的方法求得的解相比较。若能很好地说明实验和调查的结果，则此数学模型是正确的。对数学模型求解时，有用分

析的方法进行理论计算的情况，也有用数值计算及用计算机模拟的情况。此外，也有在建立数学模型时采用统计的方法从数据中找出模型的情况。像这样，如果能够理解了现象，那末自然法则就能用一般形式描述出来。以此为基础或者进行设计，或者为了达到某一目的想寻找最优的方法而再次利用数学方法，这就是最优化法。此时重新由数学模型出发。图 1.1 把这种关系立体地表示了出来。

当然如图所示，也有不使用数学模型而制做简单的试验装置或试验设备，从而得出实际设计数据的，这种情况自然也不少。但即使在这种情况中，如不能在某种程度上理解现象也不会顺利进行。何况只靠这种方法，根据开头所叙述的理由要达到现在这样进步的技术水平是困难的。要求对以往的工程学中已经建立了的基本方程，如材料力学和结构力学中的关于弹性，即关于应力与应变之间的法则，流体力学中考虑了粘性和压缩性的纳维-斯托克斯方程等在各种条件下进行求解。因此，对基本问题就其所有情况预先加以计算，将计算结果汇编成手册（便览）的形式，这对通常的目的来说足够了。对此即使只汇编了经验结果的资料集也够用了。只要知道手册的查法，即使不作数学模型，同时不去一个一个地解方程也能设计。就是说，初级技术人员只要查阅手册，收集与设计条件相吻合的数据也就足以解决问题了。

但是，现在的工程技术已经非常发达了，单纯模仿大多是不够的。另外，只是单把尺寸加倍，性能则不一定变为 2 倍。出现所谓的非线性效应的情况也不少。遇到这种困难问题，单是使用手册就得不到所希望的解，非得面对现象，以自然科学研究工作者的态度去探讨它不可。在此，数学的方法是极其重要的。它不是利用数学方法解所给出的问题这样一种被动的态度，而是以科学家的态度去提出数学问题。

下面举出若干例子说明数学模型对问题的解决多么有用。

例1.1　数学生物物理学

数学生物物理学㊀乃是应用物理学的方法及原理研究生态系统的一门科学，特别是使用数学模型去处理生物学的本质问题的一门学问。但是，由于生态系统相互依赖性强，具有非线性关系，所以与物理学及物理化学的对象不同，其特性多半是定性的，难于数量化。

由于器官的形成及成长是十分复杂的现象，以致想要用数学模型加以表述的初期尝试没有成功，但在流行病的传染过程㊁等的统计学研究方面则已取得很大成功。关于血管内血液流动的力学，神经的信息传递以及肌肉的收缩等问题已经解释到了一定程度。其次，在生物体内的扩散、隔膜的渗透性、酵母的作用以及不可逆的热力学等问题，正在进行研究。今后可以期待由于信息理论的应用，也能对视觉、听觉、学习等心理的、社会的活动给以说明。

例1.2　大气污染的数学模型㊂

烟囱或发动机排出的污染物乘空气流而移动，因大气的扰动而扩散。在该过程中，或者是向地面下降，或者由于太阳的辐射引起光化学反应生成氧化剂等而成为光化学烟雾，再被地面或降雨所吸着。这个现象（如图1.2所示）是极其复杂的。

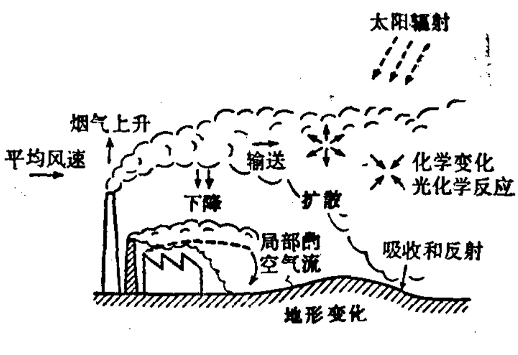

图1.2　在大气中烟囱的烟尘扩散

根据德国生理学家费克（A. E. Fick，1829-1901）的扩散法

㊀ Rashevsky. N.; Mathematical Biophysics, University of Chicago Press (1948); Lotka. A. J.; Elements of Mathematical Biology Dover (1956).

㊁ 近藤次郎：社会科学のための数学入門，東洋経済新報社(1973)，12章。

㊂ 近藤次郎编：大気汚染——現象解析とモデル化，コロナ社(1975)。

则，污染物的浓度 C 可由下列方程式表示

$$\frac{\partial C}{\partial t}+u\frac{\partial C}{\partial x}+v\frac{\partial C}{\partial y}+w\frac{\partial C}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial C}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y\frac{\partial C}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial C}{\partial z}\right)+Q(x,y,z,t)\quad(1)$$

左边第一项为所考察的空间浓度的时间变化率，后面三项表示依气流（u，v，w）移动而进入这一空间部分的污染物。另一方面，右边三项表示由于扩散带来的浓度，而最后一项表示在此空间部分发生的污染物。K_x、K_y、K_z 是扩散系数，它们的数值由于大气扰乱的构造不同而大幅度变化。

图 1.3 表示出水平方向的扩散系数与图上所注的尺度相对应的值。可见当处理大气污染问题时，随着研究对象取值范围大小的不同，扩散系数的值是变化的。

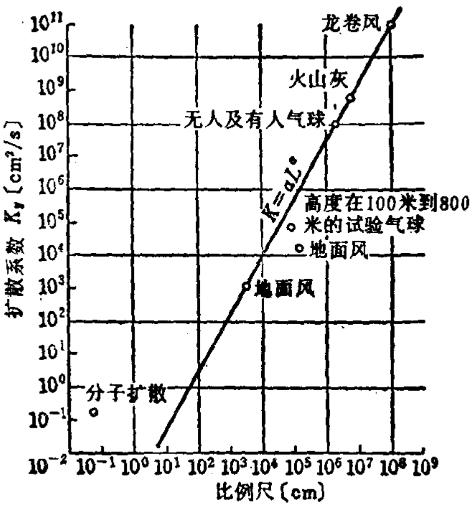

图1.3　各种尺度旋涡的扩散系数

现在，风向一定时，从烟囱那样的点源放出的污染物质，当 Q 是原点发生的浓度时，其扩展可由下述方程来描述。

$$C(x,y,z,t)=Q(4\pi t)^{-3/2}(K_xK_yK_z)^{-1/2}\times\exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{x^2}{K_x}+\frac{y^2}{K_y}+\frac{z^2}{K_z}\right)\right\}\quad(2)$$

可以看出，这是方程（1）中把左边的输送项省掉以后的特解，（2）的解如图 1.4。图中 H 为烟囱有效高度，是因为烟囱的排烟从高于烟囱实际高度的地方扩散而引入的一个修正量。

方程（1）对浓度 C 是线性的，所以解可以叠加。因此所考

察的地带如果有烟囱群，将式（2）所示的解叠加起来就能分析其污染状况。我们把这叫做高斯羽烟模型。

另一方面，在风向变化的情况下，采用喷吹模型。它如图1.5所示，是按大气的稳定度不同而考虑的烟扩散。其次，就光化学反应也提出了各种模型。

例1.3 固体的晶格振动

现在考虑固体的比热。它可以看成晶格点由于相互作用而振动。爱因斯坦（A. Einstein，1879～1955）从晶格点是作为独立的谐振子运动的想法出发作出了数学模型。它虽能很好地说明光学模型，但却不能很好地说明

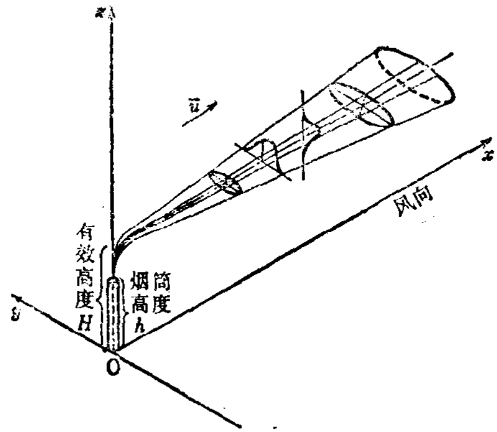

图1.4 高斯羽烟模型

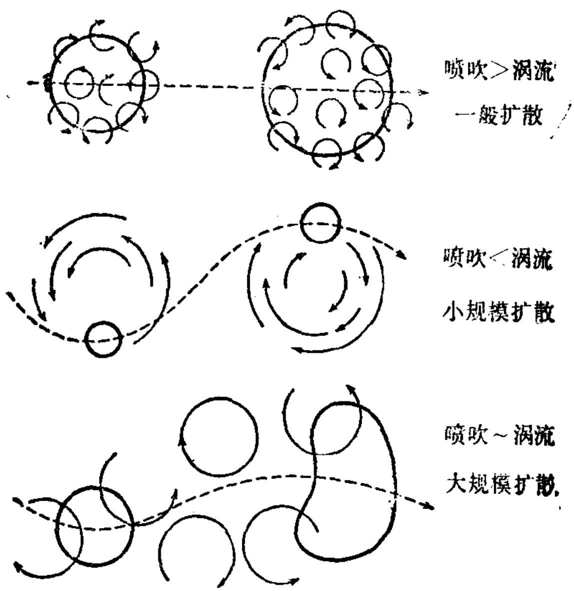

图1.5 喷吹模型

音响模型。迭拜（P. J. W. Debye，1884～1966）把它看作有相互作用的谐振子作出了数学模型。但这虽能很好地说明音响模型，却又不能很好地说明光学模型。于是，加以量子化，产生了叫做声子的非线性谐振子的量子化。由此说明了固体的热膨胀现象。

例1.4　用计算机计算高速气流

高速气流实验装置用以模拟高速气流。随着飞机性能的提高

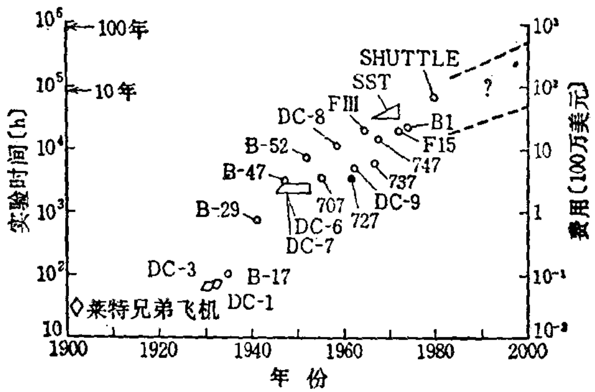

图1.6　风洞实验的延续时间和总费用

风洞实验的延续时间（如图 1.6 所示）有逐渐增大的趋势，随之而来的是所需经费也在增加。在图 1.6 中右方的轴是将单价估算为每小时 1000 美元时的实验费用。因此，可以考虑利用计算机做数字模拟。

由于计算机性能的提高和数值计算方法，特别是偏微分方程解法的进展，高速气流的各种问题都变成求数值解了。稀薄气体的自由分子流等采用蒙特卡洛法

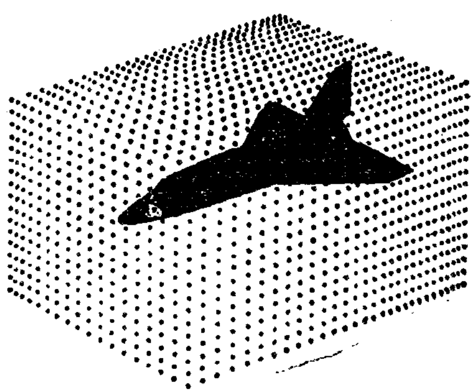

图1.7　计算有离解的高超音速气流的网格点

就能使气体分子的运动重现，所以计算机可以代替稀薄气体风洞。在连续气流的范围内，过去只处理比较简单的流动，但是到了最近，就连图 1.7 那样的包括航天飞机整机周围的离解在内的那种高超音速流也能够计算了。计算是取 3×10^6 个格子点去解基本方程的。若用 IBM360/67 型计算机，解一个问题要 100 小时，费用需要 2 万 5 千美元。但据说同一计算采用 ILLIAC Ⅳ 型则只需30分钟，500美元就够了。

图 1.8 是对比计算高速气流流动所需费用的图，可见计算机技术的提高不仅缩短了计算时间，而且也使费用大幅度地降低。ILLIAC 及 STAR 一出现，只用 IBM360 型的 1/100 的费用就能完成同样的计算。要使气流重现到代替模拟实验的程度，以计算物体附近的涡流，还必须使计算速度增加将近 1000 倍，而这样的计算机预计要到 1982-1985 年前后实现。图 1.9 是进行这一推测所利用的曲线图。在计算机专家当中对它的可靠性抱怀疑的人也不少，但可以认为，在那一期间内完全地计算出高速气流是可能的。

另一方面，对实验装置性能的要求有越来越高的倾向，所以将来即使引进高价的计算机也比向实验设备大量投资更为有效。

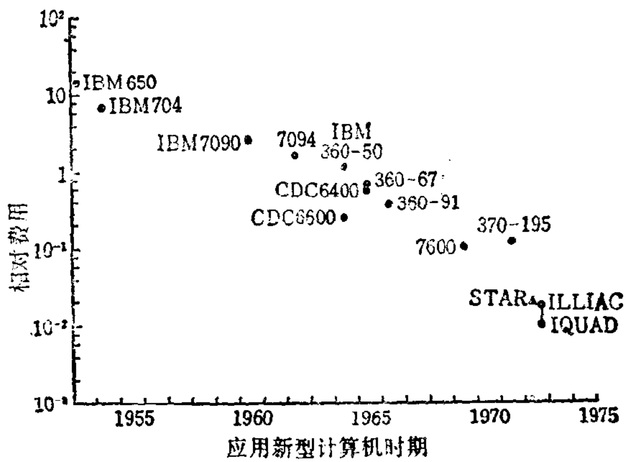

图1.8 计算机的发展（计算费用的降低）