上海交通大学

工程数学试题解析

（线性代数与概率统计）

上海交通大学工程数学教研室　编

科学出版社
Science Press

内 容 简 介

本书汇编了上海交通大学1991年至2001年（即九一级至〇〇级）工程数学部分课程的考试试题及解答，其中线性代数22份试卷，概率论与数理统计17份试卷.

本书另附1990年至2001年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题中的线性代数和概率统计的全部试题及答案.

本书读者对象为各类高等院校的教师，工科院校的学生以及成人高校、电大的学生.

图书在版编目（CIP）数据

工程数学试题解析（线性代数与概率统计）/上海交通大学工程数学教研室编. -北京：科学出版社，2001.8

ISBN 7-03-009461-1

Ⅰ.工… Ⅱ.上… Ⅲ.工程数学-高等学校-解题 Ⅳ.TB11-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第044761号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

科地亚印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001年8月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2001年8月第一次印刷 印张：20

印数：1—5 000 字数：464 000

定价:28.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉）

前　言

上海交通大学是我国“211 工程”与“985 工程”重点投资建设的百年高等学府，“起点高、基础厚、要求严、重实践、求创新”是历来的办学传统．近十多年来，上海交通大学对学生数学基础的要求以及对学生数学素质的培养在逐年提高，从它历年的工程数学试题中可见一斑．

本书给出的上海交通大学线性代数与概率统计历届的试题，内容充实，形式多样，知识点广，深浅得当．其中既有很多体现本课程要求的基本题，又有一些难度稍大、略带技巧性的综合题，还有具有实际意义的应用题．对所有这些题目，本书都逐一给以详尽的解答．解题方法力求简明扼要，步骤清楚，通俗易懂．

由于上述特点，本书具有比较广泛的适用性．广大工科院校师生、成人高校师生及参加自学、函授或网络教学的读者，都可将本书作为辅导参考材料．此外，本书也将对本科生考研复习起到促进作用．

编者希望，本书的出版能帮助读者用不太长的时间，花费不很多的精力，对所学过的线性代数与概率统计课程起到复习、巩固和提高的作用．

本书的编写工作由冯卫国、童品苗同志负责．第一篇线性代数由冯卫国、吴忠英、张忆同志编写．第二篇概率论与数理统计由王素芳、冯卫国、武爱文、童品苗同志编写．全书由李世栋同志审核，张江峰同志校对．在编写过程中得到我校应用数学系领导和广大教师的关心和帮助，工程数学教研室的许多教师对历年命题工作付出了艰辛的劳动，科学出版社的吕虹、陈玉琢、黄华斌同志也为本书的编辑出版附出了辛劳，在此一并致谢．

限于水平，加之时间仓促，不妥甚至错误之处恐还难免，敬请广大读者给予批评指正．

编　者
2001 年 6 月于上海交通大学

目　　录

第一篇　线性代数试题及题解

第二篇　概率论与数理统计试题及题解

第一篇　线性代数试题及题解

1991 年试题

一、选择与填空

1. 若 n 阶方阵 A 中所有 $k(<n)$ 阶子式都为零,则方阵 A 为______.

a. 奇异矩阵;　b. 非奇异阵;　c. 两者均可能.

2. 若 $|A|\neq 0$,则 A^{-1} 为______.

a. 满秩矩阵;　b. 降秩矩阵;　c. 两者均可能.

3. 若矩阵 A 与 B 相似,则下列结论正确的是______.

a. 若 A 可逆,则 B 不可逆;　b. 若 A 可逆,则 B 也可逆;　c. 两者均可逆.

4. 设 A 为 n 阶方阵,则______.

a. $|-A|\neq 0$;　b. $|-A|=-|A|$;　c. $|-A|=(-1)^n|A|$.

5. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出,且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,则______.

a. $s\leqslant t$;　b. $s=t$;　c. $s\geqslant t$.

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 为齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 基础解系,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 为非齐次线性方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 的两个解向量,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ ______.

a. 线性相关;　b. 线性无关;　c. 两者都可能.

7. 正交矩阵的行(列)向量______.

a. 线性相关;　b. 线性无关;　c. 不一定.

8. 设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,任一 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 都是齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的解向量,则 $r(A)=$ ______. 写出方程组的一组基础解系__________________.

9. 二次型 $f=X^{\mathrm{T}}AX$ 经过满秩线性变换 $X=CY$ 化为变量为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的二次型,此二次型的矩阵为______,它和矩阵 A ______.

a. 合同;　b. 相似;　c. 无关系.

10. 设 n 阶方阵 A 可逆,则______不可以作为 A 的特征值.

a. -1;　b. 0;　c. 1.

11. 在齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 中,$A=(a_{ij})_{m\times n}$,$r(A)=r$. 则其解空间是______.

a. m 维;　b. $m-r$ 维;　c. $n-r$ 维.

12. 在线性空间 R^2 中. 定义线性变换 $\mathscr{A}$:

$$\mathscr{A}(x_1,x_2)=(x_2,x_1).$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0)$,$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1)$ 为 R^2 中的基向量. 则

$\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1=$______, $\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2=$______;

$\mathscr{A}$在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 下的矩阵为______.

二、计算与证明

1. 设 A 为三阶方阵,$|A|=\frac{1}{3}$,求行列式$|3A^*-(2A)^{-1}|$之值.其中 A^* 为 A 的伴随矩阵.

2. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关,问向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$ 是否线性相关? 并证明你的结论.

3. 设向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\5\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1-b\\-3\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1-a\\3\end{pmatrix}.$$

(1)a,b 为何值时,向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不能表示成$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合?

(2)a,b 为何值时,向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 惟一地线性表出? 并写出此表达式.

4. 求正交代换 $X=CY$,并用此代换将二次型

$$f=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

化为标准形.

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别为线性空间 R^3 中的两组基,且

$$\begin{cases}\beta_1=\alpha_1 \qquad -\alpha_3,\\ \beta_2= \qquad 3\alpha_2+\alpha_3,\\ \beta_3=\alpha_1+2\alpha_2.\end{cases}$$

(1)若向量 $\boldsymbol{\xi}=2\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3$,求 $\boldsymbol{\xi}$ 在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标;

(2)若向量 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3$,求 $\boldsymbol{\eta}$ 在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标.

6. 已知三阶矩阵 A 的特征值分别为 $-1,1,2$.设矩阵 $B=A^2+2A$.求

(1)B 的特征值及相似对角形;

(2)行列式$|B|$和$|A^2-3A+E|$之值.

解 答

一、选择与填空

1. 选 a 由 Laplace 定理得 n 阶行列式等于零.

2. 选 a. 因为可逆阵的逆阵仍为可逆阵.

3. 选 b. 这是相似矩阵的性质之一.

4. 选 c. 根据矩阵数乘与行列式性质得出.

5. 选 a. 这是向量组关系中的一个重要定理.

6. 选 a. 由方程组解向量的性质可得

$$\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2=\sum_{i=1}^{k}l_i\boldsymbol{\alpha}_i.$$

7. 选 b. 因为正交的向量组必线性无关.

8. $r(A)=0$;基础解系为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$.其中

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = (0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}, \qquad i = 1,2,\cdots,n.$$

9. $C^{\mathrm{T}}AC$;选 a.

10. 选 b. 因为 $|A|\neq 0$. 而 $|A|$ 等于 A 的所有特征值之积.

11. 选 c. 根据基础解系的有关定理.

12. $\boldsymbol{\varepsilon}_2$;$\boldsymbol{\varepsilon}_1$;$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

二、计算与证明

1. $$|3A^* - (2A)^{-1}| = \left|3|A|A^{-1} - \frac{1}{2}A^{-1}\right| = \left|\frac{1}{2}A^{-1}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^3 |A|^{-1} = \frac{3}{8}.$$

2. 线性无关.证明如下:

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关,所以存在数 k、l,使

$$\boldsymbol{\alpha}_4 = k\boldsymbol{\alpha}_1 + l\boldsymbol{\alpha}_2.$$

不妨设向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3,4)$为列向量,记矩阵$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4)=A$.对 A 进行列初等变换

$$r(A) = r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_4) = r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3 - k\boldsymbol{\alpha}_1 - l\boldsymbol{\alpha}_2) \xlongequal{kC_1 + lC_2 + C_3 \to C_3} r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = 3.$$

因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

3. 设向量方程 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}$.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 3 & 1-b & -2\\ 3 & 1 & 5 & -3 & 1-a\\ 1 & 0 & 3 & -1 & 3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 3-b & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4-a\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 3-b & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & b-3 & 4-a\end{pmatrix}.$$

(1) 当 $b=3,a\neq 4$ 时,$\boldsymbol{\beta}$ 不能表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合;

(2)当 $b\neq 3$,a 为任意数时,$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 惟一地线性表出.

由上面最后一个矩阵得方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 \quad - \quad x_4 = -1,\\ x_2 - x_3 + (3-b)x_4 = 0,\\ x_3 = 4,\\ (b-3)x_4 = 4-a \end{cases}$$

解得 $x_1=\dfrac{31-a-9b}{b-3}, x_2=8-a, x_3=4, x_4=\dfrac{4-a}{b-3}$.

故 $\boldsymbol{\beta}=\dfrac{31-a-9b}{b-3}\boldsymbol{\alpha}_1+(8-a)\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3+\dfrac{4-a}{b-3}\boldsymbol{\alpha}_4$.

4. 二次型 f 的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}.$$

由 A 的特征方程

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&1\\-1&1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-3\lambda+2$$
$$=(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0,$$

得 A 的特征值

$$\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-2.$$

与 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 对应的齐次线性方程组 $(E-A)X=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 正交化，单位化得

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

与 $\lambda_3=-2$ 对应的齐次线性方程组 $(-2E-A)X=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{e}_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

令矩阵 $Q=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ 则所求正交代换为 $X=QY$，即

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1+\dfrac{1}{\sqrt{6}}y_2-\dfrac{1}{\sqrt{3}}y_3,\\ x_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1-\dfrac{1}{\sqrt{6}}y_2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}y_3,\\ x_3=\dfrac{2}{\sqrt{6}}y_2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}y_3.\end{cases}$$

从而，原二次型的标准形为

$$f=y_1^2+y_2^2-2y_3^2.$$

5.(1) 由题设得

$$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&3&2\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}3\\-1\\-3\end{pmatrix}.$$

由此知向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$(2)\ \boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

所以向量 $\boldsymbol{\eta}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$.

6.(1)记 $g(A)=A^2+2A=B$.设 λ 为 A 的特征值.则 $g(\lambda)=\lambda^2+2\lambda$ 为矩阵 $g(A)$ 的特征值.所以 B 的特征值分别为 $g(-1)=-1,g(1)=3,g(2)=8$.从而 B 的相似对角形为 $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 3 & \\ & & 8 \end{pmatrix}$.

(2)由于矩阵的行列式的值等于该矩阵的全部特征值之积.所以 $|B|=-1\times3\times8=-24$.

仿(1)求得矩阵 A^2-3A+E 的全部特征值为 $5,-1,-1$,所以 $|A^2-3A+E|=5$.

1992 年试题

一、是非题

1. 若 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 可线性表出任一 n 维向量，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性无关的. (　　)

2. 设 $m\times n$ 型矩阵 A 的秩为 r，线性方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0})$ 有特解 $\boldsymbol{r}_0$，若相应的齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$，则

(1) $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r},\boldsymbol{r}_0$ 是线性无关的. (　　)

(2) $\boldsymbol{\beta}_0=\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 的线性相关的解向量. (　　)

3. 设 A 为 n 阶方阵，若多项式

$$f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

其中 $m\geqslant1,a_0\neq0$，使 $f(A)=O$，则 A 的特征值必全不为零. (　　)

4. 若三阶实对称矩阵 A 的各阶顺序主子式均小于零，则 A 是负定矩阵. (　　)

5. 在元素是次数不超过 $n-1$ 的多项式的 n 维线性空间中，定义变换 $\mathscr{D}$ 为多项式的求导，则 $\mathscr{D}$ 不是一个线性变换. (　　)

二、填空题

1. 当 $k=$______时，向量组 $\begin{pmatrix}6\\k+1\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}k\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}k\\1\\0\end{pmatrix}$ 线性相关.

2. 设 A 为四阶方阵，$|A|=-\dfrac{1}{2}$，A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $|2A^*|=$ ______.

3. A 为给定的 n 阶方阵，且满足：$A^2-3A-2E=0$，则 $A^{-1}=$______.

4. n 阶方阵 A 满足 $A^2=A$，若 $r(A)=k$，则 $r(A-E)=$______.

5. 若矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$ 相似，则 $x=$______.

6. 设 A 为 n 阶方阵，且 $AA^{\mathrm{T}}=E,|A|=-1$，则 $|E+A|=$______.

7. 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$，则以 A^{-1} 为矩阵的二次型为 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=$ ____________.

8. 设 V 为次数不超过 2 的实系数多项式(包含零多项式)所构成的线性空间，$x^2+x,x^2-x,x+1$ 为 V 的一个基底，则 $2x^2+7x+3$ 在这个基底下的坐标为____________.

三、计算与证明

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&4&-3\\3&5&6&-4\\4&5&-2&3\\3&8&24&-19\end{pmatrix}$，试求一秩为 2 的四阶方阵 B，使 $AB=O$.

2. 设三阶实数矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$满足条件：

(i) $a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,3)$ A_{ij}为a_{ij}的代数余子式；

(ii) $a_{33}=-1$.

试求(1)A 的行列式的值；

(2)方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 的解，其中 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

3. 设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1},\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，但不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$线性表出. 证明：向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1},\boldsymbol{\alpha}_s$ 与向量组(Ⅱ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1},\boldsymbol{\beta}$ 等价.

4. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是三阶方阵 A 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是其对应的三个线性无关的特征向量，试求 $A-\lambda_1E$ 的全部特征值及其特征向量.

5. 试求一正交代换 $X=QY$，并用此代换将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+6x_3^2-4x_1x_2$$

化为标准形.

6. 设线性变换 $\mathscr{A}$ 在基底

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&1\\1&0&3&2\\2&1&0&1\end{pmatrix}$，试求

(1)$\mathscr{A}$ 在基底 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的矩阵，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(2)向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ 及象 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的坐标.

解　答

一、是非题

1．是．　因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与基向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 等价．

2．是．　若相关，$\boldsymbol{r}_0$ 可由 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$表出，便不是 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 的解．

非．因为 $r(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{\eta}_{n-r})=r(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r})=n-r+1$．

3．是．　若不然，$f(0)=a_0(\neq 0)$为零矩阵 $f(A)$的特征值，这不可能．

4．非．　反例：$A=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$满足题设条件．但非负定距阵．

5．非．　由定义知，微分变换是线性变换．

二、填空题

1．$-\dfrac{3}{2}$或 4．　　由$\begin{vmatrix}6&k&k\\k+1&2&1\\7&2&0\end{vmatrix}=0$ 解得．

2．-2．　　$|2A^*|=|2|A|A^{-1}|=|-A^{-1}|=|A^{-1}|=|A|^{-1}=-2$．

3．$\dfrac{1}{2}(A-3E)$．　　将原式变形为 $A\dfrac{A-3E}{2}=E$．

4．$n-k$．　将 $A-E$ 的列向量视作方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的解向量，且可由其基础解系线性表出，进而推得结果．

5．0．　由"相似矩阵有相同的特征值"推出．

6．0．　利用题设条件及行列式性质推出

$$|E+A|=-|E+A|.$$

7．　$\dfrac{2}{3}x_3^2+\dfrac{2}{3}x_4^2+2x_1x_2-\dfrac{2}{3}x_3x_4$．

8．$(3,-1,3)^{\mathrm{T}}$．

三、计算与证明

1．通过求方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的基础解系来构造 B．

$$A=\begin{pmatrix}1&2&4&-3\\3&5&6&-4\\4&5&-2&3\\3&8&24&-19\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&4&-3\\0&-1&-6&5\\1&0&-8&7\\0&3&18&-15\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&4&-3\\0&1&6&-5\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-8&7\\0&1&6&-5\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

方程组的基础解系为$(8,-6,1,0)^{\mathrm{T}},(-7,5,0,1)^{\mathrm{T}}$．

取 $B=\begin{pmatrix} 8 & -7 & 0 & 0 \\ -6 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 满足 $r(B)=2$ 与 $AB=O$.

注:显然本题答案不惟一.

2.(1) $|A| = \sum_{j=1}^{3} a_{3j}A_{3j} = a_{31}^2 + a_{32}^2 + 1 \neq 0$. A 可逆.于是

$$\frac{1}{|A|} = |A^{-1}| = \left|\frac{A^*}{|A|}\right| = \frac{|A^*|}{|A|^3} = \frac{|A^{\mathrm{T}}|}{|A|^3} = \frac{|A|}{|A|^3} = \frac{1}{|A|^2},$$

从而$|A|=1$.

(2) 由(1)得 $a_{31}=a_{32}=0$. 又 A^{-1}存在.故方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 有惟一解

$$X = A^{-1}\boldsymbol{\beta} = A^*\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ A_{13} & A_{23} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. 只要能证明向量 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组(Ⅱ)线性表出,则向量组(Ⅰ)、(Ⅱ)便可互相线性表出,从而向量组(Ⅰ)、(Ⅱ)等价.

由题设知,向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1},\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出,即存在数 $k_1,\cdots,k_{s-1},k_s$,使

$$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_{s-1}\boldsymbol{\alpha}_{s-1} + k_s\boldsymbol{\alpha}_s.$$

由于 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$线性表出,所以 $k_s\neq 0$. 于是

$$\boldsymbol{\alpha}_s = \frac{1}{k_s}\boldsymbol{\beta} - \frac{k_1}{k_s}\boldsymbol{\alpha}_1 - \cdots - \frac{k_{s-1}}{k_s}\boldsymbol{\alpha}_{s-1}.$$

即向量 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组(Ⅱ)线性表出.

4. 由题设知 $A\boldsymbol{\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i$, $i=1,2,3$,

$$(A-\lambda_1E)\boldsymbol{\alpha}_i = A\boldsymbol{\alpha}_i - \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_i = \lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i - \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_i = (\lambda_i-\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_i.$$

将 $i=1,2,3$ 代入上式得 $A-\lambda_1E$ 的全部特征值 $0,\lambda_2-\lambda_1,\lambda_3-\lambda_1$,对应这些特征值的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.

5. 二次型 f 的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

由 A 的特征方程

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-5 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-6)^2 = 0,$$

得 A 的特征值1,6,6.

与1对应的方程组$(E-A)X=\mathbf{0}$ 的基础解系为$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,单位化得 $\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

与 6 对应的方程组$(6E-A)X=\mathbf{0}$的基础解系为$\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，且已正交化，单位化得

$\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

令矩阵$Q=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$则所求正交代换为$X=QY$，即

$$\begin{cases}x_1=\frac{2}{\sqrt{5}}y_1-\frac{1}{\sqrt{5}}y_2,\\ x_2=\frac{1}{\sqrt{5}}y_1+\frac{2}{\sqrt{5}}y_2,\\ x_3=y_3.\end{cases}$$

经此正交代换后原二次型的标准形为

$$f=y_1^2+6y_2^2+6y_3^2.$$

6.(1)由题设知$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)A$，

$$\begin{aligned}&\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\\
&=\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}\\
&=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}\\
&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}^{-1}A\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}\\
&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}4&3&2&1\\0&1&1&0\\2&1&2&1\\-2&-3&-4&-1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

所以$\mathscr{A}$在基底$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$下的矩阵为$\begin{pmatrix}4&3&2&1\\0&1&1&0\\2&1&2&1\\-2&-3&-4&-1\end{pmatrix}$.

$$(2)\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{\beta}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的坐标为 $(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$. 故其坐标为 $(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})=\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}4&3&2&1\\0&1&1&0\\2&1&2&1\\-2&-3&-4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}10\\2\\6\\-10\end{pmatrix},$$

所以 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的坐标为 $(10,2,6,-10)^{\mathrm{T}}$.

1993 年试题

一、是非题

1. 若矩阵 A 有一个 r 阶子式为零，则 $r(A)\leqslant r$. ( )

2. 若矩阵 A 为正交矩阵，则其伴随矩阵 A^* 必定也为正交矩阵. ( )

3. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，则其中任何一个向量都不能由其余向量线性表出. ( )

4. 设 $|A|>0$，则矩阵 A 的特征值均大于零. ( )

5. 对任意的 $x_1\neq 0, x_2\neq 0,\cdots,x_n\neq 0$，二次齐次式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0$，则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定二次型. ( )

6. 若方程组 $AX=\mathbf{0}$ 只有零解，则非齐次线性方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 必有惟一解. ( )

7. n 阶方阵 A 可以对角化的充要条件是该方阵有 n 个两两正交的特征向量. ( )

8. 设 A 为可逆方阵，则 AA^{T} 为正定矩阵. ( )

9. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，A 为 m 阶方阵，$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)A$，则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充要条件是 $r(A)=m$. ( )

10. 三阶正交矩阵的全体，对于矩阵的加法与数乘运算，构成实数域上的线性空间. ( )

二、选择题

1. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，则当 $r(A)=$______时，方程组 $AX=\mathbf{0}$ 只有零解.

   a.0； b.1； c. m； d. n.

2. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,3,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(2,-5,-1)$ 的秩为______.

   a.1； b.2； c.3； d.4.

3. 方程 $(1\quad 2\quad -1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(2)$ 的通解为______，其中 k,l 为任意常数.

   a. $k\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$；　　b. $k\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$；

   c. $\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$；　　d. $\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

4. 设 A 为 n 阶方阵，$r(A)=n-1$，$n\geqslant 2$. 则 $r(A^*)=$______.

   a.0； b.1； c. $n-1$； d. n.

5. 对任意的 $(x,y,z)\in R^3$. 定义变换如下：

   a. $T_1(x,y,z)=(z,x,y)$；　　b. $T_2(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2)$；

   c. $T_3(x,y,z)=(x,y,1)$；　　d. $T_4(x,y,z)=(x+1,y-1,z+2)$，

其中______是线性变换.

三、填空题

1. 已知三阶方阵 A 的特征值分别为 $1,-1,4$ 则 $|A^*+E|=$______.

2. 设 $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&3\\0&2&5\end{pmatrix}$,则$(A^{-1})^*=$______.

3. 线性方程组 $\begin{cases}x+y+z=1,\\ax+by+cz=d,\\a^2x+b^2y+c^2z=d^2\end{cases}$ (其中 a,b,c 为三个不同的数)的解为____________________.

4. $\begin{vmatrix}3&1&1&\cdots&1\\1&3&1&\cdots&1\\1&1&3&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&3\end{vmatrix}_n=$__________.

5. 三阶反对称实矩阵的全体对于矩阵的加法和数乘运算,构成实数域上的______维线性空间.

四、计算与证明

1. 解矩阵方程 $X=A+XB$,其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

2. 讨论 k,l 取什么数时,如下方程组无解?有解?在有解的情形下,求出它的通解.

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=2,\\2x_1+x_2+x_3-3x_4=-3,\\x_1+2x_2+2x_3+6x_4=k,\\4x_1+3x_2+lx_3-x_4=1.\end{cases}$$

3. 若可逆方阵 A 的各行元素之和为 a. 问 A^{-1}的各行元素之和是什么?证明你的结果.

4. 设二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$,用一个正交代换,将此二次型化为标准形,并写出所用的正交代换.

5. 设 $R[x]_2$ 代表次数不超过 2 的全体实系数多项式所构成的集合. 在 $R[x]_2$ 中给定了两组基:

(Ⅰ)$p_1=1,p_2=x,p_3=x^2$;

(Ⅱ)$q_1=1,q_2=x+2,q_3=(x+2)^2$.

(1)求由基 p_1,p_2,p_3 到 q_1,q_2,q_3 的过渡矩阵;

(2)对任意的 $g(x)\in R[x]_2$,定义变换

$$T[g(x)]=g(x-2).$$

证明:T 为$R[x]_2\to R[x]_2$ 的线性变换,并分别求出 T 在基 p_1,p_2,p_3 与 q_1,q_2,q_3 下的矩阵;