高等学校试用教材

概 率 论

第一册 概率论基础

复旦大学 编

藏書
图书馆

人民教育出版社

高等学校试用教材

概　率　论

第一册　概率论基础

复旦大学　编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

目　　录

序　　言

概率论是从数量侧面研究随机现象规律性的数学学科，理论严谨，应用广泛，发展迅速.

概率论是数学的一个有特色的分支. 一方面，它有别开生面的研究课题，有自己独特的概念和方法，内容丰富，结果深刻；另一方面，它与其它数学分支又有紧密的联系，它是近代数学的重要组成部分.

目前，概率论的理论与方法已广泛应用于工业、农业、军事和科学技术中. 如预测和滤波应用于空间技术和自动控制；时间序列分析应用于石油勘探和经济管理；马尔可夫过程与点过程应用于地震预报和气象预报；数理统计方法应用于工农业生产等等. 在理论联系实际方面，概率论是数学最活跃的分支之一.

概率论的理论和方法向各个基础学科、工程学科的渗透，是近代科学技术发展的特征之一. 概率论与其它学科相结合发展成不少边缘学科，如生物统计，统计物理和数学地质等；它又是许多新的重要学科的基础，如信息论，控制论，可靠性理论和人工智能等.

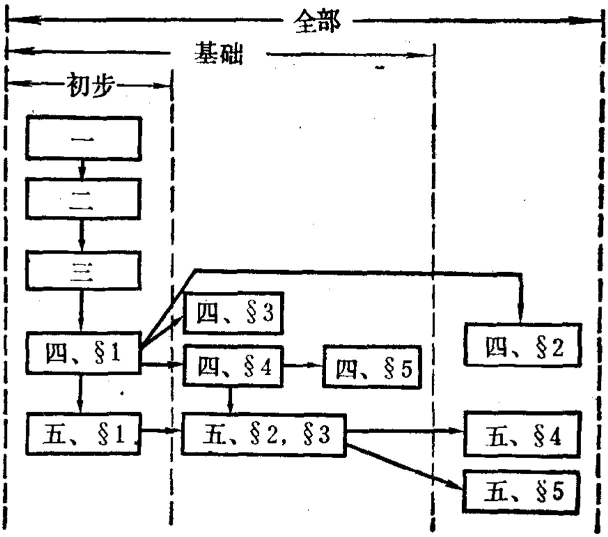
今天，高等学校理科、工科和医科的许多专业的教学计划中都设置了概率论或数理统计课程，以使学生初步掌握处理随机现象的基本理论和方法，培养他们解决某些有关实际问题的能力. 编写本书的目的就在于为上述课程提供教材或基本教学参考书.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

全书共分三部分：概率论基础、数理统计和随机过程，分三册出版．作为一个整体，全书的内容是连贯的，体例是一致的，它包含了概率论学科的主要基础知识；同时这三部分的内容又有自己的独立性，因此通过其他课本学过概率论基础的读者，可以直接学习本书的数理统计部分或随机过程部分．全书的内容基本上假定读者具有微积分的基础知识，数理统计部分还要求读者懂得线性代数，随机过程部分有些章节还需要一些实变函数论和泛函分析的初步知识．

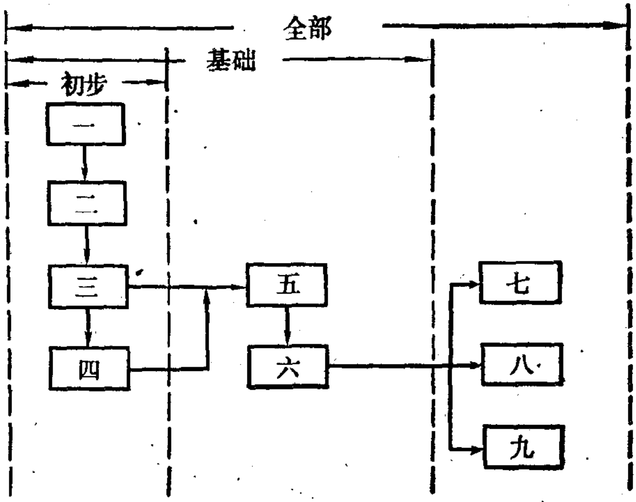
全书内容的组织是“模块式”的，作者希望通过适当的选择，本书将能适应多方面的教学需要．三部分内部各章节的逻辑关系如下①：

I 概率论基础

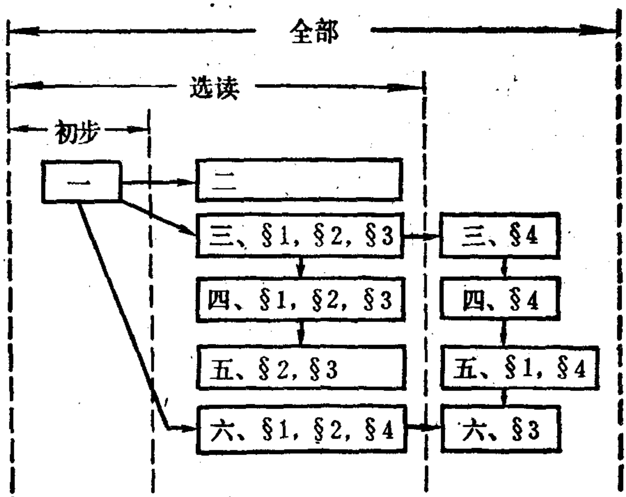


① 表内中文数字（如一，二等）为章标号．

Ⅱ 数理统计



Ⅲ 随机过程



从教学时数来看，下面也提供几种可供选择的安排①：

① 表内数字(如36, 48等)为学时数.

	概率论基础	数理统计	随机过程
初步	36	24～36	10
基础	48	50	
选读			(一,二) 30
			(一,三,四,五) 50
			(一,六) 20
全读	60	约 100	80

本书中的定理、公式和图表等均按节编号,引用同节的公式时,只指明编号;同章跨节引用时还指出节号,例如(2.21)表示同章第2节(21)式;跨章引用时还指明章节号,例如(3.2.21)表示第三章第2节(21)式.

标有星号的章、节、段有相对独立性,跳过它们不损害全书的连贯.

本书的编写工作在吴立德同志的领导下进行,结构与体例由编写者集体讨论商定.概率论基础部分由李贤平同志编写;数理统计部分一至八章由卞国瑞同志编写,第九章由汪嘉冈同志编写;随机过程部分第一、二、三、六章由吴立德同志编写,第四、五章由汪嘉冈同志编写.最后,汪嘉冈同志审阅了全书.

在编写过程中,我们得到了郑绍濂同志的指导和帮助.本书初稿于1978年秋季完成后,上海师范大学魏宗舒教授等曾对本书提出了许多宝贵的意见和建议;本校徐业基同志和吴立鹏同志阅读过部分原稿并提出不少意见和建议,谨此一并致谢.

1979年初在广州举行了有14个兄弟院校26名代表参加的审稿会议,与会代表认真阅读了全书,并对全书的结构、选材和细节等方面提出了十分中肯的意见和建议,在此基础上我们又对全

书作了修改．利用这个机会，我们向主审单位北京大学以及参加审稿会议的其它兄弟院校同志表示衷心的感谢．

由于水平所限，编写工作又较匆促，因此一定存在不少缺点和错误，欢迎读者批评、指正．

编者

1979年1月

第一章　事件与概率

§1. 随机现象与统计规律性

一、随机现象

概率论是研究随机现象的数量规律的数学分支．为了说明什么是随机现象，让我们先来看一个例子．设某车间有二百台车床，由于经常需要检修、测量、调换刀具、变换位置等种种原因，因此，即使在生产期间，各台车床还是时常需要停车．若每台车床有百分之六十的时间在开动，而每台车床开动时需要耗电 1 千瓦，问应供给这个车间多少电力才能保证此车间正常生产？

类似的例子在许多实际问题中出现，解决这类问题当然具有重大意义．

显然，若供给这个车间 200 千瓦的电能则此车间便能正常生产．但这样做不合算，因为每台车床的开工率只有 60%，也就是说，平均起来这个车间中同时在工作的车床只有 120 台，供给它们 200 千瓦的电能太多．供给 120 千瓦的电能行吗？这又太少些，因为有时工作的车床数会超过 120 台，若只供给 120 千瓦，则这时会出现因电力不足而使车床无法正常运转，那么到底供给多少电才能既保证生产正常进行而又节约电力呢？

用概率论的方法能给这个问题以完满的解决，现在我们仅把结果列出，详细的解法以后再讲．计算表明，只要供给这个车间 141 千瓦的电就够了，虽然在这时也可能碰到因电力不足而不能正常生产的情况．但这种机会很少，它小于 0.1%，即在 8 小时工

作中一般只有半分钟会碰到这种情况，这显然影响不大．但节约出来的 59 千瓦电能却能用来做许多别的用途．

解决这个问题的关键在于要计算出某时刻同时工作着的车床数，但是由于某台车床在某时刻是否开工很难预先确定，这受到许多偶然因素的影响，即工作着的车床数是一个受许多偶然因素影响的量，对于这种量，在概率论以外的数学分支中还没有得到研究．

原来，在自然界和人类社会中存在着两类不同的现象．

当我们多次观察自然现象和社会现象后，会发现许多事情在一定的条件下必然会发生．例如在没有外力作用的条件下，作等速直线运动的物体必然继续作等速直线运动．又如在标准大气压下，水加热到 100°C 时必然会沸腾等等．这种在一定条件下，必然会发生的事情称为**必然事件**．反之，那种在一定条件下，必然不会发生的事情就称为**不可能事件**．例如在不受外力作用的条件下，作等速直线运动的物体改变其等速直线运动状态是不可能的．

从所举例子中看出，必然事件和不可能事件，虽然形式相反，但是两者的实质是相同的．必然事件的反面就是不可能事件，而不可能事件的反面就是必然事件．

所有这种现象我们称之为**决定性现象**，它广泛地存在于自然现象和社会现象中，概率论以外的数学分支研究的是决定性现象的数量规律．

但是在自然现象和社会现象中也还广泛存在着与决定性现象有着本质区别的另一类现象，上述车间供电问题就是一例．

类似的例子还可以举出很多，例如用同一仪器多次测量同一物体的重量，所得结果彼此总是略有差异，这是由于诸如测量仪器受大气影响，观察者生理上或心理上的变化等等偶然因素引起的．同样地，同一门炮向同一目标发射多发同种炮弹，弹落点也不

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

一样，因为炮弹制造时种种偶然因素对炮弹质量有影响，此外，炮筒位置的误差，天气条件的微小变化等等都影响弹落点. 再如从某生产线上用同一种工艺生产出来的灯泡的寿命也有差异等等. 总之所举这些现象的一个共同的特点是：在基本条件不变的情况下，一系列试验或观察会得到不同的结果. 换句话说，就个别的试验或观察而言，它会时而出现这种结果，时而出现那种结果，呈现出一种偶然性. 这种现象称为**随机现象**. 对于随机现象通常关心的是在试验或观察中某个结果是否出现，这些结果称为**随机事件**，简称**事件**. 例如过马路交叉口时可能遇上各种颜色的交通指挥灯，这是一个随机现象，而"遇到红灯"则是一个随机事件. 以后我们用 $A, B, C, \cdots\cdots$ 等大写拉丁字母表示随机事件.

二、频率稳定性

正如恩格斯所指出的："在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律."（恩格斯：《路德维希·费尔巴哈和德国古典哲学的终结》，人民出版社，1972 年，第 38 页）.

人们经过长期的实践发现，虽然个别随机事件在某次试验或观察中可以出现也可以不出现，但在大量试验中它却呈现出明显的规律性——频率稳定性.

对于随机事件 A，若在 N 次试验中出现了 n 次，则称

$$F_N(A)=\frac{n}{N}$$

为随机事件在 N 次试验中出现的**频率**.

在掷一枚硬币时，既可能出现正面，也可能出现反面，预先作出确定的判断是不可能的，但是假如硬币均匀，直观上出现正面与出现反面的机会应该相等，即在大量试验中出现正面的频率，应接近于 50%，为了验证这点，历史上曾有不少人做过这个试验，其结

果如下①:

实验者	掷硬币次数	出现正面次数	频率
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

又如,在英语中某些字母出现的频率远远高于另外一些字母.在进行了更深入的研究之后,人们还发现各个字母被使用的频率相当稳定.例如,下面就是英文字母使用频率的一份统计表②.其他各种文字也都有着类似的规律.

字母	空格	E	T	O	A	N	I	R	S
频率	0.2	0.105	0.072	0.0654	0.063	0.059	0.055	0.054	0.052
字母	H	D	L	C	F	U	M	P	Y
频率	0.047	0.035	0.029	0.023	0.0225	0.0225	0.021	0.0175	0.012
字母	W	G	B	V	K	X	J	Q	Z
频率	0.012	0.011	0.0105	0.008	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001

字母使用频率的研究,对于打字机键盘的设计(在方便的地方安排使用频率较高的字母键)、印刷铅字的铸造(使用频率高的应铸得多些)、信息的编码(常用字母用较短的码)、密码的破译等等方面都是十分有用的.

另一个验证频率稳定性的著名试验是由英国生物统计学家高尔顿(Galton)设计的.它的试验模型如图1所示.

自上端放入一小球,任其自由下落,在下落过程中当小球碰到

① 引自格涅坚科《概率论教程》,高等教育出版社,第44页.

② 引自L. Brillouin, science and Information Theory, New York, 1956.

钉子时，从左边落下与从右边落下的机会相等. 碰到下一排钉子时又是如此. 最后落入底板中的某一格子. 因此，任意放入一球，则此球落入那一个格子，预先难以确定. 但是实验证明，如放入大量小球，则其最后所呈现的曲线，几乎总是一样的. 也就是说，小球落入各个格子的频率十分稳定. 这个试验模型称为**高尔顿板**. 这个试验中呈现出来的规律性，在学习第五章极限定理之后，就会有更深刻的理解.

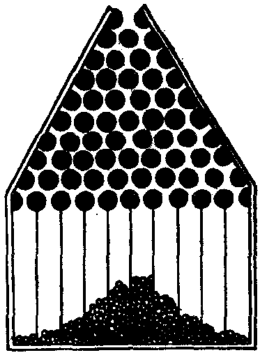


图 1　高尔顿板

同样，如果多次测量同一物体，其结果虽略有差异，但当测量次数增加时，就会越来越清楚地呈现出一些规律性：测量值的平均值在某固定常数附近波动，诸测量值在此常数两旁的分布呈现某种对称性. 又如在射击的例子中，当射击次数不多时，炮弹的弹落点似乎是前后左右杂乱无章，看不出什么明显的规律；但当射击次数增加时，弹落点的分布就会呈现出一定的规律性：如弹落点关于目标的分布略呈对称性，偏离目标远的弹落点比偏离目标近的弹落点少等等. 其他如灯泡寿命等，在进行多次观察或试验后，也都可以发现类似的规律性.

上述种种事实表明，随机现象有其偶然性的一面，也有其必然性的一面. 这种必然性表现为大量试验中随机事件出现的频率的稳定性，即一个随机事件出现的频率常在某个固定的常数附近摆动，这种规律性我们称之为**统计规律性**. 频率的稳定性说明随机事件发生的可能性大小是随机事件本身固有的、不随人们意志而改变的一种客观属性，因此可以对它进行度量.

对于一个随机事件 A，用一个数 $P(A)$ 来表示该事件发生的可能性大小，这个数 $P(A)$ 就称为随机事件 A 的**概率**. 因此概率度量

了随机事件发生的可能性的大小.

对于随机现象,光讨论它可能出现什么结果,价值不大,而指出各种结果出现的可能性的大小则具有很大意义. 有了概率的概念就使我们能对随机现象进行定量研究,由此建立了一个新的数学分支——概率论.

三、频率与概率

既然概率 $P(A)$度量了随机事件 A 发生的可能性大小,可以预料,在N次重复试验中,若 $P(A)$较大,则频率 $F_N(A)=\dfrac{n}{N}$ 也较大. 反之若 $P(A)$很小,则 $F_N(A)$也很小,而且概率 $P(A)$应与频率有许多相似的性质. 以下我们先对频率的性质进行一番考察.

首先频率具有非负性

$$F_N(A)\geqslant 0 \tag{1}$$

其次,对于必然发生的事件,在N次试验中应出现N次. 若以 Ω 记必然事件,则应有

$$F_N(\Omega)=1 \tag{2}$$

还有,若 A 及 B 是两个不会同时发生的随机事件,以 $A+B$ 表示 A 或 B 至少出现其一这个事件,则应有

$$F_N(A+B)=F_N(A)+F_N(B) \tag{3}$$

这个性质称为**频率的可加性**.

当然还可以列出频率的许多性质,但上述三个性质是最基本的. 例如,"不可能事件在N次试验中出现的频率为 0","任何随机事件在N次试验中出现的频率不大于 1","对于有限个两两不会同时发生的随机事件也有频率可加性",这些性质都可以由(1),(2),(3)推出.

最后,根据上述频率稳定性的讨论似乎可以提出这样的猜想,即当N足够大时 $F_N(A)$ 与 $P(A)$ 应充分接近. 这一点有很大的启

发性，在历史上它一直是概率论研究的一个重大课题. 以后我们将会看到，在很一般的条件下，这个结论的确成立，但同时还须对问题的提法进一步明确化.

频率与概率的上述关系有时还提供了求某事件概率的一种手段，即当N足够大时，用它的频率来作为概率的近似值. 以后我们将会看到，这种做法大有好处.

四、概率论简史

概率论是一门研究随机现象数量规律的学科. 早在十七世纪中叶便开始了对随机现象的研究，在这些研究中建立了概率论的一些基本概念如事件，概率，随机变量，数学期望等. 当时研究的模型较简单，就是现在通称的古典概型.

其后，随着生产实践的发展，特别是在射击理论、人寿保险、测量误差等工作中提出的一些概率问题，促使人们在概率论的极限定理方面进行深入研究. 起初主要对贝努里(Bernoulli)试验概型进行，其后则推广到更为一般的场合. 极限定理的研究在十八世纪和十九世纪整整200年中成了概率论研究的中心课题. 在本世纪初，由于新的更有力的数学方法的引入，这些问题得到了较好解决.

虽然概率论历史悠久，但是它的严格的数学基础的建立以及理论研究和实际应用的极大发展却主要是本世纪的事情.

由于物理学(如统计物理)、生物学以及工程技术（如自动电话、无线电技术)发展的推动，概率论得到了飞速的发展. 理论课题不断扩大与深入，概率论的思想渗入各个学科成了近代科学发展明显的特征之一.

由于各个数学分支的发展与互相渗透，概率论的严格的数学基础被建立起来，古典问题得到了解决，新的概念和工具不断出现，概率论成了数学的一个活跃分支.

概率论大大地扩大了它的应用范围. 特别在最近几十年中, 概率论的方法被引入各个工程技术学科和社会学科. 目前, 概率论在近代物理, 无线电与自动控制, 工厂产品的质量控制, 农业试验, 公用事业等等方面都找到了重要应用, 这些实际需要也有力地推动了概率论的新发展, 有些还形成了边缘学科(如信息论、排队论).

在这个时期内, 由于生物学和农业试验的推动, 数理统计学也获得了很大发展, 它以概率论为理论基础又为概率论应用提供了有力的工具, 两者互相推动, 迅速发展. 而概率论本身的研究则转入以随机过程为中心课题, 取得了许多理论上和应用上都有重要价值的结果.

§2. 样本空间与事件

一、样本空间

从本节开始, 我们将逐步引进概率论的基本概念. 样本空间与事件是最基本的两个概念.

对随机现象的研究必然要联系到对客观的事物进行"观察"或"试验". 我们假定, 这种"观察"与"试验"可以在相同条件下重复进行.

我们感兴趣的是试验的结果. 例如掷一次硬币, 我们关心的是出现正面或出现反面, 这是两个可能出现的结果. 假如我们考察的是掷二次硬币的试验, 则可能出现的结果有(正, 正), (正, 反), (反, 正), (反, 反)四种; 如果掷三次硬币, 则结果还要复杂, 但还是可以把它们描述出来. 总之, 为了研究随机试验, 首先需要知道这个试验可能出现的结果, 这些结果称为**样本点**, 一般用ω表示, 样本点全体构成**样本空间**, 用Ω表示. 在具体问题中, 给定样本空间是描述随机现象的第一步.

试读结束: 需要全本请在线购买: www.ertongbook.com