现代应用数学丛书

几何学

〔日〕矢野健太郎 著

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

几　　何　　学

〔日〕矢野健太郎 著
孙 澤 瀛 譯

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的现代应用数学丛书之一的中譯本。本书包括向量代数、向量分析、微分几何等三篇，分九章。簡单扼要地介紹了这三方面的主要內容。在向量代数方面，除介紹了向量的基本运算及其应用之外，对于張量的概念也作了說明。在向量分析中，对于微分运算子、积分性质、曲綫坐标等作了系統介紹，在微分几何一篇中，重点介紹了曲面論和黎曼空間的一些基本性质。本书可供高等学校数学系师生及工程技术人員参考。

现代应用数学丛书

几 何 学

原书名 几 何 学
原著者 〔日〕矢野健太郎
原出版者 岩 波 书 店
譯 者 孙 澤 瀛

上海科学技术出版社出版(上海瑞金二路 450 号)
上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

上海市印刷四厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本 850×1156 1/32 印張 4 字数 94,000
1961 年 8 月第 1 版 1965 年 12 月第 2 次印刷
印数 16,001—17,000

统一书号 13119·415 定价 (科六) 0.60 元

出版説明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一题目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。书中收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国科学技术工作者可能是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在某些譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

譯 者 序

这本书的編写方法和一般的微分几何学不同，主要是針对物理学和力学方面的应用而編写的。为此，它着重叙述了向量和其扩充的張量的一些基础知識及其与物理学和力学有关的內容。

首先，它引进了向量代数的一般知識，根据向量在三重系变换下的变换規律很自然地引入了張量概念，作为向量的扩充。

其次，对向量分析的部分，主要研究物理和力学中所需要的向量場、張量場、梯度、散度和旋度等一些概念。随后就叙述了向量的积分，这也是对实际应用很有意义的一节。这里还引进了曲綫坐标作为后文应用的准备。

最后，在微分几何部分，扼要地叙述了曲面論和黎曼空間的主要內容。在卷末还极概略地提到一点李微分的內容。这是一种新的微分运算子，它可以应用于数量、向量、張量以及其他几何量。

本书的內容安排，尽量照顾到应用是一个特点。但是在叙述过程中，理論联系实际仍嫌不够，許多可以应用到的流体力学、彈性力学、电动力学的內容沒有提到或很少提到，实际例証也举得不多。希望讀者参考有关书藉以弥补不足。

笔者的写法很簡洁，一切公式的推导以及定理的証明，几乎都用最簡单的、直接的方法，这可說是本书又一个特点。但其中有一些定理，如三重向量积公式，梯度和旋度的概念，只介紹了分析公式，如能扼要地提一下几何及物理意义，可能对讀者更有帮助。

本书对于学习場論（向量分析）、張量分析以及黎曼几何的同志，可以作为比較省力的入門讀物。因此，值得向讀者推荐。

本譯本承錢端壮教授协助审校，特此致謝。

孙 澤 瀛 1961年7月

目　录

第1篇 向量代数

第1章 定义与初等运算

§1 向量的定义与表現

几何学及物理学里，有綫段长、三角形面积、四面体体积、質量、温度、功、能量、电荷等一类的量，它們在測度单位規定后，可单由一个数值完全表示出来，又有平行移动、速度、加速度、力等一类的量，它們在測度单位規定后，不能单由一个数值而要附以方向才能完全表示出来。

前一种量，那就是測度单位規定后单由一个数值完全表示出来并服从普通代数运算法則的量，称为**数量**(或标量)。

与此相反，后一种量，那就是測度单位規定后不能单由一个数值表示还要指定方向才能完全表示出来、服从以下列举的特殊运算法則的量，称为**向量**(或矢量)。

向量旣然是具有数值与方向的量，过空間任意一点，例如說过点O的有向綫段OA就能完全把它表示出来，OA之长表示它的数值，OA的方向表示它的方向。这时O称为它的**起点**，A称为它的**終点**。为了使有向綫段清楚地表示一个向量起見，有时在写法上加一个箭头，写成$\overrightarrow{OA}$。

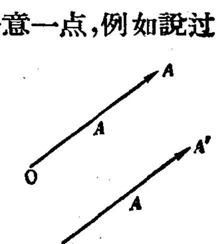

图 1.1

此外，为了书写的便利起見，常用一个字母来表示向量。我們采用普通的小写字母，例如a，表示数量，以粗

黑的大写字母，例如 $\boldsymbol{A}$，表示向量。这就是說

$$\boldsymbol{A}=\overrightarrow{OA}.$$

过空間的另一点 O' 引有向綫段 $O'A'$，以向量 $\boldsymbol{A}$ 的数值定这条綫段的长度，以向量 $\boldsymbol{A}$ 的方向定这条綫段的方向，那么 $\overrightarrow{O'A'}$ 仍表示同一向量 $\boldsymbol{A}$. 这就是說，空間內具有同一长度、同一方向的一切有向綫段表示同一向量。

向量 $\boldsymbol{A}$ 用有向綫段 $\overrightarrow{OA}$ 表示时，綫段 OA 之长称为**向量 $\boldsymbol{A}$ 的长**，或**大小**，或**絕对值**，以 $|\boldsymbol{A}|$ 或 a 表示。

长度为 1 的向量叫做**单位向量**。

§2 向量的加法与减法

正如前一节所說的，向量是可用具有长度与方向的有向綫段表示的一种量，而且服从一套特殊的运算规則。以下就要順次地說明这套运算規則。

首先，**向量 $\boldsymbol{A}$ 与向量 $\boldsymbol{B}$ 之和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$** 是这样定义的：以表示向量 $\boldsymbol{A}$ 的有向綫段 $\overrightarrow{OA}$ 之終点 A 作为起点，引表示向量 $\boldsymbol{B}$ 的有向綫段 $\overrightarrow{AC}$，那么，有向綫段 $\overrightarrow{OC}$ 所表示的向量就規定为它們的和。向量 $\boldsymbol{A}$ 加向量 $\boldsymbol{B}$ 构成向量 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的上述法則称做**向量加法的三角形法則**。

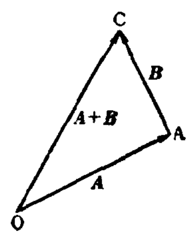

图 2.1

由于以上規定，向量 $\boldsymbol{A}$ 与向量 $\boldsymbol{B}$ 之和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也可以用如次的方式作出来。如以有向綫段 $\overrightarrow{OA}$ 表示向量 $\boldsymbol{A}$，有向綫段 $\overrightarrow{OB}$ 表示向量 $\boldsymbol{B}$，則表示和的有向綫段是以 OA，OB 为邻边的平行四边形 $OACB$ 之对角綫 $\overrightarrow{OC}$. 象这样由向量 $\boldsymbol{A}$ 加向量 $\boldsymbol{B}$ 作出向量 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的法則称做**向量加法的平行四边形法則**。

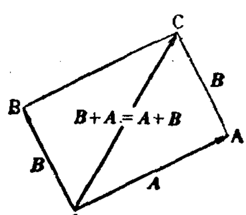

图 2.2

从以上的說明，向量加法满足

(1) $$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$$

是很明显的了。这就是說**向量的加法满足交换律**。

如果有三个向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$，要想作它們的和，首先按照上述法則作出 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，然后对所得的向量再按照上述法則加以 $\boldsymbol{C}$ 作出 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$ 就行了。这时从图 2.3 很明显地看出

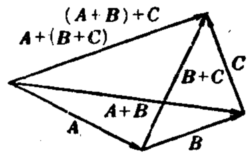

图 2.3

(2) $$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}),$$

这就是說**向量加法满足結合律**。关于三个以上的向量之和可以同样地說明。

其次，为了要說明向量 $\boldsymbol{A}$ 与向量 $\boldsymbol{B}$ 之差，讓我們考查方程式

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{X}.$$

以有向綫段 $\overrightarrow{OA}$ 表示向量 $\boldsymbol{A}$，有向綫段 $\overrightarrow{OB}$ 表示向量 $\boldsymbol{B}$，从右图看出

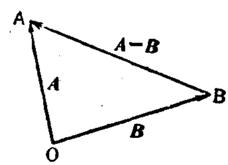

图 2.4

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA},$$

因此，有向綫段 $\overrightarrow{BA}$ 恰恰表示了向量 $\boldsymbol{X}$. 除去与 $\overrightarrow{BA}$ 同长同向的有向綫段外，其他任何有向綫段不能代表满足上式的向量 $\boldsymbol{X}$. 这就是說

(3) 满足方程 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{X}$ 的向量 $\boldsymbol{X}$ 只有一个。

这样的向量 $\boldsymbol{X}$ 称做**向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之差**，記以 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$.

在以上的說明中，如 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，則点 A 与点 B 将重合在一起。因此，向量 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 将由以同一点作起点又作終点的有向綫段来表示。这样的向量我們称之为**零向量**，以 $\boldsymbol{O}$ 来表示。从而对于任意向量 $\boldsymbol{A}$ 有

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}.$$

还有，在方程 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{X}$ 里，以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，則

$$O=B+X,$$

表示向量 B 的有向線段 $\overrightarrow{OB}$ 和代表向量 X 的有向線段 $\overrightarrow{OB'}$ 利用向量加法的平行四边形法則把它們結合起来，要使結合后的有向線段表示零向量 O，也就是說，要得出起点和終点一致的向量，就非得要 $\overrightarrow{OB}$ 和 $\overrightarrow{OB'}$ 等长而反向不可。

对于向量 B 而言，和它等长而方向相反的向量記以 $-B$。从此有

$$B+(-B)=(-B)+B=O.$$

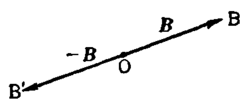

图　2.5

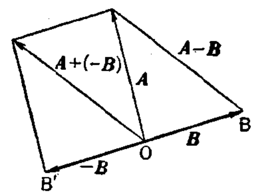

图　2.6

再說，两个向量 A 和 B 給出时，把 $A-B$ 的作图和图 2.6 比較，清楚地看出

$$A-B=A+(-B).$$

就向量加法 $A+B$ 而論，如 $A=B$，則得 $A+A$ 代表一个长是 A 的二倍、方向与 A 相同的一个向量。我們把这个向量記成 $A\times 2$ 或 $2A$.

更就一般情况讲，設 α 是一个实数，A 是一个向量，規定 $\alpha A=A\alpha$ 表示一个向量：当 α 是正数时，它的长是 A 的 α 倍，它的方向和 A 同向；当 α 是負数时，它的长是 A 的 $|\alpha|$ 倍，它的方向和 A 反向。从这个規定，立刻知道

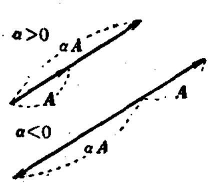

图　2.7

$$(-1)B=-B.$$

至于数量和向量的乘法满足以下三个法則，由下图当可明白。

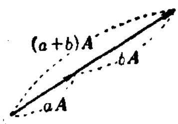

图 2.8

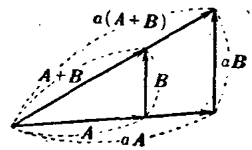

图 2.9

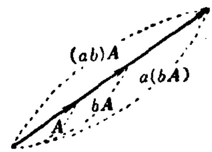

图 2.10

(4) $$(a+b)\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{A},$$

(5) $$a(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=a\boldsymbol{A}+a\boldsymbol{B},$$

(6) $$a(b\boldsymbol{A})=(ab)\boldsymbol{A}.$$

§3 向量的綫性相关性与綫性无关性

一个向量$\boldsymbol{A}$給出时，与之同向或反向的向量$\boldsymbol{B}$可写为$\boldsymbol{B}=l\boldsymbol{A}$。因此，以 $l=-\frac{a}{b}$，则

$$a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}. \tag{3.1}$$

这里 b 不等于零。一般講来，对于两个向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$，如有不同时为零的两个数 a, b 使上式成立，则称两向量**綫性相关**。对于任意向量 $\boldsymbol{A}$ 和零向量 $\boldsymbol{O}$，常有

$$0\boldsymbol{A}+1\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O},$$

所以任意向量 $\boldsymbol{A}$ 和零向量 $\boldsymbol{O}$ 总是綫性相关的。我們今后假定 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}\cdots$ 所表示的向量都不是零向量。

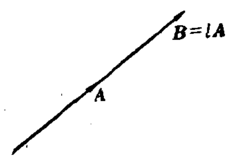

图 3.1

与向量$\boldsymbol{A}$同向或反向的向量$\boldsymbol{B}$既已看做是与$\boldsymbol{A}$成綫性相关，反之，如$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$是綫性相关，则(3.1)成立，因此a和b中至少有一个不是零，例如說 $b\neq 0$，这时，$\boldsymbol{B}=-\frac{a}{b}\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 是同向的或反向的。

如向量$\boldsymbol{A}$和与它既非同向又非反向的向量$\boldsymbol{B}$为已給，则如图3.2 所表明的，要使式(3.1)成立，只有 $a=b=0$ 才行。象这样的

两个向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，式(3.1)要成立只限于 $a=b=0$，则称它們为**綫性无关**。

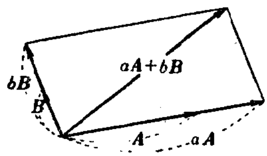

图 3.2

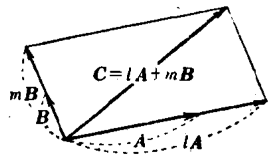

图 3.3

两个綫性无关的向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 决定一个平面。因此，如图 3.3 所表明的，对于平面上任意向量 $\boldsymbol{C}$，满足 $\boldsymbol{C}=l\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{B}$ 的 l, m 存在而且可唯一地决定。于是，如以 $l=-\dfrac{a}{c}$，$m=-\dfrac{b}{c}$，则

$$a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}+c\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}. \tag{3.2}$$

这里 c 不等于零。一般讲来，对于三个向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$，如有不同时为零的三个数 a, b, c 使上式成立，称这三个向量为綫性相关。

从此可知，通过一点且在同一平面上的三个向量是綫性相关的。反之，如过一点引三个綫性相关的向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$，则(3.2)成立，$a, b, c$ 中至少有一个不是零。例如說 $c\neq 0$，那么，

$$\boldsymbol{C}=-\frac{a}{c}\boldsymbol{A}-\frac{b}{c}\boldsymbol{B},$$

于是 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 在同一平面上。

其次，过一点引三个向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$，如果它們不在同一平面上，则如图 3.4 所表明的，要使式(3.2)成立，只限于 $a=b=c=0$

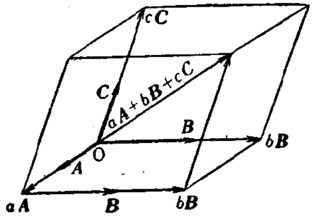

图 3.4

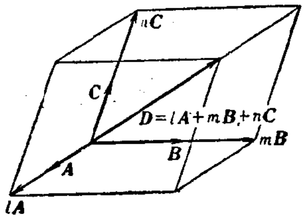

图 3.5

才成。象这样的三个向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$, 只限于 $a=b=c=0$ 时式(3.2)成立,称它們为綫性无关。

过一点引三个綫性无关的向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$, 那么, 它們不会在同一平面上。因此,如图 3.5 所表示的,对于空間內任意向量 $\boldsymbol{D}$,满足 $\boldsymbol{D}=l\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{B}+n\boldsymbol{C}$ 的 l, m, n 存在而且可唯一地决定。于是,如以 $l=-\frac{a}{d}$, $m=-\frac{b}{d}$, $n=-\frac{c}{d}$, 則

$$a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}+c\boldsymbol{C}+d\boldsymbol{D}=\boldsymbol{O}. \tag{3.3}$$

这里 d 不等于零。一般講来,对于四个向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$, 如有不同时为零的四个数 a, b, c, d, 使上式成立, 則称这四个向量为綫性相关。

从此知道, 空間內的任意四个向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 一定是綫性相关的。因为,如設 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 綫性相关,則有 $a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$, 这里的 a, b 不同时为零。于是

$$a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}+0\boldsymbol{C}+0\boldsymbol{D}=\boldsymbol{O}$$

当然成立,这就是說 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 是綫性相关。又如 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 綫性相关, 則必有不同时为零的 a, b, c 使 $a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}+c\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$. 于是

$$a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}+c\boldsymbol{C}+0\boldsymbol{D}=\boldsymbol{O}$$

当然成立,而 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 是綫性相关。最后設 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 是綫性无关,則由前面所讲的, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 必綫性相关。在这最后的情况下, 式(3.3)的 $d\neq 0$. 因为不然的話, a, b, c 中将有不为零的数使 $a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}+c\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$, 这和 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 是綫性无关的假定不合,因此得到

$$\boldsymbol{D}=-\frac{a}{d}\boldsymbol{A}-\frac{b}{d}\boldsymbol{B}-\frac{c}{d}\boldsymbol{C}=l\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{B}+n\boldsymbol{C},$$

这时称 $\boldsymbol{D}$ 沿 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 的方向**分解**, 并称 $l\boldsymbol{A}, m\boldsymbol{B}, n\boldsymbol{C}$ 为 $\boldsymbol{D}$ 在这三个方向的**支量**(或**分量**)。

§4　解析几何学上的应用

过空間一点 O，考虑三个互相直交的单位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$，假定它們的安排是按照坐标系的右旋法则处理的。

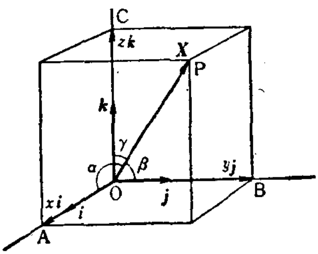

图　4.1

这样三个向量当然是綫性无关的。因此，过同一点 O 引任意向量 $\boldsymbol{X}$，它可写成

$$\boldsymbol{X}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

过向量 $\boldsymbol{X}$ 的終点 P 分别引平面平行于 $\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{k},\boldsymbol{i}$; $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 两两所决定的平面，設这些平面和向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 所定的直綫分别交于 A, B, C 三点，那么，x, y, z 的几何意义就是它們表示 OA, OB, OC（附适当正負号）的长度。

这样的 x, y, z 称为向量 $\boldsymbol{X}$ 关于直交单位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 的支量或坐标。

在空間解析几何学里，以一点 O 为原点，向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 所定的有向直綫分别作为 x 軸、y 軸、z 軸的正向，則一点 P 的直角坐标 (x, y, z) 就决定了。这种說法和以上的說法是完全一样的。

在設定直交軸 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 的空間里，要决定一点 P 的位置，常用从原点引到点 P 的向量 $\overrightarrow{OP}$，这个向量有时称为**位置向量**。位置向量的坐标就是它終点的坐标。設向量

$$\boldsymbol{X}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

之长是 r，它和向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 所成的角，即**方向角**分别記成 α, β, γ，那么，立刻知道

$$x=r\cos\alpha,\quad y=r\cos\beta,\quad z=r\cos\gamma.$$

这里的 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{X}$ 的**方向余弦**。因为

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

所以方向余弦满足

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

向量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 如写成

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k},$$

则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(A_x+B_x)\boldsymbol{i}+(A_y+B_y)\boldsymbol{j}+(A_z+B_z)\boldsymbol{k}$$

$$a\boldsymbol{A}=aA_x\boldsymbol{i}+aA_y\boldsymbol{j}+aA_z\boldsymbol{k},$$

因此，$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的坐标是$(A_x,\ A_y,\ A_z)$，$(B_x,\ B_y,\ B_z)$时，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的坐标就是 $(A_x+B_x,\ A_y+B_y,\ A_z+B_z)$，$a\boldsymbol{A}$ 的坐标就是 $(aA_x,\ aA_y,\ aA_z)$。

第2章　内积与外积

§5 向量的内积

給定两向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，如它們的长分别为 a, b，所成的角为 θ，則称 $ab\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的**内积**或**数量积**，普通用 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 或 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 来表示。因此，

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=ab\cos\theta.$$

設表示向量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的有向綫段分别是 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$，从 A 引 OB 之垂綫，垂足記以 A'，从 B 引 OA 之垂綫，垂足記以 B'，則因

$$OA'=a\cos\theta,\quad OB'=b\cos\theta,$$

所以可以得到

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=OA'\cdot b \text{ 与 } \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=OB'\cdot a.$$

这就是説两个向量的内积可以当做是一个向量的长与另一向量在它上面的垂直射影所成的乘积。

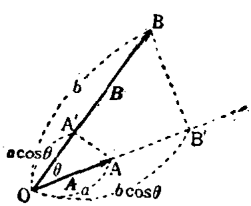

图　5.1

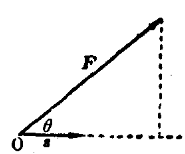

图　5.2

例　以力 $\boldsymbol{F}$ 施于一质点 O，引起了变位 $\boldsymbol{s}$，則此力所作的功是 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$.

一向量 $\boldsymbol{A}$ 和它自身所成的内积，因 $\theta=0$, $\cos\theta=1$，故得到 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=a^2$. 因此，向量 $\boldsymbol{A}$ 之长由

$$|\boldsymbol{A}|=\sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}$$