

信号·电路·系统资料汇编

——非线性电路与系统——

高等学校工科电工教材编审委员会

电路理论及信号分析编审小组 编

江 泽 佳 选 编

高等教育出版社

内 容 简 介

本汇编由原教育部高等学校工科电工教材编审委员会电路理论及信号分析小组编，江泽佳选编。主要内容包括：非线性网络理论综述；网络元件和网络方程；非线性网络和系统的稳定性；平面非线性系统；几个电路中常见的例子；介绍一些非线性理论中较新的内容(如分歧)；一种解非线性电阻网络新颖易懂的方法——应用分段线性分析和单形剖分求解非线性电阻网络。

本辑内容分四部分，它们分别选自 A. N. Willson, Jr. 主编的《非线性网络：理论与分析》；T. E. Stern 著《非线性网络与系统理论导论》；D. K. Arrowsmith 和 C. M. Place 著《常微分方程——定性分析与应用》，1977 年出版的一本 IEEE。

本书可供无线电、自动化、电力等专业大学生、研究生、教师以及研究人员和技术人员参考。

信号·电路·系统资料汇编

——非线性电路与系统——

高等学校工科电工教材编审委员会
电路理论及信号分析编审小组 编

江泽佳 选编

III

高等教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

上海市印刷三厂印装

开本 787×1092 1/16 印张 15.75 字数 360,000

1988 年 12 月第 1 版 1989 年 4 月第 1 次印刷

印数 0,0001—2,446

ISBN7-04-001126-3/TM·23

定价 4.50 元

目 录

第 I 部分: ALAN N. WILLSON, JR. 《非线性网络: 理论与分析》

| | | | |
|------------------------------------|----|-----------------------------------|----|
| 第 I-1 章 序言 | 1 | I-2.3.7 “至少一个”解的存在 | 26 |
| 第 I-2 章 非线性网络理论综述 | 8 | I-2.3.8 晶体管网络的动态方程及其数值解 | 27 |
| I-2.1 引言 | 8 | I-2.4 包含多端元件的网络 | 31 |
| I-2.2 由二端元件构成的网络 | 9 | I-2.4.1 包含受控源的网络 | 31 |
| I-2.2.1 电阻网络 | 10 | I-2.4.2 “类同”元件相互连接网络的 正规形式微分方程 | 31 |
| I-2.2.2 RLC 网络 | 14 | I-2.4.3 R 方程组的解 | 34 |
| I-2.3 晶体管网络 | 18 | I-2.4.4 方程 $f(x)=y$ 的解 | 35 |
| I-2.3.1 直流晶体管模型 | 18 | I-2.5 结束语 | 37 |
| I-2.3.2 晶体管网络的直流方程 | 19 | I-2.6 致谢 | 37 |
| I-2.3.3 P_0 阵及 \mathcal{N}_0 对 | 21 | 参考文献 | 37 |
| I-2.3.4 解的存在和唯一性 | 22 | 附录 I-A 译者附言 | 41 |
| I-2.3.5 有关连续性、有界及计算方法的成果 | 23 | | |
| I-2.3.6 共基晶体管网络 | 24 | | |

第 II 部分: THOMAS E. STERN, 《非线性网络与系统理论导论》

| | | | |
|---|-----|----------------------------------|-----|
| 第 II-2 章 网络元件和网络方程 | 45 | II-8.1 定义 | 100 |
| II-2.1 网络元件的表征 | 45 | II-8.2 非线性系统的局部稳定性: 李雅普诺夫 第一法 | 103 |
| II-2.1.1 能量问题 | 47 | II-8.3 第一法的应用 | 105 |
| II-2.1.2 增量参数矩阵 | 48 | II-8.3.1 一般自治网络 | 106 |
| II-2.2 互易性 | 52 | II-8.3.2 电阻性网络的稳定性 | 108 |
| II-2.2.1 状态函数 | 53 | II-8.3.3 代数方程的模拟解 | 109 |
| II-2.2.2 勒让德变换 | 59 | II-8.4 李雅普诺夫直接法: 局部稳定性 | 110 |
| II-2.3 函数的反演 | 61 | II-8.5 李雅普诺夫直接法: 全局稳定性 | 116 |
| II-2.4 隐式方程的解 | 65 | II-8.6 全局稳定性判据的应用 | 119 |
| II-2.4.1 压缩映射 | 66 | II-8.6.1 线性时变网络 | 119 |
| II-2.4.2 牛顿-拉夫逊法 | 70 | II-8.6.2 非线性 RC (RL) 自治网络 | 123 |
| II-2.4.3 最速下降法 | 72 | II-8.6.3 非线性 RLC 自治网络 | 126 |
| II-2.4.4 代数方程的模拟解 | 72 | II-8.6.4 代数方程的模拟解 | 137 |
| II-2.5 网络拓扑(略) | 75 | II-8.7 周期解的稳定性 | 139 |
| II-2.6 回路方程和节点方程(略) | 75 | II-8.8 离散时间系统的稳定性: 迭代计算的收敛性 | 146 |
| II-2.7 范式方程: 状态变量 | 75 | 习题 | 148 |
| II-2.7.1 方程 (L) 、 (C) 、 (R) 的解: 拟线性网络 | 83 | 本章附注 | 151 |
| II-2.7.2 方程 (L) 、 (C) 、 (R) 的解: 一般网络 | 84 | 参考文献 | 158 |
| II-2.8 对偶性(略) | 88 | 附录 II-C.2 第 II-2 章定理的证明 | 160 |
| II-2.9 互易网络的拉格朗日表示法 | 88 | 附录 II-C.8 第 II-8 章定理的证明 | 165 |
| 习题 | 94 | | |
| 参考文献 | 98 | | |
| 第 II-8 章 非线性网络和系统的稳定性 | 100 | | |

第 III 部分: D. K. ARROWSMITH, C. M. PLACE, 《常微分方程——定性分析与应用》

| | | | |
|-------------------------------------|-----|---------------------------------|-----|
| 第 III-3 章 平面非线性系统 | 170 | III-4.5 分段模型 | 199 |
| III-3.1 局部性质和全局性质 | 170 | III-4.5.1 跳跃假定和分段模型 | 199 |
| III-3.2 不动点处的线性化 | 172 | III-4.5.2 分段线性方程的极限环 | 201 |
| III-3.3 线性化定理 | 174 | 习题 | 203 |
| III-3.4 非简单不动点 | 178 | 第 III-5 章 高等方法及其应用 | 206 |
| III-3.5 不动点的稳定性 | 179 | III-5.1 Liénard 方程 | 206 |
| III-3.6 寻常点和全局性质 | 181 | III-5.2 正则化和和一些经济模型(略) | 209 |
| III-3.6.1 寻常点 | 181 | III-5.3 心搏和神经脉冲的 Zeeman | |
| III-3.6.2 全局相图 | 182 | 模型(略) | 209 |
| III-3.7 初积分 | 183 | III-5.4 李雅普诺夫函数 | 209 |
| III-3.8 极限环 | 187 | III-5.4.1 理论 | 209 |
| III-3.9 Poincaré-Bendixson 理论 | 189 | III-5.4.2 动物冲突的模型 | 213 |
| 习题 | 191 | III-5.5 系统的分歧 | 216 |
| 第 III-4 章 应用 | 195 | III-5.5.1 一些简单的例子 | 216 |
| III-4.1 线性模型(略) | 195 | III-5.5.2 Hopf 分歧 | 217 |
| III-4.2 仿射模型(略) | 195 | III-5.5.3 Hopf 分歧理论的应用 | 219 |
| III-4.3 非线性模型(略) | 195 | III-5.6 瘤生长的数学模型(略) | 221 |
| III-4.4 弛张振荡 | 195 | 习题 | 221 |
| III-4.4.1 Vander Pol 振荡器 | 195 | 习题提示 | 223 |
| III-4.4.2 跳跃和正则化 | 197 | | |

第 IV 部分: MING-JEH CHIEN AND ERNEST S. KUH,

《应用分段线性分析和单形剖分求解非线性电阻网络》

| | | | |
|----------------------|-----|-------------------|-----|
| 附录 IV-A | 242 | 参考文献 | 245 |
| 附录 IV-B | 243 | | |

第 I 部分: ALAN N. WILLSON, JR.

《非线性网络: 理论与分析》

第 I-1 章^① 序言

本书向读者提供一系列论述非线性网络方程理论的论文。该理论主要论及下列各方面之间的关系: 1) 非线性网络方程的性质, 2) 描述网络元件特性的器件模型(即等效电路)的性质以及元件间的连接关系。对于方程的性质一词, 我们指诸如: 方程的结构, 该方程是否有解的问题, 该解是否为唯一解的问题, 解的连续性与有界性问题, 以及当所讨论的是微分方程时, 若干牵涉到网络稳定性问题的解的性质。网络方程的这些性质均与整个网络的性质密切相关。例如, 若网络表现为双稳态记忆元件, 则描述该电路直流性能的方程必然具有一个以上的解。

对于器件模型的性质一词, 我们所指的是描述电路元件特性的数学关系的性质。例如, 对于非线性电阻, 这些性质包括电阻上 $v-i$ 曲线的连续性, 曲线的单调或非单调性, 该曲线对于大电压或电流值是否趋于饱和等等。其他一些如元件是否为无源等物理性质也考虑在内。

由于这一理论系由电路元件的本质及其拓扑结构取得, 故所讨论的是对电路性质的若干方面求得深入了解的一种方法的进展。论述的方式是对电路方程进行分析研究。同时将论及网络方程的某些其他性质, 这些性质对于在数字计算机的辅助下求解网络方程是重要的。

概言之, 本书是按照书中第一篇论文“非线性网络理论综述”的方式组织的, 该文综述了书中其余论文的内容。这些论文虽然略有重复, 但基本上可分为三种类型。紧跟第一篇综述论文之后的八篇论文主要是论述二端元件网络的, 即由非线性电阻、电感、电容及独立电源构成的网络。其后九篇论文是论及既包含上述二端元件又包含晶体管的网络的。最后五篇论文则涉及包含较一般形式的多端元件的非线性网络的研究。

为了有助于理解本书所论述的内容, 我们在这里就综述论文中的某些定理, 简短地讨论几个非线性电路的例子。

从图 I-1.1 所示的网络开始讨论。

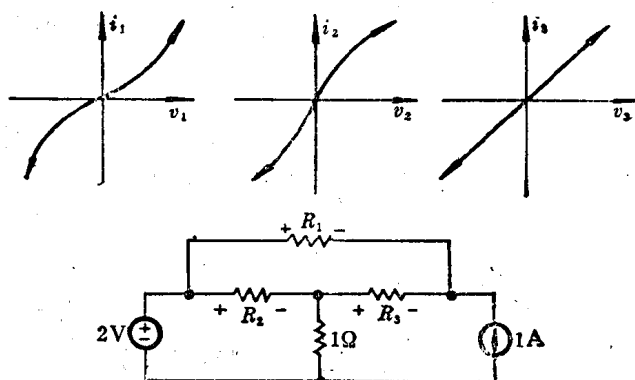


图 I-1.1 具有唯一解的非线性网络例图

^① 由于本辑《汇编》是选自国外教材与论文中的不同章节, 因此在原章节号、图号与公式号等前都加一罗马字编号, 例: 式 (I-1.2) 中的 I 代表第 I 部分, 1 代表第一章, 2 代表第二个公式。—— 编辑者注

此例为应用定理 I-2.1, I-2.2 和 I-2.3 的适当的简例。该电路由非线性电阻及独立电源构成。其中每一电阻均为严格单调增长满射（即将 $v-i$ 平面上的一个轴全部映射到另一个轴上）。

已知任何此类电路均有唯一解，所谓唯一解即唯一的一组支路电压和支路电流值。它们同时满足两种制约关系，即基尔霍夫电压和电流定律所规定的拓扑制约以及各支路中元件性质所规定的“欧姆定律”制约关系。熟知的由正值线性电阻和独立电源构成的电路具有唯一解为以上情况的一个特例。

若在一个二端元件电阻电路中，有一个电阻的 $v-i$ 特性不是严格单调增长的，则该电路很可能有若干个解。例如，对于任何给定的 $R > 0$ 值，图 I-1.2 所示电路在不同的电压源 E 的条件下，可能有一个、两个或三个解。

若非线性电阻的 $v-i$ 特性是饱和的，则该电路方程可能无解。图 I-1.3 所示电路为此种情况的一个简例，当独立电流源的电流值 i 比 I_0 更负时，该电路无解。

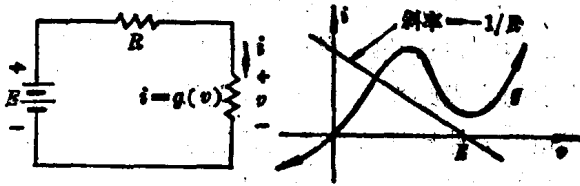


图 I-1.2 可能有一个以上解的非线性网络例图

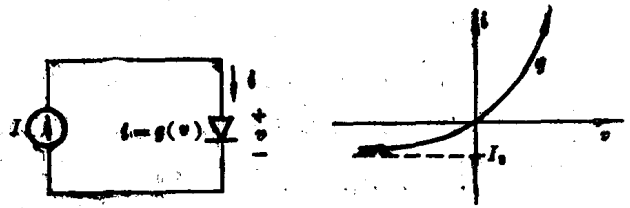


图 I-1.3 可能无解的非线性网络例图

与图 I-1.3 所示电路的特性相反，有许多电路即使其中电阻的 $v-i$ 特性饱和，仍对所有的独立电源值具有唯一解。例如，假设图 I-1.4 所示电路中，电阻 R_1, R_2 和 R_3 为电流控制而 R_4 和 R_5

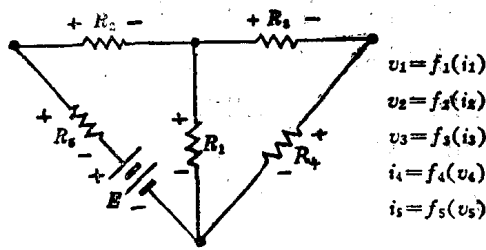


图 I-1.4 具有唯一解的网络例图

为电压控制。并假设每一电阻均由连续单调增长函数 $f_k, k=1, \dots, 5$ 表征，它们对于大的正值或负值控制变量均可以饱和。例如，可认为 $v_1 = \tanh(i_1)$ 。根据定理 I-2.4，显然此电路有唯一解。因为很明显，此网络图形具有定理 I-2.4 所要求的由支路 1, 2, 3 所构成的一棵树，故由定理 I-2.4 立刻可以得到上述结论。

当然，我们可以就图 I-1.4 所示的一类电路，写出若干不同的非线性方程组。例如，根据上一段所取定的树，可以写出基本割集方程如下，

$$i_1 + f_4(v_4) + f_5(v_5) = 0$$

$$i_2 + f_5(v_5) = 0$$

$$i_3 - f_4(v_4) = 0$$

然后，根据图 I-1.4 所规定的欧姆定律关系，得到

$$v_1 = f_1[-f_4(v_4) - f_5(v_5)]$$

$$v_2 = f_2[-f_5(v_5)]$$

$$v_3 = f_3[f_4(v_4)]$$

最后,可以树支电压表示连支电压 v_4, v_5 如下

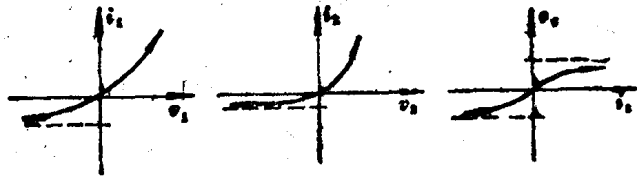
$$\begin{aligned} v_4 &= v_1 - v_3 \\ v_5 &= v_1 + v_2 - E \end{aligned}$$

由此可得下列以三个变量 v_1, v_2, v_3 表示的三个非线性方程:

$$\begin{aligned} v_1 &= f_1[-f_4(v_1 - v_3) - f_5(v_1 + v_2 - E)] \\ v_2 &= f_2[-f_5(v_1 + v_2 - E)] \\ v_3 &= f_3[f_4(v_1 - v_3)] \end{aligned} \quad (I-1.1)$$

可利用迭代法(如牛顿法)求解以上方程,得 v_1, v_2, v_3 . 而后,只要将 v_1, v_2 及 v_3 的值代入前面各关系式,即可求得其余各支路变量值. 值得注意的一点是,根据定理 I-2.4,不论方程中出现哪一个连续单调增长函数 f_n ,也不论独立电压源电压 E 为何值,方程(I-1.1)均保证有唯一解. 如果仅仅给定一组以变量 v_1, v_2, v_3 表示的非线性方程,那么一般来说,确定其是否存在唯一解将是一个相当不简单的问题.

很容易找到不能用定理 I-2.4 的(充分)拓扑标准确定存在唯一解的例子,例如图 I-1.5 所示电路. 由于此电路中仅有一个电流控制电阻,且由于其图形的任意一棵树都得有两根树支,故不能直接由定理 I-2.4 证明此电路有单值解. 然而,根据定理 I-2.5 对电路方程



$$\begin{bmatrix} f_1(v_1) \\ f_2(v_2) \\ f_3(i_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ I \\ 0 \end{bmatrix}$$



图 I-1.5 具有唯一解的非线性网络例图

分析后可以确定,对于任何给定的独立电流源电流值 I ,此电路确实有唯一解.此外,也可以应用定理 I-2.6,直接由此简单电路的拓扑结构导出存在唯一解的结构.

对于其中某些电阻特性为非单调的(例如隧道二极管的特性)非线性电阻网络,可用与上述相似的方法确定其是否存在至少一个解的问题.定理 I-2.7 和 I-2.8 是解决此类问题的.

图 I-1.6 所示电路中, L_2, C_3 及 R_4 为正值线性元件. L_1 及 R_5 为以下列关系表示的非线性元件:

$$\begin{aligned} i_1 &= \tanh(\varphi_1) \\ v_5 &= \exp(3i_5) \end{aligned}$$

此电路为非线性 RLC 网络的一例.对于此类电路,通常要求写出描述电路性能的正规形式微分方程组(状态方程组).定理 I-2.9, I-2.10 和 I-2.11 是关于确定何时及如何做到这一点以及相关问题的.对于我们的电路图(I-1.6),恰巧很容易写出正规形式方程如下:

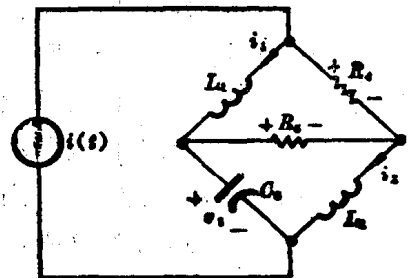


图 I-1.6 非线性 RLC 网络例图

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = [i(t) - \tanh(\varphi_1)]R_4 - \exp\{3[\tanh(\varphi_1) + i_2 - i(t)]\}$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{1}{L_2} v_3 - \frac{1}{L_2} \exp\{3[\tanh(\varphi_1) + i_2 - i(t)]\}$$

$$\frac{dv_3}{dt} = \frac{1}{C_3} i(t) - \frac{1}{C_3} i_2$$

对于这一类结构的电路，可以直接由观察写出正规形式微分方程组。对于其结构并非如此简单的电路，就需要一套系统的列写程序。事实上，我们发现，这一程序的中心要点仍然是求解非线性代数方程的问题。例如，对于图 I-1.7(a) 所示电路，当有可能解得如图 I-1.7(b) 所示直流电路的变量 v_L 和 i_C 时，才能写出该电路的正规形式微分方程组。而这又是由求解非线性方程

$$v_s(t) = [f(v) + i_L]R + v + v_c \quad (I-1.2)$$

中作为 v , i_L 和 v_c 的函数的 v 而完成的。一旦求得 v 以后，就能立刻求得 $i_C = f(v)$ 和 $v_L = v + v_c$ 。方程 (I-1.2) 可改写为

$$Rf(v) + v = v_s - Ri_L - v_c$$

设 $f(v)$ 由图 I-1.7(c) 所示曲线表征，则当且仅当 $0 \leq R \leq 1$ 时，此方程才对任何给定的 v_s , i_L 和 v_c 有唯一解。以略为不同的观点来看，可认为此时且仅在此时，映射 $Rf(v) + v$ 才具有反映射（满射）。我们以 g 表示此反映射；则 $v = g(v_s - Ri_L - v_c)$ 。所得正规形式微分方程如下：

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} [v_c + g(v_s - Ri_L - v_c)]$$

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{c} f[g(v_s - Ri_L - v_c)]$$

无论怎样求得此电路的正规形式微分方程组，我们总会碰到前述对电阻 R 的允许数值范围所加的限制，并且必须处理这个问题。

除了为非线性网络列写正规形式微分方程组时，求解非线性代数方程是一个关键因素之外，为了求解微分方程组，我们至少要在另外两方面研究电阻网络的非线性代数方程的理论。首先，一般必须求解这些非线性代数方程，以求得微分方程组的初始条件。其次，当应用流行的隐式数值积分算法时，也必须求解这种类型的非线性代数方程。

对于包含晶体管的电路，即使电路的非线性特性均为严格单调增长函数，一般也不能象对于非线性电阻网络一样，仅用对电路的拓扑分析来确定其是否存在唯一解，而必须考虑元件特性中参数的实际数值。近来已经形成了一套有关晶体管网络方程性质的相当广博的理论，其中的主要

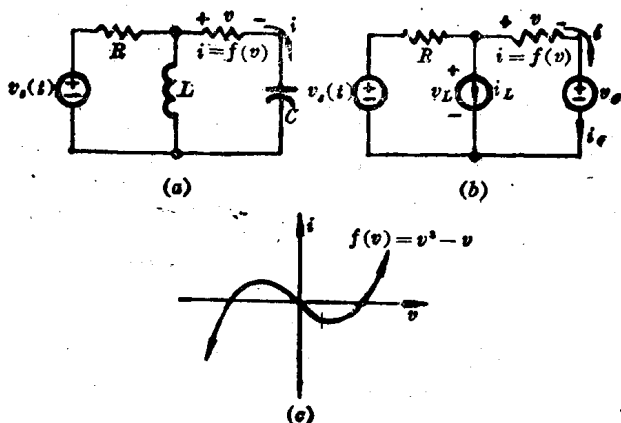


图 I-1.7 非线性 RLC 网络例图以及相关的在分析中需要求解的电阻网络

成果包括在定理 I-2.12 至定理 I-2.26 之中。下面是应用其中成果之一的例子。

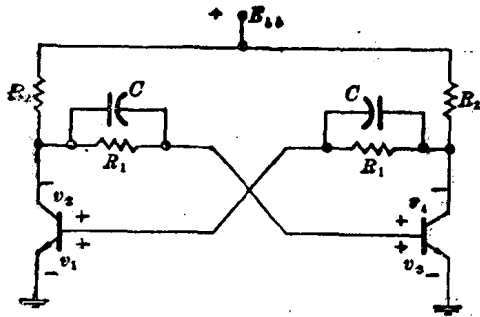


图 I-1.8 可具有一个以上平衡点的非线性晶体管网络例图

图 I-1.8 所示是熟知的在选定适当的元件值后可成为双稳态触发器的电路。虽然出现双稳态现象的关键原因在于晶体管是非线性元件，但在许多常用的对此电路的分析中，往往有一种掩盖这一事实的趋势。这些分析先为每一晶体管从各种比较粗糙的线性模型中选择一种特性，然后在不同的一对对特性之间转换以利于进行分析（电路的非线性特性自然就被交换过程所代替了）。

由于很容易获得有用的结果，故采用这种缺乏严格性的分析也被认为有道理了。然而认真的分析者对于这整个分析过程的确切性总有一点难以接受。更严格的评论是，用这种形式的分析不能确定当采用更精确的晶体管模型之后，所得结果会不会不同（例如，这种分析中晶体管的反向电流增益 α_r 往往被完全忽略）。再者，人们不能从这种相当特殊的分析中，取得能以分析各种各样的电路的明确的程序。

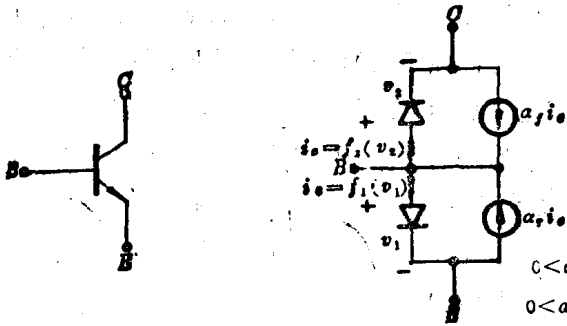


图 I-1.9 简单大信号直流晶体管模型

用图 I-1.9 所示简单大信号直流晶体管模型代替图 I-1.8 电路中的晶体管之后，可以很容易地用本书所述结果对这一例电路进行分析。这种分析既相当简单又相当一般，可用于任何晶体管电路。我们由前述对电路的观察开始，即若给定电路有任何可能具有两个稳定平衡点（即为双稳态电路）则取消图 I-1.8 电路中的电容器后所取得的直流电路

必须有一个以上的解^①。此电路的直流方程很容易写成下式：

$$TF(\mathbf{v}) + G\mathbf{v} = \mathbf{c} \quad (\text{I-1.3})$$

其中 \mathbf{v} 为一矢量，其元素为图 I-1.8 所示 4 个基—发及基—集电压，而 $F(\mathbf{v})$ 则由下式定义的非线性映射

$$F(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} f_1(v_1) \\ f_2(v_2) \\ f_3(v_3) \\ f_4(v_4) \end{bmatrix}$$

其中各元素 f_i 为描述晶体管模型中二极管非线性 $v-i$ 特性的函数。函数 f_1 为连续严格单调增长。4×4 实矩阵 T 和 G 的形式为

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & O \\ O & T_1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} G_a & G_b \\ G_c & G_c \end{bmatrix}$$

① 在选定电路元件使此电路为双稳态后，该电路的直流方程有三个解，其中二者为稳定平衡点。

其中 2×2 矩阵 T_1 , G_a 和 G_b 为

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & -a_r \\ -a_f & 1 \end{bmatrix} \quad G_a = \begin{bmatrix} 2G_1 + G_2 & -(G_1 + G_2) \\ -(G_1 + G_2) & (G_1 + G_2) \end{bmatrix}$$

$$G_b = \begin{bmatrix} -2G_1 & G_1 \\ G_1 & 0 \end{bmatrix}$$

(当然, 其中的 $G_1 = 1/R_1$, 而 $G_2 = 1/R_2$), 而矢量 c 则为:

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} G_2 E_{44}$$

根据定理 I-2.14, 欲使式 (I-1.3) 有一个以上的解, 矩阵 $T^{-1}G$ 必须至少有一个负主子式。我们可得

$$T^{-1}G = \left[\begin{array}{c|c} T_1^{-1}G_a & T_1^{-1}G_b \\ \hline T_1^{-1}G_b & T_1^{-1}G_c \end{array} \right]$$

且由于此矩阵的特殊结构, 我们能够用少量的代数运算, 来决定在什么情况下主子式会有负值。(此特殊结构来自电路拓扑的对称性及假设用了一对特性相同的晶体管。因此它并不是关键性的分析要求, 而只不过使必须的代数运算大大简化。)实际上, 除了消去 $T^{-1}G$ 中的第一、三行列后所得的 2×2 主子式之外, 对于所有处于 $(0, 1)$ 区间内的 a_r, a_f 和所有的 $G_1 \geq 0, G_2 \geq 0$, 很容易判定其他主子式均为非负^①。而欲使这一主子式为负的, 其充分必要条件为

$$\det \begin{bmatrix} (1-a_f)(G_1+G_2) & a_f G_1 \\ a_f G_1 & (1-a_r)(G_1+G_2) \end{bmatrix}$$

$$= (1-a_f)^2(G_1+G_2)^2 - a_f^2 G_1^2 < 0$$

显然这与下列不等式等效

$$\frac{a_f}{1-a_r} > 1 + \frac{R_1}{R_2} \quad (\text{I-1.4})$$

因此, 欲使图 I-1.8 电路有一个以上的平衡点, 就必须按不等式 (I-1.4) 的要求选择参数值。实际上, 此要求即通常用以前讲到的那种分析方法求得的双稳态的准则: $R_1 < (\beta-1)R_2$ 。

对于若干特殊类型的电路, 用我们的理论, 仅根据电路的拓扑结构就可以确定其不可能出现双稳态。例如根据定理 I-2.20, 任何单晶体管电路均不可能为双稳态。另一例如图 I-1.10 所示, 在“综述”一文中对之进行了较详细的讨论, 即既不用写出任何方程, 也不用指定其中的任何

① 为便于说明此 4×4 主子式必然非负, 可用等式

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array} \right] = \det(A+B) \cdot \det(A-B)$$

其中 A 和 B 均为方阵。由于 $T^{-1}G$ 的特殊结构, 仅需验算 4 个 3×3 主子式中的两个。很容易验算并证明其非负。显然所有 $\times 1$ 主子式均为非负; 且由 $T^{-1}G$ 的特殊结构, 仅需验算 2×2 主子式中的 4 个。又易于证明其中三个为非负。

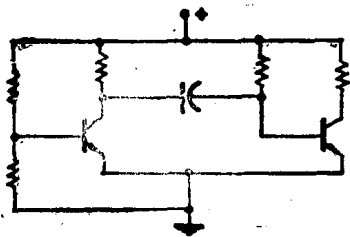


图 I-1.10 其拓扑结构不可能具有一个以上平衡点的非线性晶体管网络例图

参数值就能断定此电路不可能有一个以上的解。

“综述”一文中的定理 I-2.27 至定理 I-2.30 是关于下列一类非常一般的非线性方程的：

$$f(x)=y \quad (I-1.5)$$

其中 f 即由 n 维欧几里得空间中的点 x 至同一空间中的点 y 的映射。这些定理中对非线性映射 f 未作任何强的结构

假设,故均可应用于相当一般的情况。我们现在以图 I-1.4 所示电路的方程组 (I-1.1) 作为应用这些定理之一的一例,不必考虑该电路的拓扑结构就可以得出方程组 (I-1.1) 有唯一解的结论。我们应用定理 I-2.30, 首先将方程改写为

$$\begin{aligned} v_1 - f_1[-f_4(v_1 - v_3) - f_5(v_1 + v_2 - E)] &= 0 \\ v_2 - f_2[-f_5(v_1 + v_2 - E)] &= 0 \\ v_3 - f_3[f_4(v_1 - v_3)] &= 0 \end{aligned}$$

然后, 将方程组左边看成方程 (I-1.5) 中的映射 $f: E^3 \rightarrow E^3$ 。很容易求得此映射的雅可比矩阵如下:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] = \begin{bmatrix} 1 + d_1 d_4 + d_1 d_5 & d_1 d_5 & -d_1 d_4 \\ d_2 d_5 & 1 + d_2 d_5 & 0 \\ -d_3 d_4 & 0 & 1 + d_3 d_4 \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{df_1(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi = -f_4(v_1 - v_3) - f_5(v_1 + v_2 - E)} \\ &\vdots \\ d_5 &= \frac{df_5(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi = v_1 + v_2 - E} \end{aligned}$$

由于假设各个非线性函数 f_1, \dots, f_5 均为单调增长, 很显然, 各个 $d_k, k=1, \dots, 5$ 均为非负。很容易求得所需一系列 $[\partial f / \partial x]$ 的主子式如下:

$$\begin{aligned} \det J_1 &= 1 + d_1 d_4 + d_1 d_5 \\ \det J_2 &= 1 + d_1 d_4 + d_1 d_5 + d_2 d_5 + d_1 d_2 d_4 d_5 \\ \det J_3 &= 1 + d_1 d_4 + d_1 d_5 + d_2 d_5 + d_1 d_2 d_4 d_5 + d_3 d_4 \\ &\quad + d_1 d_3 d_4 d_5 + d_2 d_3 d_4 d_5 \end{aligned}$$

显然, 若选定 $\epsilon=1$, 定理 I-2.30 的假设条件即可得到满足。故我们断定方程 (I-1.1) 有唯一解。

本书中收集的论文的许多内容尚未见诸于教科书中。我们希望这一个集子将对有益于学习这些成果的学生和其他读者以及打算在此领域内进行科研的人们有所帮助。目前我们在这方面的研究的进展显然还是很不完备的。除了新的基本贡献之外, 现有成果也确实还有许多发展和一般化的余地。

第 I-2 章 非线性网络理论综述

摘要: 在网络理论的发展中, 基本注意力均集中于线性系统的领域。这有许多原因, 而其中最重要的可能是: 一旦取消了线性这一假设, 则除了某些特殊情况之外, 很难找到严格定义的理论。近年来, 用以求解非线性网络方程的数值算法的出现(其重要性决不可低估), 更使某些偶尔需要解决网络问题的工程师们感到自满。他们认为, 如果要求解非线性问题, 只要把数据送进计算机就行了。然而, 具有讽刺意味的是, 计算机辅助网络分析也是近来在非线性网络领域中进行理论探讨的基本动力之一, 而且, 虽然还有许多问题尚待解决, 目前, 非线性网络理论已开始形成一个相当广博的学科。

本文对若干非线性网络理论的近期著作进行回顾。与网络分析问题的计算方面不同, 我们评价这样一些著作, 它们的基本目的在于深入理解描述非线性网络特性的方程的本质, 并确定网络元件的某些特性, 元件间的相互连接方式以及它们与方程及其解之间的关系。此外, 也将涉及到计算方法问题, 因为, 正如上述, 本文的目的之一就是为数值分析建立一个更好的理论基础。

I-2.1 引言

本文就非线性网络理论的若干方面进行指导性的论述。重点介绍某些能促进对非线性网络及其数学分析本质的深入理解的著作。除少数例外, 这些著作均发表于最近十年之内。

我们尽量试图为非专门从事网络理论研究的人们写作此文, 故仅要求最低的基础知识, 而且论述过程也是基本上独立的, 文后提供大量参考书目, 作为对有意于作进一步了解的读者的指导。

对“网络”一词, 我们仅指电网络而言。但读者不应忽视这一理论也适用于其他系统。例如, 在工程师们熟悉的许多模拟系统中, 有水力网, 机械系统以及交通流量网等。然而, 也许可以说, 电网络是有必要考虑非线性因素的最显著的例子。不仅仅是经常必须考虑网络中出现的所谓二阶效应, 并且在按照某些规定指标进行网络设计时还常常需要采用(确实是引入)非线性元件。

电网络与其他类型网络模型的另一显著区别是电网络中经常出现“耦合元件”(此术语系指将处于网络中不同支路中的电变量耦合起来的元件——即在仅受基尔霍夫定律拓扑制约的变量上再加上耦合制约)。如果说相对而言在其他类型系统中很少遇到类似于受控源一类元件的话, 在电网络的分析中人们则必须经常处理此类有源不可逆元件的问题。例如, 即使是在对晶体管的最初步的描述中也必须用到受控源。

虽然在近期的文献中, “分布”非线性电系统, 例如含有传输线的网络, 受到某些注意, 我们在此仍仅限于讨论集总电网络。集总网络的性质可用代数或常微分方程表示, 而对分布参数系统进行分析则需要用到更难的非线性偏微分方程或泛函微分方程。

对非线性现象的分析并非科学或数学中的新分支。有过许多古典的非线性系统研究理论。在许多书籍中均能找到许多著名作者, 仅举其一二, 如庞加莱(Poincaré)、李雅普诺夫(Lyapunov)

及范德波 (Van der Pol) 等人的杰出论述。在 [1] 到 [3] 中列出了若干值得参考的论点。虽然这些古典分析方法广泛应用于电网络的分析, 本文的目的却并非对此进行介绍。我们将集中注意力于大部分尚未见诸于书本的近期著作。

显然, 数字计算机的出现对网络分析的本质起了革命性的作用。就定量研究而言, 计算机极大地扩展了工程师们的能力, 使他们有可能取得说明电网络性能的既精确又广泛的信息。同时还发现, 计算机是进行网络设计的有效助手。近来, 在以上两方面均进行了大量的工作。在计算机辅助分析中, 许多近期著作论及扩展计算机的能力, 以便有效地运算很难以取得数值解的描述非线性网络的微分方程。在计算机辅助设计中, 许多文章论及在利用计算机选择非线性网络参数值时优选法的应用和发展。虽然这些著作均很重要, 本文的目的却并非就这些方面对非线性网络的研究进行评价(虽然在若干点上将触及这些领域)。近来, IEEE 杂志中登载了许多论及计算机辅助设计和分析的文献, 这里向读者重点推荐这些文献中的评论性文章 [4] 到 [6]。

在非线性分析及计算机辅助网络分析的许多经典研究中一种常用的方法是, 由系统的数学表达式即一组方程出发, 然后以定量的形式将系统的某些特性与其参数值进行联系(分析地或数值地)。与此相反, 我们将讨论非线性网络中可能更基本的方面。即评价若干其基本目的在于深入理解描述非线性网络特性的方程的本质的论著, 同时介绍确定网络元件的某些特性, 元件间的相互连接方式以及它们与方程及其解之间的关系的一些著作。

I-2.2 由二端元件构成的网络

有一种网络元件分类法是按元件的端子数进行的。根据这种分类法, 最简单的元件为二端元件。这种元件的特性可简单地表示为其两个基本电变量: 元件端口的电压 v 及由元件一端流向另一端的电流 i 之间的关系。对于电阻或独立的电压源及电流源, 此关系为代数方程式^①, 而对于电感或电容则为微分方程式。

最简单的二端电阻的端电压和电流之间的关系可表示为一个变量为另一个变量的单值函数。这也是一种最常见的类型。例如, 隧道二极管就是一种常用这种形式表示的非线性电阻。即其电压与电流间的关系以方程 $i=f(v)$ 表示, 其中函数 f 定义为 $v-i$ 平面上的一条曲线, 如图 I-2.1 所示。特性以此种形式表示的元件称为电压控制元件。电流控制元件有相似的定义。一般, 元件的特性曲线并非必须通过 $v-i$ 平面上的原点。通常, 标志电压控制或电流控制电阻特性的函数 f 的定义域为整个实轴。然而, 有时为方便起见, 将定义域限于实轴的一个适当的子集——此种情况有时会遇到, 例如在齐纳二极管

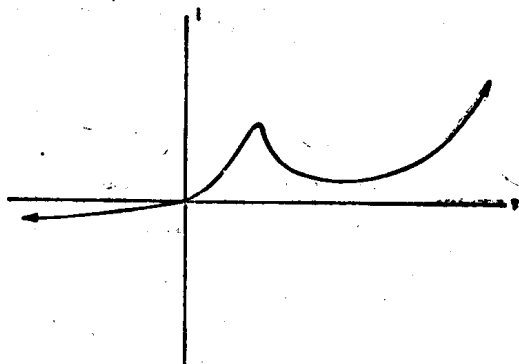


图 I-2.1 齐纳二极管的典型 $v-i$ 曲线

^① 为简明起见, 贯穿此文中, 在某种意义上, 我们没有严格遵守“代数”这一术语的数学定义。我们说某些变量间的关系为“代数的”, 包括这种关系可以是非线性(或超越函数)映射, 但不包括微分或积分变换。

的特性中。

若电阻的任一变量均不能表示为另一变量的单值函数，则需要一种更一般的表达方式。例如，把两个隧道二极管串联起来就能得到一个很特殊的 $v-i$ 曲线。蔡（即蔡少棠）和 Rohrer 在 [7] 中就提出了单圈元件 (unicursal element) 这一名称。单圈电阻是一种二端元件，其特性可用一对参数方程 $v=f_1(\rho)$, $i=f_2(\rho)$ 表示，其中 f_1 和 f_2 为有界变化的连续函数，对于所有落在实轴上某区间内（可为无穷大）的参数值 ρ , f_1 和 f_2 均有定义。

独立电压源是一种端电压为定值而流过它的电流为任意值的二端元件。独立电流源则具有与之类似的定义。某些作者认为将它们看成 $v-i$ 特性曲线平行于 $v-i$ 平面上二轴之一的二端电阻有其方便之处。我们将注意到这种解释，但不正式采纳这种观点。

只要增加一个表示磁链的变量 ϕ 和一个表示电荷的变量 q 就能很方便地用与以上相似的方式表示非线性二端电感和电容的特性。即电感特性可以用 ϕ 和 i 二个变量之间的代数关系——可认为是 $\phi-i$ 平面上的一条曲线——来表示，附加一个关系式 $v=d\phi/dt$ 。相似地，电容特性可以用 q 和 v 二个变量之间的代数关系表示，附加一个关系式 $i=dq/dt$ 。

理论上，在变量 v, i, ϕ 及 q 之间可能存在进一步的相似类型的关系。例如，可以认为存在一种二端元件，其特性可用变量 q 与 ϕ 之间的代数关系表示，附加两个关系式 $i=dq/dt$ 和 $v=d\phi/dt$ 。蔡最近曾研究过这种二端元件的性质并将其命名为记忆器 (memristor) [8]。由于在现实中尚未发现此类元件^①，故我们在此不予考虑。

在本文所介绍的著作中，有时允许二端元件为时变的。那时上述表达方式仍旧可用，仅需附加一个条件，即该代数关系（例如，对电容而言， q 与 v 之间的关系）可随时间而变。

1-2.2.1 电阻网络

本节考虑仅具有二端电阻及独立电源的网络。这里遇到的最基本的问题可能是：是否存在既满足电阻特性又满足基尔霍夫电压电流定律的支路电压和电流值？很自然会提出的进一步问题是，这些支路变量的值是否是唯一的。1947年，Duffin 证明了若干有关此类网络的定理 [9]。Duffin 局限于考虑某种特定电阻，这种电阻的电流为其端电压的连续函数。他证明了下列定理^②。

定理 1-2.1 在一个只包含独立电压源和电压控制电阻的网络中，若每一电阻的 $v-i$ 特性函数 g 均为连续且满足

$$\text{当 } x \rightarrow \pm\infty \quad \int_0^x g(v) dv \rightarrow +\infty$$

则至少存在一组既满足电阻特性又满足基尔霍夫电压及电流定律的支路电压和电流值。

图 I-2.2 所示简单网络为应用上述定理的一例，其中 $R > 0$ 。我们知道此例的解的存在性问题^③（即解的确定）可用几何方法求得，即观察负载线 $i = (E - v)/R$ 是否与非线性电阻的特性曲线相交。显然，定理 1-2.1 的假设条件不能保证解的单值性。因为只要适当选择 E 和 R 的

^① 然而，蔡确曾以有源电路实现了该类元件。

^② 由于我们将大量引用许多作者的论述，而他们各自采用了各式各样的符号和观点，为保持本文的连贯性起见，我们在此处以及此后将较灵活地陈述参考书目中的论点。

^③ 此处及此后，我们均要用“网络的解”这一术语，其意为一组方程的解，由之可以直接确定网络中所有支路变量的值。

值, 则甚至可能得到三个解。同时很显然, 若网络中含有独立电流源——例如其中的电压源由一个 I 安培 ($I < I_0$) 的电流源代替, 则此例电路无解。由此可知, 此定理不适用于含有独立电流源的电路。

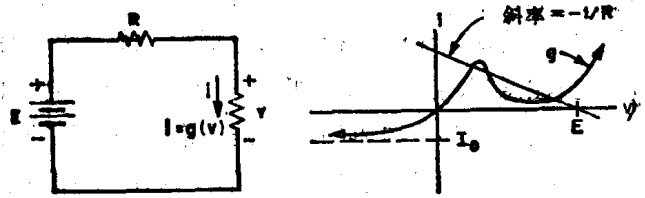


图 I-2.2 说明定理 I-2.1 的简单网络

由以上简例, 人们可能推测, 即使存在独立电流源, 只要电阻的特性不饱和则仍能保证该网络有解。此外还可能推测, 只有当至少有一个电阻的特性为非单调增长时, 才可能出现非单值解。人们的这种直觉是正确的, 因 Duffin 还证明了下列定理^① [9]。

定理 I-2.2 在一个包含独立电压和电流源以及电压控制电阻的网络中, 若每一电阻的 $v-i$ 特性函数 g 均为连续并满足当 $v \rightarrow +\infty (-\infty)$ 时 $g(v) \rightarrow +\infty (-\infty)$, 则至少存在一组既满足电阻特性又满足基尔霍夫电压及电流定律的支路电压和电流值。

定理 I-2.3 在一个包含独立电压和电流源以及电压控制电阻的网络中, 若每一电阻的 $v-i$ 特性函数 g 均为严格单调增长^②, 则至多存在一组既满足电阻特性又满足基尔霍夫电压及电流定律的支路电压及电流值。

作为定理 I-2.2 和定理 I-2.3 的推论, 在由独立电压和电流源以及非线性电阻构成的网络中, 若每一电阻的特性均为连续严格单调增长满射函数(因此, 每一电阻均既可认为是电压控制的也可认为是电流控制的), 则此网络有单值解。特别是, 这证实了任何由正值电阻和独立电源构成的线性网络的解的存在和唯一性。

参考书 [10] 至 [12] 中包括与上述 Duffin 的定理有关的一些内容。但证明方法与 Duffin 的不同, 并给出了有关解法。此外, Minty 在其论文 [11] 和 [12] 中还可以容纳的电阻的特性进行了某些一般化。

显然, 许多包含具有饱和特性的严格单调增长电压控制或电流控制元件的电阻网络仍有单值解。原因在于, 在该网络的拓扑中, 某些元件的 $v-i$ 特性函数的不可逆性是无关紧要的。而且, 由于饱和 $v-i$ 特性常见于一般二端元件的模型中(例如, 半导体二极管的特性通常就以方程 $i = I_0(e^{Kv} - 1)$ 表示, 其中 I_0 及 K 为正常数), 故对这种网络进行分析是很重要的。

Desoer 和 Katzenelson 在他们的一篇论文中 [13], 较早地尝试处理此类网络的问题并证明了下列定理。

定理 I-2.4 对于一个由具有连续单调增长特性的时变^③ 电压控制或电流控制电阻以及独立电压和电流源构成的网络, 存在单值解的充分条件如下: 当将所有的电压源短路, 电流源开路

① 在 Duffin 关于定理 I-2.2 和定理 I-2.3 的论述中, 他严格地要求网络满足所谓“链条件”, 实质即要求网络为一个整体。由于他允许导纳为零(即开路)的支路存在, 故这一要求在证明以上定理中是必要的。因为显然在一个由许多不相关的部分组成的网络中, 上述支路上的端电压并非定值。与此相关的一种情况如下, 我们可以认为定理 I-2.1 至 I-2.3 所涉及的网络系由规定的元件以任意方式连接而成。但需附加一个不言而喻的假设, 即网络中元件的连接方式不可使独立电源加在该网络上的制约成为“自相矛盾”。诸如, 将两个不同值的电压源并联等等。

② 若对所有实数 $v_1 < v_2$, $g(v_1) \leq g(v_2)$, 则函数 g 为单调增长。若对所有 $v_1 < v_2$, $g(v_1) < g(v_2)$, 则 g 为严格单调增长。

③ 显然, 当允许元件为时变时, 上述定理 I-2.1 至 I-2.3 仍成立。

之后能形成符合下列条件的一棵树(若该网络系由若干不相关的部分组成,则为一个树林),该树的所有树支均对应于电流控制元件而所有连支则均对应于电压控制元件。

应当注意到,定理 I-2.4 中所考虑的非线性电阻的特性不必是严格单调增长的,当然更可以饱和。若其中的某些电阻的特性是严格单调增长的且为满射函数,则既可认为这些电阻是电流控制的,也可认为他们是电压控制的。这样,根据以上定理选定树的时候就比较灵活,可以有几种不同的选法。

Sandberg 和 Willson 在 [14] 和 [15] 中,则采用了一种完全不同的方式设法解决这一问题,从而确定了网络方程存在单值解的充分必要条件。他们认为网络具有如图 I-2.3 所示(完全一般化)的结构。将线性部分与非线性部分分别考虑:线性部分为一个线性 n 端口,其中只包含

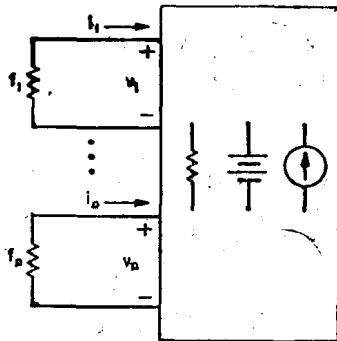


图 I-2.3 每一端口上均接有非线性电阻的线性电阻 n 端口网络

线性非负电阻及独立电源,而在引出的每一个端口上各接一个非线性电阻,其特性为 $i_k = -f_k(v_k)$ 或 $v_k = -f_k(i_k)$, 其中 $k=1, 2, \dots, n$, 而 f_k 则是一个连续严格单调增长满射函数。他们同时指出,确定网络解的问题与求解下列方程的问题等效:

$$AF(x) + Bx = c \quad (I-2.1)$$

其中,对于 $k=1, \dots, n$, 矢量 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ 中的元素 x_k 对应于第 k 端口的端口变量(电压或电流),即第 k 个非线性电阻的控制变量。对于所有的 n 维矢量 x , 非线性电阻的

非线性变换 F 的定义为: $F(x) = [f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)]^T$ 。式 (I-2.1) 中的 A 和 B 为实 $n \times n$ 矩阵,而 c 则为实 n 维矢量,它们代表图 I-2.3 中网络的线性部分,即电阻 n 端口网络的特性。由非负电阻和独立电源构成的任意网络均具有这一表达式 [16]。此外,由于 n 端口中的线性电阻均为非负(无源),故矩阵对 (A, B) 具有下列特性:若矢量 x, y 满足 $Ax = By$, 则 $x^T y \geq 0$ 。我们称具有这一性质的矩阵对 (A, B) 为无源对。

事实上,适用于上述问题的下列定理仅为 [15] 中所述的更普遍的结果的一个推论。其中标志 $\mathcal{B}(F) \cap N(B) = \{\theta\}$ 就是指不存在任何满足下列二条件的实数 n 维矢量 $x \neq \theta$,

- 1) $Bx = \theta$ (即 x 在 B 的零空间内),
- 2) $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \|F(\rho x)\| < \infty$ (详见 [16])。

即矩阵 B 的性质给非线性函数 f_k 的饱和以某种特定的限制。

定理 I-2.5 令非线性变换 F 的性质如上,并令 (A, B) 为无源实数 $n \times n$ 矩阵对。则当且仅当 $\mathcal{B}(F) \cap N(B) = \{\theta\}$, (I-2.1) 才对于任何实数矢量 c 有单值解。若 $\mathcal{B}(F) \cap N(B) \neq \{\theta\}$ 则可能存在某些实数矢量 c 使 (I-2.1) 无解。

① 此处及贯穿此文,上标 T 均表示矢量或矩阵的转置。

② 此处及此后,我们均用符号 θ 表示全部元素均为零的 n 维矢量。 n 维矢量的欧几里得范数以 $\|x\|$ 表示,即

$$\|x\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

如上所述,定理 I-2.5 中的条件 $\mathcal{B}(F) \cap N(B) = \{\theta\}$ 将非线性电阻的 $v-i$ 特性函数 f_i 的性质 (即当控制变量趋于极大正值或负值时该特性是否趋于饱和) 与网络的有关拓扑结构联系起来。(此处,处于 B 的零空间内的实 n 维矢量中的各元素的符号和位置起着关键的作用,而它们则完全由网络拓扑而定。)虽然实际上就任一给定网络确定条件 $\mathcal{B}(F) \cap N(B) = \{\theta\}$ 是否满足并不困难,但 Desoer 和吴在他们最近的论文中 [17], 却将上述问题的拓扑性质剖析得更显而易见。

定理 I-2.6 由特性为连续严格单调增长函数的电压控制和电流控制电阻以及任意数值的独立电源(电压源均为钳形接入而电流源则均为焊接接入)^① 构成的网络, 当且仅当具备下述性质 1) 和性质 2) 的情况下有单值解。

1) 每一条由电流控制电阻构成的回路中至少有一个 U 型元件(即当控制变量趋于极大正值或负值时,其特性均为无界的元件), 或至少有两个不同方向^② 的 H 型元件[即当控制变量趋于正极大值(或负极大值)时其特性为有界,即趋于饱和,而当控制变量趋于负极大值(或正极大值)时其特性为无界的元件]。

2) 每一个由电压控制电阻构成的割集中, 至少有一个 U 型元件或至少有两个不同方向的 H 型元件。

Desoer 和吴在 [17] 中还讨论了当电阻的 $v-i$ 特性为单调增长时(不一定严格单调增长), 网络的解的存在性以及解作为电源值的函数的连续性问题。并介绍了校核条件 1) 和 2) 的一些算法。

现在我们考虑由特性并不一定单调增长的电阻构成的网络。图 I-2.2 的简例表明此类网络可能有多于一个的解。定理 I-2.1 列出了当此类网络中只包含电压控制电阻和独立电压源时保证存在至少一组解的条件。Sandberg 和 Willson 则证明了能用于更一般情况下的结果 [15]。他们采用了与论证定理 I-2.5 相似的方法。其区别在于,现在仅当自变量的幅值大于某一(任意)正值时才要求连续函数 f_i 为严格单调增长。我们称这种函数为最终严格单调增长的。图 I-2.1 所示隧道二极管的特性即为此种函数之一例。他们证明了下列定理。同样,该定理也仅为 [15] 中所述更一般化的结果的一个推论。

定理 I-2.7 令 F 为一非线性变换, 其中各函数 f_i 均如上述为最终严格单调增长。并令 (A, B) 为一对无源实 $n \times n$ 矩阵对。若 $\mathcal{B}(F) \cap N(B) = \{\theta\}$, 则 (I-2, 1) 对任何实 n 维矢量 c 至少有一组解。

Desoer 和吴在 [17] 中也采用(与证明定理 I-2.7)同样的方法得到了下列结果。

定理 I-2.8 对于由特性为连续最终严格单调增长函数的电压控制和电流控制电阻, 以及独立电压和电流源构成的网络, 至少存在一个解的充分条件为: 将所有的电压源短路, 电流源开路后所得到的电阻网络具有定理 I-2.6 中的性质 1) 和 2)。

在确定了某一给定网络解的存在性(可能还有唯一性)之后, 一般就试图求得其(该)解。引

^① 始于 Guillemin 的术语钳形接入和焊接接入在电路理论的文献中是合理的标准形式。其意不言自明。读者可参阅 [70, 92 页], 该处说明, 在一般情况下, 仅需认为电压源为钳形接入而电流源为焊接接入。

^② 所谓两个 H 型电流控制元件为不同方向, 即当将在该回路中的这两个元件串联后, 其组合特性相当于一个 U 型元件。 H 型电压控制电阻的定义与此相似。