马尔科夫过程论基础

E.Б.鄧肯著

科学出版社

马尔科夫过程论基础 E.Б.鄧肯著

马尔科夫过程论基础

Е. Б. 邓　肯著
王　梓　坤譯

科　学　出　版　社

Е. Б. ДЫНКИН
ОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ
Физматгиз 1959

內容簡介

近年来馬尔科夫过程論的迅速发展要求重新批判地考察理論的基础．不把馬尔科夫过程看成具有某些特性的随机函数，而把它看成一整族彼此联系的、对应于各种开始条件的随机函数的必要性，以及研究在随机时刻內中断的过程的必要性，已經很明显了．出現了一系列新的概念，特别是，強馬尔科夫过程的概念，在这概念中，无后效性的原則比通常理解得更为广泛；此外还有已給过程的子过程概念等等．

在世界数学文献中，本书第一次系統地建立了包含这一整套問題的、馬尔科夫过程的一般理論．也研究了馬尔科夫过程軌道的有界性以及（在某种意义下的）連續性．

本书可推荐給概率論专門化以及邻近学科的高年級学生、研究生和数学科学工作者．

马尔科夫过程论基础

Е. Б. 邓肯 著
王梓坤 譯

*

科学出版社出版（北京朝阳門大街117号）
北京市书刊出版业營业許可証出字第061号
中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1962年4月第一版 书号：2499 字数：156,000
1962年4月第一次印刷 开本：850×1168 1/32
（京）0001—9,000 印张：6 1/16

定价：1.00元

序　　言

本书的目的在于研究馬尔科夫随机过程論的邏輯基础.

近年来馬尔科夫过程論迅速地发展着. 已經研究过这些过程的軌道性质和无穷小算子, 发現了軌道行径与对应于过程的微分方程性質間的深刻联系, 这种联系不仅有利于馬尔科夫过程的研究, 而且对研究微分方程也是有益的. 这时, 积累的資料要求重新批判地考察理論的基础. 特别地, 发現了馬尔科夫原則"无后效性"的一般定义不够充分, 于是各作者便在不同的形式下, 提出了更強的"強馬尔科夫"原則. 也明确了研究对象自然地应該是这样的馬尔科夫过程, 它們可在某随机时刻中断. 所有这些与其他的概念, 由各作者在不同的形式下所引进, 以适应于各篇专論的具体目的. 但当时所研究的, 几乎都是齐次(对时間)的馬尔科夫过程.

本书中建立了包括非齐次过程的一般理論. 齐次过程看成为重要的特殊情形. 已經知道, 用人为的方法, 可以化非齐次馬尔科夫过程为齐次的, 但需过渡到更复杂的相空間上去[1]. 然而, 这时所得到的齐次过程在某种意义下是退化的, 因此, 这种轉化远非經常合适. 何况本质上馬尔科夫过程的一般概念, 比齐次馬尔科夫过程的概念更为原始. 对于齐次馬尔科夫过程, 存在标准的时間尺度. 对一般的过程則没有这样的尺度, 一切定义相对于任意单調連續的时間变换必須是不变的.

視馬尔科夫过程为特殊类型的随机函数的流行观点, 对发展理論是不充分的.

事实上, 在馬尔科夫过程的研究中, 一般涉及的不是一个概率测度, 而是整整一族这样的测度, 它們对应于一切可能的开始时刻

---

1) 見第四章 § 3.

与一切可能的开始状态；因此，涉及的不是一个随机函数，而是一整族这样的函数，它們以一定的方式彼此联系着．这是一个理由，它說明为什么馬尔科夫过程論相对于随机过程的一般理論，应具有人所共知的独立性．在本书中，馬尔科夫过程論的建立，不需要援引任何随机过程的一般理論．

本书不宜作为初次熟悉馬尔科夫过程論的教本．虽然形式上我們不依靠任何概率論的預备知識，但本質上，閱讀本书只能有益于已經熟悉初等馬尔科夫过程論的讀者，例如已閱讀过費勒（W. Feller）的教本“概率論及其应用引論”第一卷，或格涅欽柯（Б. В. Гнеденко）的“概率論教程”的讀者．

第一章序論中包含測度論中必要的概念与定理的簡述．証明可在其他教本中找到，这里从略．第二章中給出了馬尔科夫过程的一般定义，并研究了一些运算，它們可用来考察对应于已給轉移函数的馬尔科夫过程类．更复杂的构造子过程的运算在第三章里研究．那里发現了馬尔科夫过程的子过程与其軌道的可乘泛函間的关系．研究了最重要的可乘泛函类与子过程类．第四章研究如何根据轉移函数构造馬尔科夫过程．第五章中考察强馬尔科夫过程的概念．最后，第六章用来研究对轉移函数应加的条件，以使在这些条件下，在对应于此函数的各馬尔科夫过程中，可以找到这样的过程，它的軌道具有某种連續性或有界性．在附录中叙述了肖凱（G. Choquet）的关于一般容度論的若干結果，并且从这些結果导出了初次跑出时刻的可測性定理．书末附記中載有历史与文献的注释．

与本书紧密相关的是准备付印的专著“馬尔科夫过程的无穷小算子”，它研究馬尔科夫过程的分类問題．这两本书应看成关于馬尔科夫过程論的統一专著的两部分．

构成本书內容的材料，由作者在莫斯科大学与北京大学一系列的报告和专門課程中闡述过．作者感激听众所提出的許多意見，这些意見在最后校閱底稿时已被考虑过．

尤斯凱維奇（А. А. Юшкевич）仔細地閱讀过底稿．他的批

評帮助消除了許多不确切的与不明确的地方．我对他所做的大量工作表示衷心的謝意．

邓肯(Е. Б. Дынкин)

1958年7月4日

目　录

第一章 序 論

§1. 可測空間与可測映象

1.1. 設 $\mathscr{M}$ 为某集 Ω 的子集系，滿足下列条件：

1.1. A₁. 如 $A\in\mathscr{M}$，則 $\bar{A}\in\mathscr{M}$[1].

1.1. A₂. 如 $A_i\in\mathscr{M}(i=1, 2, \cdots)$，則 $\bigcup\limits_{1}^{\infty} A_i\in\mathscr{M}$ 且 $\bigcap\limits_{1}^{\infty} A_i\in\mathscr{M}$.

这时我們說，子集系 $\mathscr{M}$ 是空間 Ω 中的σ-代数. 令 $\mathscr{C}$ 为 Ω 的某一子集系. 空間 Ω 中一切含 $\mathscr{C}$ 的 σ-代数的交仍是 σ-代数. 我們称它为 $\mathscr{C}$ 产生的 σ-代数，并記为 $\sigma(\mathscr{C})$.

如 $\mathscr{M}$ 为空間 Ω 中的 σ-代数，又 $\tilde{\Omega}\in\mathscr{M}$，則含于 $\tilde{\Omega}$ 中的 $A\in\mathscr{M}$ 全体，构成空間 $\tilde{\Omega}$ 中的 σ-代数. 我們記此 σ-代数为 $\mathscr{M}[\tilde{\Omega}]$.

我們称空間 Ω 的子集系 $\mathscr{C}$ 为 π-系，如果：

1.1. Б₁. 由 $A_1, A_2\in\mathscr{C}$ 得 $A_1A_2\in\mathscr{C}$[2].

我們称族 $\mathscr{F}$ 为 λ-系，如它滿足下列条件：

1.1. B₁. $\Omega\in\mathscr{F}$.

1.1. B₂. 如 $A_1, A_2\in\mathscr{F}$ 且 $A_1A_2=\varnothing$[3]，則 $A_1\cup A_2\in\mathscr{F}$.

1.1. B₃. 如 $A_1, A_2\in\mathscr{F}$ 且 $A_1\supseteq A_2$，則 $A_1\setminus A_2\in\mathscr{F}$.

1.1. B₄. 如 $A_1,\cdots,A_n,\cdots\in\mathscr{F}$ 且 $A_n\uparrow A$[4]，則 $A\in\mathscr{F}$.

---

1) 以 $\bar{A}$ 表 A 在 Ω 中的补集，即 $\Omega\setminus A$.

2) 我們将更多地用 AB 来記集 A 与 B 的交. 有时也用記号 $A\cap B$ 及 $\{A, B\}$.

3) 記号 ϕ 表空集.

4) 記号 $A_n\uparrow A$ 表示 $A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_n\subseteq\cdots$，且 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 类似地，記号 $A_n\downarrow A$ 表示 $A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots\supseteq A_n\supseteq\cdots$，且 $A=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

注意，如某集系 $\mathscr{M}$ 同时既是 π-系又是 λ-系，则它是 σ-代数. 实际上，由 1.1. B$_1$ 及 1.1. B$_3$ 推得 1.1. A$_1$. 再由关系式 $A\cup B = A\cup(B\setminus AB)$ 及性质 1.1. Б$_1$, 1.1. B$_3$ 及 1.1. B$_2$ 可知，如 A, $B\in\mathscr{M}$, 则 $A\cup B = A\cup(B\setminus AB)\in\mathscr{M}$, 因此，如 A_1, A_2, $\cdots$, $A_n\in\mathscr{M}$, 则 $\bigcup\limits_1^n A_i\in\mathscr{M}$. 今設 $A_n\in\mathscr{M}(n=1,2,\cdots)$, 则 $A'_n = \bigcup\limits_1^n A_k\in\mathscr{M}$,既然 $A'_n\uparrow\bigcup\limits_1^\infty A_n$,故由 1.1. B$_4$, $\bigcup\limits_1^\infty A_n\in\mathscr{M}$.
由关系式

$$\bigcap_1^\infty A_n = \overline{\bigcup_1^\infty \bar{A}_n}$$

得 $\bigcap\limits_1^\infty A_n\in\mathscr{M}$. 因此条件 1.1. A$_2$ 满足.

引理 1.1. 如 λ-系 $\mathscr{F}$ 包含 π-系 $\mathscr{C}$,则 $\mathscr{F}$ 包含 $\sigma(\mathscr{C})$.

証. 一切含 π-系 $\mathscr{C}$ 的 λ-系的交 $\mathscr{F}'$,显然是 λ-系. 今証此交同时又是 π-系. 由此立得引理的結論.

容易看出，对一切 $B\in\mathscr{C}$, 使 $AB\in\mathscr{F}'$ 的集 A 所成的总体 $\mathscr{F}_1$ 是 λ-系. 既然 $\mathscr{F}_1\supseteq\mathscr{C}$,故 $\mathscr{F}_1\supseteq\mathscr{F}'$. 这表示,如 $A\in\mathscr{F}'$, $B\in\mathscr{C}$,则 $AB\in\mathscr{F}'$.

現在令 $B\in\mathscr{F}_2$, 如 $BA\in\mathscr{F}'$ 对一切 $A\in\mathscr{F}'$ 成立. 易見 $\mathscr{F}_2$ 是 λ-系. 按上所証 $\mathscr{F}_2\supseteq\mathscr{C}$. 因此 $\mathscr{F}_2\supseteq\mathscr{F}'$. 这表示,如 A, $B\in\mathscr{F}'$,则 $AB\in\mathscr{F}'$. 从而 $\mathscr{F}'$ 是 π-系.

1.2. 由某集 Ω 及此集的子集 σ-代数 $\mathscr{A}$ 所組成的对偶 $(\Omega, \mathscr{A})$,称为可測空間.

可測空間的重要例子是空間 $(I_t^s, \mathscr{B}_t^s)$, 这里 $I_t^s = [s, t]$ 是数綫段,而 $\mathscr{B}_t^s$ 是此綫段的子集 σ-代数,它由 I_t^s 中一切区間产生. s 及 t 可取无穷值, 并且我們認为 $I_{+\infty}^{-\infty} = (-\infty, +\infty)$, $I_t^{-\infty} = (-\infty, t)$, $I_{+\infty}^s = [s, +\infty)$.

設 $(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ 及 $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ 为二可測空間. 空間 Ω_1 到 Ω_2 的

映象[1] α 称为可測的，如果 $\mathscr{A}_2$ 中任一集的完全原象属于 $\mathscr{A}_1$. 当映象只定义在子集 $\tilde{\Omega}_1 \subset \Omega_1$ 时，这定义仍被采用。

我們指出，如 $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{A}_2$，則为使映象 α 是可測的，只需 $\mathscr{C}$ 中任一集的完全原象属于 $\mathscr{A}_1$，而且 $\Omega_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$，这里 $C_n \in \mathscr{C}$（为証此只要注意，完全原象属于 $\mathscr{A}_1$ 的集构成 Ω_2 中的 σ-代数）。

显然，如 α 是 $(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ 到 $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ 的可测映象，β 是 $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ 到 $(\Omega_3, \mathscr{A}_3)$ 的可測映象，則 $\beta\alpha$ 是 $(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ 到 $(\Omega_3, \mathscr{A}_3)$ 的可測映象，只要 β 的定义域包含 $\alpha(\Omega_1)$.

映象的最重要特殊情况是函数，即到数直綫 $I_{-\infty}^{+\infty}$ 中的映象. 設 $\mathscr{A}$ 是 Ω 的子集 σ-代数. 我們說，函数 $\xi(\omega)(\omega \in \Omega)$ 关于 $\mathscr{A}$ 可測，或 $\mathscr{A}$-可測，如它所决定的 $(\Omega, \mathscr{A})$ 到 $(I_{-\infty}^{+\infty}, \mathscr{B}_{-\infty}^{+\infty})$ 的映象可測，即如对任意的 $\Gamma \in \mathscr{B}_{-\infty}^{+\infty}$

$$\{\omega : \xi(\omega) \in \Gamma\} \in \mathscr{A}.$$

既然諸区間 $(t, +\infty)$ 产生 σ-代数 $\mathscr{B}_{-\infty}^{+\infty}$，故为使函数 $\xi(\omega)$ $\mathscr{A}$-可測，只需对任意 t

$$\{\omega : \xi(\omega) > t\} \in \mathscr{A}.$$

函数的 $\mathscr{A}$-可測性的观念可自动地推广到下述情形：集系 $\mathscr{A}$ 不是在全空間 Ω 中，而只是在此空間的某子集 $\tilde{\Omega}$ 内的 σ-代数. 容易看出，这时任意的 $\mathscr{A}$-可測函数 ξ 的定义域重合于 $\tilde{\Omega}$.

設 $\mathscr{L}$ 为 Ω 上的某函数系，它满足条件

1.2. A. 如 $\xi \in \mathscr{L}$ 且

$$\eta(\omega) = \begin{cases} \xi(\omega) & \text{当 } \xi(\omega) \geqslant 0, \\ 0 & \text{当 } \xi(\omega) < 0, \end{cases}$$

則 η 及 $\xi - \eta$ 属于 $\mathscr{L}$.

函数系 $\mathscr{H}$ 称为 $\mathscr{L}$-系，如果以下諸条件满足：

1.2. Б₁. $1 \in \mathscr{H}$.

---

1) 請注意“Ω_1 到 Ω_2 的映象”与以后的“Ω_1 到 Ω_2 上的映象”不同. 前者有时也称为“Ω_1 到 Ω_2 中的映象”——譯者.

1.2. Б$_2$. $\mathscr{H}$ 中任意二函数的綫性組合也属于 $\mathscr{H}$.

1.2. Б$_3$. 如 $\xi_n \in \mathscr{H}$, $0 \leqslant \xi_n(\omega) \uparrow \xi(\omega)$[1], 且 $\xi(\omega)$ 有界或属于 $\mathscr{L}$, 則 $\xi \in \mathscr{H}$.

引理 1.2. 如 $\mathscr{L}$-系 $\mathscr{H}$ 包含 π-系 $\mathscr{C}$ 中一切集的示性函数[2], 則 $\mathscr{H}$ 包含 $\mathscr{L}$ 中一切关于 $\sigma(\mathscr{C})$ 可测的函数.

証. 具有属于 $\mathscr{H}$ 的示性函数的集构成 λ-系 $\mathscr{F}$. 既然 $\mathscr{F} \supseteq \mathscr{C}$, 故由引理 1.1, $\mathscr{F} \supseteq \sigma(\mathscr{C})$.

設 ξ 为属于 $\mathscr{L}$ 而且关于 $\sigma(\mathscr{C})$ 可测的非負函数. 令

$$\Gamma_{kn} = \left\{\frac{k}{2^n} \leqslant \xi(\omega) < \frac{k+1}{2^n}\right\};$$

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{2^{2n}} \frac{k}{2^n} \chi_{\Gamma_{kn}}.$$

显然, $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$, 且由 1.2. Б$_3$, $\xi \in \mathscr{H}$.

由于 1.2. A 任意 $\sigma(\mathscr{C})$-可測函数 $\eta \in \mathscr{L}$ 可表为 $\mathscr{L}$ 中二非負 $\sigma(\mathscr{C})$-可測函数之差. 如上所証, 后二者均属于 $\mathscr{H}$. 因此 $\eta \in \mathscr{H}$.

1.3. 令 $\mathscr{A}_i$ 为集 Ω_i 的子集 σ-代数 $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 我們以 $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ 表示全体 $(\omega_1, \cdots, \omega_n)$, 其中 $\omega_i \in \Omega_i$, 又以 $\mathscr{A}_1 \times \cdots \times \mathscr{A}_n$ 表由形如 $A_1 \times \cdots \times A_n$, $A_i \in \mathscr{A}_i$ 的諸子集所产生的 σ-代数(我們指出, 諸集 $A_1 \times \cdots \times A_n$ 組成 π-系). 当 $\Omega_1 = \cdots = \Omega_n = \Omega$ 时, 我們用 Ω^n 代替 $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$, 当 $\mathscr{A}_1 = \cdots = \mathscr{A}_n = \mathscr{A}$ 时, 以 $\mathscr{A}^n$ 代替 $\mathscr{A}_1 \times \cdots \times \mathscr{A}_n$.

今設已給空間 Ω_i 的无穷序列, 以及每空間 Ω_i 中的子集 σ-代数 $\mathscr{A}_i$. 我們以 $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n \times \cdots$ 表序列 $(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots)$, $\omega_i \in \Omega_i$, 所成的空間, 以 $\mathscr{A}_1 \times \cdots \times \mathscr{A}_n \times \cdots$ 表此空間中由子集

---

1) 如 $a_n \to a$ 且 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots$, 則記作 $a_n \uparrow a$. 同样, 記号 $a_n \downarrow a$ 表 $a_n \to a$ 而且 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant \cdots$.

2) 我們称函数

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & 如\ \omega \in A, \\ 0, & 如\ \omega \bar{\in} A \end{cases}$$

为集 A 的示性函数(或特征函数).

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times \cdots \tag{1.1}$$
$$(n = 1, 2, \cdots; \quad A_i \in \mathscr{A}_i)$$
所产生的 σ–代数.

当因子均相同时，縮写为 Ω^∞ 及 $\mathscr{A}^\infty$. 我們指出，形如(1.1)的子集全体是 π–系.

引理 1.3. 令 α_i 为 $(\Omega, \mathscr{A})$ 到 $(\Omega_i, \mathscr{A}_i)$ 的可測映象 (i 或取值 $1, 2, \cdots, n$, 或取一切自然数为值)，則由公式
$$\alpha(\omega) = \{\alpha_1(\omega), \alpha_2(\omega), \cdots\}$$
所定义的空間 $(\Omega, \mathscr{A})$ 到 $(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots, \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \times \cdots)$ 的映象 α 是可測的.

証. 为确定計，設 i 取一切自然数为值. $\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \times \cdots$ 中，在映象 α 下，完全原象属于 $\mathscr{A}$ 的集合的总体，显然是 σ–代数. 这 σ–代数包含一切形如(1.1)的集. 因此它包含 $\mathscr{A}_1 \times \times \mathscr{A}_2 \times \cdots$.

引理 1.4. 設 $\mathscr{A}_i$ 是空間 $\Omega_i (i = 1, 2)$ 的子集 σ–代数，又設 $f(\omega_1, \omega_2) (\omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2)$ 是 $\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2$– 可測函数，則对任意固定的 $\omega_2 \in \Omega_2$, $f(\omega_1, \omega_2)$ 是 ω_1 的 $\mathscr{A}_1$– 可測函数.

証. 以 $\mathscr{L}$ 表空間 $\Omega_1 \times \Omega_2$ 上所有的函数全体. 使引理正确的全体函数 $f(\omega_1, \omega_2)$ 所成的系 $\mathscr{H}$，显然是 $\mathscr{L}$–系. 此系包含任意集 $A_1 \times A_2$ 的示性函数. 根据引理 1.2，它包含一切关于 σ–代数 $\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2$ 可測的函数.

引理 1.5. 設对应于某集 T 中每一 t，有一取值于可測空間 $(E, \mathscr{B})$ 的函数 $x_t(\omega) (\omega \in \Omega)$. 为使函数 $\xi(\omega) (\omega \in \Omega)$ 关于由集 $\{\omega: x_t(\omega) \in \Gamma\} (t \in T, \Gamma \in \mathscr{B})$ 所产生的 σ–代数 $\mathscr{N}_T$ 可測，必須且只需
$$\xi(\omega) = f[x_{t_1}(\omega), x_{t_2}(\omega), \cdots, x_{t_n}(\omega), \cdots], \tag{1.2}$$
其中 $t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots \in T$ 而且 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ 是空間 E^∞ 中的 $\mathscr{B}^\infty$–可測函数.

証. 由公式(1.2)定义的、Ω 到数直綫 $I_{-\infty}^{+\infty} = (-\infty, \infty)$ 的映象，可表为乘积 $f\alpha$，其中

$$\alpha(\omega)=\{x_{t_1}(\omega),\ x_{t_2}(\omega),\ \cdots,\ x_{t_n}(\omega),\ \cdots\}.$$

对任 $t\in T$, $x_t(\omega)$ 决定一个 $(\Omega,\ \mathscr{N}_T)$ 到 $(E,\ \mathscr{B})$ 的可測映象. 由引理 1.3, α 是 $(\Omega,\ \mathscr{N}_T)$ 到 $(E^\infty,\ \mathscr{B}^\infty)$ 的可測映象. 按条件, f 决定 $(E^\infty,\ \mathscr{B}^\infty)$ 到 $(I_{+\infty}^{-\infty},\ \mathscr{B}_{+\infty}^{-\infty})$ 的可測映象. 因此 $\xi=f\alpha$ 是 $(\Omega,\ \mathscr{N}_T)$ 到 $(I_{+\infty}^{-\infty},\ \mathscr{B}_{+\infty}^{-\infty})$ 的可測映象. 从而形为(1.2)的一切函数为 $\mathscr{N}_T$-可測.

今以 $\mathscr{L}$ 表全体函数 $\xi(\omega)(\omega\in\Omega)$, $\mathscr{H}$ 表形为(1.2)的函数 ξ 的集, 又 $\mathscr{C}$ 表形为

$$\{x_{t_1}\in\Gamma_1,\ \cdots,\ x_{t_n}\in\Gamma_n\} \tag{1.3}$$

$$(n=1,2,\cdots;\ t_1,\ \cdots,\ t_n\in T;\ \Gamma_1,\ \cdots,\ \Gamma_n\in\mathscr{B})$$

的全体 ω-集所成的集系.

集(1.3)的示性函数等于

$$\chi_{\Gamma_1}[x_{t_1}(\omega)]\cdots\chi_{\Gamma_n}[x_{t_n}(\omega)].$$

因此, 它可表为(1.2)的形状而属于 $\mathscr{H}$. 显然, $\mathscr{H}$ 是 $\mathscr{L}$-系, 而 $\mathscr{C}$ 是 π-系, 故由定理 1.2, $\mathscr{H}$ 包含一切关于 $\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{N}_T$ 可測的函数 $\xi(\omega)$.

§ 2. 測度与积分

1.4. 設 $(\Omega,\ \mathscr{M})$为某可測空間. 非負函数 $\varphi(A)(A\in\mathscr{M})$ 称为**測度**[1], 如对 $\mathscr{M}$ 中任意有限或可数多个两两不相交的集 A_1, $A_2,\cdots$, $\varphi(\bigcup A_k)=\sum\varphi(A_k)$. 滿足条件 $\varphi(\Omega)=1$ 的測度称为**概率測度**.

設 φ 为 σ-代数 $\mathscr{M}$ 上的測度. 令 f 为定义在空間 Ω 的某子集 Ω_f 上的 $\mathscr{M}$-可測函数, 又設 A 含于 Ω_f. 我們說, f 在集 A 上 φ-**可积**, 如存在有限极限

1) 1.4 节中的一切定义与論断, 都可不难地移用于当函数 $\varphi(A)$, 除取有限值外, 还取 $+\infty$ 为值的情形(特别, 无穷直綫上的普通勒貝格測度便是这种函数). 然而, 我們只会在一些特殊例子中碰到这类函数, 因此, 凡未特别声明的地方, 測度 φ 都将理解为只取有限值的函数.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{0}^{+\infty}\frac{k}{n}\varphi\left\{\omega:\omega\in A,\ \frac{k}{n}<f(\omega)\leqslant\frac{k+1}{n}\right\}$$

及

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{-\infty}\frac{k+1}{n}\varphi\left\{\omega:\omega\in A,\ \frac{k}{n}<f(\omega)\leqslant\frac{k+1}{n}\right\}^{1)}.$$

这些极限的和称为函数 f 在集 A 上按测度 φ 的积分(勒貝格),并記为

$$\int_A f(\omega)\varphi(d\omega).$$

如上二极限中有一为无穷,而另一为有穷,則認为积分值是 $\pm\infty$(第一极限为无穷时取 $+\infty$,第二极限无穷时取 $-\infty$).

我們假定讀者已熟悉勒貝格积分的基本性質. 特别地,下列性質今后会起重要作用:

1.4. A. 如 $0\leqslant f_n(\omega)\uparrow f(\omega)$ 对一切 $\omega\in A$ 成立,則

$$\lim\int_A f_n(\omega)\varphi(d\omega)=\int_A f(\omega)\varphi(d\omega). \tag{1.4}$$

1.4. Б. 如对一切 $\omega\in A$, $f_n(\omega)\to f(\omega)$, $|f_n(\omega)|<g(\omega)$ 且 g 在 A 上 φ-可积,則

$$\lim\int_A f_n(\omega)\varphi(d\omega)=\int_A f(\omega)\varphi(d\omega). \tag{1.5}$$

1.4. B.(富比尼定理). 令 $\mathscr{M}_i$ 为 Ω_i 中 σ-代数,φ_i 是 $\mathscr{M}_i$ 上測度($i=1,2$). 設 $f(\omega_1,\omega_2)$ 是 $\Omega_1\times\Omega_2$ 上 $\mathscr{M}_1\times\mathscr{M}_2$-可測函数,且

$$\int_{\Omega_1}\left[\int_{\Omega_2}|f(\omega_1,\omega_2)|\varphi_2(d\omega_2)\right]\varphi_1(d\omega_1)<\infty,$$

則

$$\int_{\Omega_1}\left[\int_{\Omega_2}f(\omega_1,\omega_2)\varphi_2(d\omega_2)\right]\varphi_1(d\omega_1)=$$
$$=\int_{\Omega_2}\left[\int_{\Omega_1}f(\omega_1,\omega_2)\varphi_1(d\omega_1)\right]\varphi_2(d\omega_2)^{2)}. \tag{1.6}$$

1) 当說到 φ-可积函数而未指出集 A 时,則是指在全定义域上 φ-可积函数.

2) 如 f 非負,則要求等式(1.6)中左方积分的絕对收斂性条件是多余的.

下面性質是 1.4. A 的特殊情形:

1.4. A_1. 如 $A_n \uparrow A$,則 $\varphi(A_n) \uparrow \varphi(A)$.

1.5. 試証两个有用的引理.

引理 1.6. 設 α 为 $(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ 到 $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$的可測映象,又 φ 是 $\mathscr{A}_1$ 上測度,則公式

$$\psi(\Gamma) = \varphi\{\alpha(\omega) \in \Gamma\} \quad (\Gamma \in \mathscr{A}_2) \tag{1.7}$$

定义 $\mathscr{A}_2$ 上一測度. 对任意 $\mathscr{A}_2$-可測函数 f

$$\int_{\Omega_2} f(\omega_2)\,\psi(d\omega_2) = \int_{\Omega_1} f[\alpha(\omega_1)]\varphi(d\omega_1) \tag{1.8}$$

(更精确些,如这二积分中至少有一个存在,則另一个也存在,且二积分相等).

証. 引理的第一个結論是明显的.

以 $\mathscr{L}$ 表一切 ψ-可积函数的总体. 显然,使等式(1.8)成立的全体函数构成 $\mathscr{L}$-系. 此系包含 $\mathscr{A}_2$ 中任一集的示性函数. 按引理 1.2 它包含 $\mathscr{L}$ 中一切 $\mathscr{A}_2$-可測函数. 因此,如对 f (1.8)左方的积分存在,則 f 滿足(1.8). 同样驗証,(1.8)对任意使(1.8)右方的积分存在的函数 f 成立.

引理 1.7. 設 U, V, Z 为三空間; $\mathscr{A}_U, \mathscr{A}_V, \mathscr{A}_Z$ 为这些空間的子集 σ-代数; $F(u, z)$ $(u \in U, z \in Z)$ 为关于 $\mathscr{A}_U \times \mathscr{A}_Z$ 可測的函数; $\mathbf{P}_v(v \in V)$ 是 σ-代数 $\mathscr{A}_Z$ 上的測度, 并且对任意 $\Gamma \in \mathscr{A}_Z$,函数 $\mathbf{P}_v(\Gamma)$ $\mathscr{A}_V$-可測. 如积分

$$G(u, v) = \int_Z F(u, z)\mathbf{P}_v(dz) \tag{1.9}$$

对一切 $u \in U$, $v \in V$ 收斂,則它是 $\mathscr{A}_U \times \mathscr{A}_V$-可測函数[1].

証. 以 $\mathscr{L}$ 表全体使积分 $\int_Z F(u, z)\mathbf{P}_v(dz)$ 对一切 $u \in U$, $v \in V$ 收斂的 $\mathscr{A}_U \times \mathscr{A}_V$-可測函数 $F(u, z)$. 使 $G(u, v)$ 为 $\mathscr{A}_U \times \mathscr{A}_V$-可測的全体函数 $F(u, z)$ 的系 $\mathscr{H}$ 显然是 $\mathscr{L}$-系. 它包含任意集 $A_U \times A_Z(A_U \in \mathscr{A}_U, A_Z \in \mathscr{A}_Z)$的示性函数. 因为

1) 如函数 F 非負,則要求积分的收斂是多余的.

这些集构成 π-系，故按引理 1.2，$\mathscr{H}$ 包含 $\mathscr{L}$ 中一切 $\mathscr{A}_U\times\mathscr{A}_Z$-可测函数。

§3. 条件概率与条件数学期望

1.6. 总体 $(\Omega, \mathscr{M}, \mathbf{P})$ 称为概率空間，其中 Ω 为某集，$\mathscr{M}$ 为它的子集 σ-代数，$\mathbf{P}$ 为 $\mathscr{M}$ 上的概率測度. Ω 的点称为基本事件，$\mathscr{M}$ 中之元为事件，值 $\mathbf{P}(A)$ 为事件的概率. 每一 $\mathscr{M}$-可測函数 $\xi(\omega)(\omega\in\Omega)$ 称为随机变量. 积分 $\int_\Omega \xi(\omega)\mathbf{P}(d\omega)$（如它有意义）称为 ξ 的数学期望并記为 $\mathbf{M}\xi$. 不是定义在全空間 Ω 上，而只是定义在它的子集 Ω_ξ 上的 $\mathscr{M}$-可測函数 ξ，我們也称为随机变量（由 ξ 的 $\mathscr{M}$-可測性得 $\Omega_\xi\in\mathscr{M}$）. 这种随机变量的数学期望定义为

$$\mathbf{M}\xi=\int_{\Omega_\xi}\xi(\omega)\mathbf{P}(d\omega).$$

設 $\tilde{\Omega}\subseteq\Omega$ 且 $\varphi(\omega)$ 及 $\psi(\omega)$ 为二函数，它們的定义域包含 $\tilde{\Omega}$. 如果 $\mathbf{P}(\tilde{\Omega}, \varphi\neq\psi)=0$，則我們說 $\varphi=\psi$ 在 $\tilde{\Omega}$ 上几乎正确（在測度 $\mathbf{P}$ 的意义下），并写成

$$\varphi=\psi\quad(\text{п. н. }\tilde{\Omega}, \mathbf{P}).$$

表达式

$$\varphi<\psi\ (\text{п. н. }\tilde{\Omega}, \mathbf{P}),\qquad \varphi_n\to\varphi\ (\text{п. н. }\tilde{\Omega}, \mathbf{P})$$

等等的意义都类似.

設 $\mathscr{A}$ 为 $\tilde{\Omega}\subseteq\Omega$ 中的 σ-代数，并且 $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{M}$. 又設函数 $\xi(\omega)$ 在集 $\tilde{\Omega}$ 上为 $\mathbf{P}$-可积. 我們定义 ξ 关于 $\mathscr{A}$ 的条件数学期望为如下的任意 $\mathscr{A}$-可測函数（記为 $\mathbf{M}(\xi|\mathscr{A})$），它对任一 $A\in\mathscr{A}$，滿足关系式

$$\int_A\xi(\omega)\mathbf{P}(d\omega)=\int_A\mathbf{M}(\xi|\mathscr{A})\mathbf{P}(d\omega).\qquad(1.10)$$

可以証明，这样的函数恆存在. 容易看到，除 σ-代数 $\mathscr{A}$ 中任意有 $\mathbf{P}$ 測度为 0 的集外，它被确定. 既然从等式 $\mathbf{M}(\xi|\mathscr{A})=\varphi$ 及 $\mathbf{M}(\xi|\mathscr{A})=\psi$ 尚不能断定 $\varphi(\omega)=\psi(\omega)$ 对一切 ω 成立，而