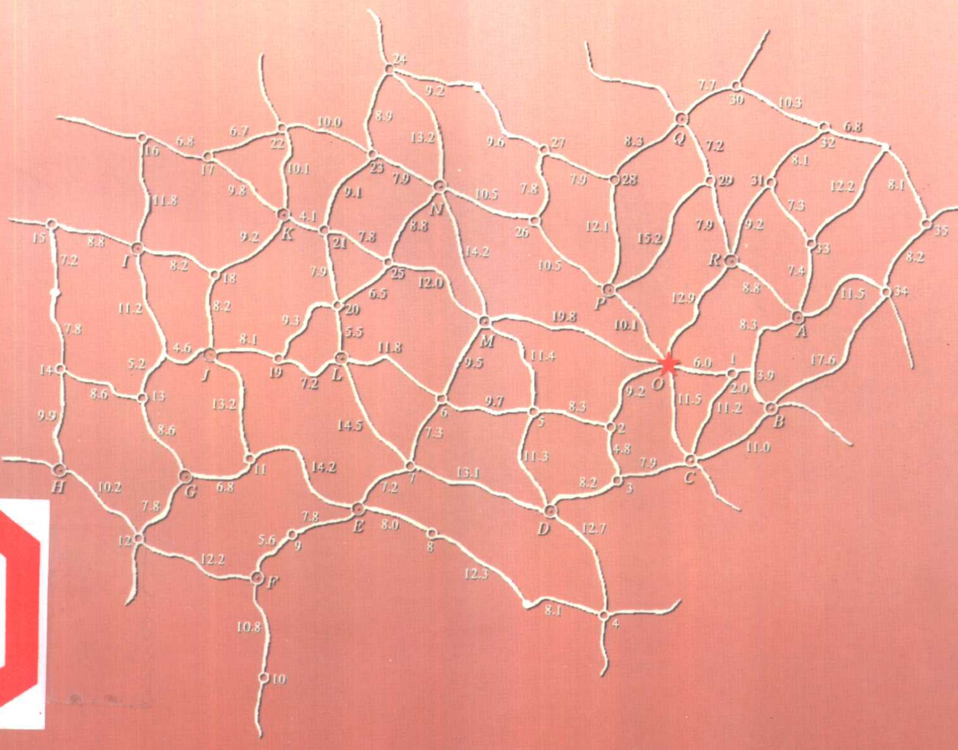
数学建模精品案例

朱道元 编著



东 南 大 学 出 版 社

数学建模精品案例

朱道元　编著

东南大学出版社

内容提要

教育部高教司组织的大学生数学建模竞赛，对于培养学生解决实际问题的能力和创新意识，对于推动教学改革起了很大的作用，这一竞赛目前已成为全国规模最大的大学生课外科技活动. 优秀赛题及优秀论文是更好地发挥它的作用的关键之一. 作者根据多年从事教练及全国、省评审的经验，对历年的国际、国内竞赛题进行深入研究，选择了10多条研究余地大，创造性高的赛题在优秀论文基础上进行探讨，使问题得到近乎完美的解决. 讲稿曾在多所院校试讲，深受研究生与本科生的欢迎，对数模教练员也很有启发，尤其是对创造能力的培养很有帮助.

读者对象：高等院校师生和数学应用爱好者.

图书在版编目(CIP)数据

数学建模精品案例/朱道元编著. —南京：东南大学出版社，1999. 8

ISBN 7—81050—493—2

Ⅰ. 数…　Ⅱ. 朱…　Ⅲ. 建立模型-解题　Ⅳ. 022

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 31550 号

东南大学出版社出版发行

（南京四牌楼2号　邮编 210096）

出版人：洪焕兴

江苏省新华书店经销　　南京京新印刷厂印刷

开本：850mm × 1168mm　1/32　印张：9　字数：240 千字

1999 年 8 月第 1 版　　1999 年 8 月第 1 次印刷

印数：1 – 4000　　定价：12.00 元

前　言

数学界老前辈丁石孙教授讲过:“学习数学当然要学习一些理论,学习一些定理与概念,也要学习一些解题的技巧.但是更重要的是学到数学的思想方法,用以解决数学和数学以外的问题,特别是要学会用数学来解决非数学的问题.数学是抽象的,同时又具有广泛的应用,这是一个事物的两个方面.实际上,只有懂得数学广泛的应用,并能用数学来解决多种多样的问题,才能懂得数学本身,也才能懂得数学抽象的重要性.这样才能真正了解数学实际上是非常生动活泼的,也才真正能学好数学.”用数学来解决非数学的问题,首先要把所需解决的问题与数学联系上,这就是建立数学模型.随着科学技术的迅猛发展和计算机技术的广泛应用,数学模型已越来越受到人们的重视,这是因为数学的应用正向一切领域广泛渗透,或者说当今社会正日益数学化.当前高等学校的数学教学仍在改革之中,在学生能力培养及创造力培养方面尚有一些不足之处,为此教育部每年举办全国大学生数学建模竞赛,推动教学改革的进程.几年来的实践证明,这项活动有利于培养学生分析问题和解决问题的能力,有利于培养学生创新和合作精神,有利于推动教学内容、课程体系和教学方法的改革.

为使这一活动达到理想的效果,质量高的教材显然是必不可少的,特别是那些创造性强、启发性强的例题更是参赛同学和教练员所迫切需要的,作者在组织我校参加国际数模竞赛中也深深体会到这一点.在培训过程中往往会选择历年国际、国内竞赛题进行实战练兵,但经常苦于优秀论文是同学在竞赛三天期间完成的,因而不够深入.为此,许多教练、同学进行了艰苦的探索.本书就是在

优秀论文基础上再经过许多师生共同努力的成果,并经在省内、外近30所高校的讲课后修改而成的,由于问题解决得比较圆满、比较彻底,故是一些精品案例.

本书及其所属教材编写项目的顺利完成和出版得到了江苏省教委的大力支持,被列为《江苏省普通高等教育面向21世纪教学内容和课程体系计划》的重点项目;特别得到了东南大学出版社的大力支持.此外,本书从许多优秀论文及有关数学建模书籍中摘录了部分内容,在此特向有关的作者表示感谢!访问学者张建新老师仔细校阅了全书,在此一并表示感谢!

由于作者水平所限,书中错误及不足之处在所难免,热忱欢迎读者批评指正.

朱道元

于东南大学应用数学系

1998年9月

责任编辑 朱经邦

责任印制 王小宁

ISBN 7-81050-493-2

9 787810 504935 >

ISBN 7-81050-493-2
O·23 定价：12.00元

目　　录

第一章　紧急调兵问题 …… 1

第二章　工件排序问题 …… 14

第三章　万有引力定律 …… 20

第四章　单个的螺旋线 …… 26

第五章　生产过程的调度 …… 38

第六章　飞行管理问题 …… 52

第七章　最优切割问题 …… 69

第八章　锁具装箱问题 …… 98

第九章　足球队排名次 …… 124

第十章　评定奖学金问题 …… 151

第十一章　天车与冶炼炉的作业调度 …… 169

第十二章　蠓的分类问题 …… 196

第十三章　有价证券的选择 …… 213

第十四章　灾情巡视路线问题 …… 243

参考文献 …… 280

第一章　紧急调兵问题

[**问题**]　由于军事上的需要,需将甲地 n 名战斗人员(不包括驾驶员)紧急调运至乙地. 但是由于运输车辆不足,m 辆车无法保证每个战斗人员都能同时乘车. 显然,部分战斗人员乘车,部分战斗人员急行军是可行的方案. 设每辆车载人数目相同,只有一条道路,但足以允许车辆、人员同时行进. 请制定一个调运方案,能最快地实现兵力调运,并证明方案的最优性.

这一问题中尚有如下一些不明确的地方需加以澄清:

(1)将这 n 名战斗人员中最后一名运到乙地算完成任务. 以部队从甲地出发起,至第 n 名战斗人员到达乙地为止的运输时间为目标. 不考虑先期到达战斗人员的军事价值.

(2)车速、人行军速度均按最大速度计算. 不考虑人员由于劳累而造成的行军速度递减,不考虑车辆加油问题,也不考虑道路对车速、人行军速度的影响,不考虑车辆满载、空载情况下最大速度的差别.

(3)战斗人员上下车时间可以忽略不计,假定因人员上下而造成车辆加速、减速,对车辆平均速度的影响也忽略不计(进一步研究时这一假定可以放宽).

为使问题明确,再假定两点:

(1)每辆车载 b 人(不包括驾驶员);

(2)车速是人行军速度的 k 倍($k>1$).

对这一问题的研究,可从简单情况入手,这是求解数学模型问题中常用的方法,非常重要. 只有简化了,才容易发现其中的规律;只有简化了,复杂问题才有突破口. 但简化又不应使问题面目全

非，失去原问题的特征，否则即使可以解决简化后的问题，对原问题的解决仍是无济于事，没有价值. 因此合理简化是建立数学模型的首要一点，希望读者不断细心体会、认真总结.

一、$n=mbj$，j 是大于 1 的整数

$j=2$，显然 n 名战斗人员一分为二，一半的人乘车，一半的人行军，到了途中某一点，让乘车战斗人员全部下车，改由行军前进，车辆返回去接另一半人员. 但是如果车辆在途中超过第一批乘车人员，显然还要回过来再用车辆运他们，故这一方案不好. 如果车辆在第一批乘车人员步行到达乙地之后到达乙地，显然也不是理想方案. 由此得

定理 1　满载车辆与其余行军人员同时到达乙地是最优方案的必要条件.

证明：只要不是同时到达，无论哪部分人先到，无论分几次到达，由于他们出发时间相同，而到达时间有先后，故总用时不等. 又因为甲地到乙地只有一条路，路程相同，所以他们的平均速度不等. 可以让平均速度大的这部分战斗人员减少乘车里程（或乘车时间），增加行军路程，降低平均速度，而让平均速度最小（即最后到达乙地）的那部分战斗人员多乘车，增加他们的平均速度，即 n 名战斗人员中最小平均速度增大，最迟到达乙地的时间可以提前，因此原方案不是最优方案.

定理 2　车辆在前进时应满载，后退时应空载（驾驶员不计）.

证明：因为车速大于人行军速度，由于问题的目标根据定理 1 是同时到达乙地的时间，而这又取决于平均速度（车速与人行军速度的加权），显然要提高平均速度一定要充分利用车辆的高速优势. 由于满载、空载时车速相同，显然，前进时满载是充分利用车辆的高速优势. 至于回退时，除驾驶员必须在车上外，再有其他的人，对于车辆多载人员是不利的，不如让其行军向前.

在此，我们指出上述处理问题的方法具有一般性. 对于一个复杂的实际问题想一次性彻底解决它，是不现实的，应该逐步深入，层层推进. 但推进时应注意有稳定坚实的基础，如果基础错了或发生动摇，则进一步工作就成了无源之水、无本之木，沙滩上盖楼房是肯定会倒的. 那么怎样保证基础是坚实牢固的呢?把它用明确无误的语言来表达，并加以严格证明，如上面一样写成定理、推论的形式. 这样既便于理清头绪，找出规律，又因经过严格证明，不致发生错误；也有利于考虑发现新情况、新问题.

1)数学模型

设甲地到乙地距离为 1 个长度单位，人行军速度为 1 个速度单位，车速为 k.

设最优方案中人行军路程为 y(因同时到达，每个人行军路程都是 y)，则每个人乘车路程均为 $1-y$，$0<y<1$.

设最优调运方案中，车向前行走的路程为 x(因 m 辆车同时到达，车速相同，每辆车前进路程均为 x)，后退路程为 $x-1$，$x>1$.

最优方案中人与车同时到达乙地，所用时间相同，所以

$$y+\frac{1-y}{k}=(2x-1)/k, \tag{1.1}$$

因为 $n=mbj$，所以车向前时，mb 个人乘车，车向后开时，无人乘车；而车向前开的时间为$\frac{x}{k}$，车向后开的时间为$\frac{x-1}{k}$，所以在最优调运方案中，平均乘车人数为

$$\left(\frac{x}{k}mb+0\times\frac{x-1}{k}\right)\div(2x-1)/k=\frac{xmb}{2x-1}, \tag{1.2}$$

所以最优方案中最小平均速度的最大值的上界(在车、人同时到达乙地的方案可行时实现)为

$$\left[\frac{xmb}{2x-1}\times k+n-\frac{xmb}{2x-1}\right]\div n=1+\frac{(k-1)}{n(2x-1)}xmb=$$

$$1+\frac{(k-1)x}{(2x-1)j}, \tag{1.3}$$

由(1.3)式可见平均速度大于人行军速度，且k越大平均速度越大，j越大(装备率越低)，平均速度越小，显然是合理的.

而根据(1.1)式，最优方案的平均速度为

$$\left[y+\frac{1-y}{k}\right]^{-1}=k/[1+(k-1)y]=\frac{k}{2x-1}, \qquad (1.4)$$

由此得到关于x,y的方程组

$$\begin{cases}1+\dfrac{(k-1)x}{(2x-1)j}=\dfrac{k}{1+(k-1)y}\\[2mm] 1+\dfrac{(k-1)x}{(2x-1)j}=\dfrac{k}{2x-1}\end{cases},$$

解此方程组，得

$$2x-2=(k-1)y,$$

$$x=(k+1)j/[k-1+2j], \qquad (1.5)$$

$$y=2(j-1)/[k-1+2j]. \qquad (1.6)$$

由(1.6)式可见，其余条件相同情况下车速越快，战斗人员行军路程越短，这也说明公式是正确的.

在达最大平均速度的情况下，人行军路程与车行驶路程均已求出，下一步我们应考虑实现这一上界的方案.显然使平均速度达(1.3)式的任一可行方案均为最优方案，但其中某方案使人员上下车的次数越少，车辆调整方向次数越少，越方便，实际效果也越好.

那么实现最优调运方案的关键是什么呢？就是保证每位战斗人员行军路程恰为(1.6)式.抓住这一点，再为每车制定方案就容易得多.

2)实施方案

(1)开始让车满载，车、人同时出发；

(2)当车开到$1-y$地方，让车上的战斗人员下车行军前进，车辆往回开；

(3)当返回车辆遇到正在行军的战斗人员时，让其中任意mb个人乘车前进，余下的人继续行军前进；

(4)当车辆遇到在前面行军的战斗人员时，停车，并让车上 mb 个人下车与这一批人一起行军前进，车辆再返回；

(5)当车辆再在返回途中遇到行军的人时，再用车载其中 mb 个人前进，余下的人继续行军，如此直至最后的 mb 个战斗人员也乘上车，并与其他战斗人员共同到达乙地.

这样在行进过程中，一前一后有两个集团，有时共 $(j-1)mb$ 个人在行军前进，mb 个人在这两个集团之间乘车由后往前赶. 而当车辆返回时，两大集团共计 n 个人在行军前进. 随着时间的推移，第一集团每次增加 mb 人，第二集团每次减少 mb 人，直至第二集团消失，第一集团达 $(j-1)mb$ 人，与最后乘车的 mb 人同时到达乙地.

由于 $n=mbj$，显然这一方案是可行的. 剩下的问题是证明这一方案的最优性.

前已计算最佳方案中每个人应步行的距离为 y，应乘车前进的距离是 $1-y$. 因每个人不是乘车前进就是行军前进，故只要乘车距离达到 $1-y$，即达理想的平均速度. 由方案第一批乘车人恰好乘车前进 $1-y$，余下行军，路程为 y，应 $(y+\frac{1-y}{k})$ 时到达. 第二批乘车的人后来赶上了第一批乘车的人，表明在出发至相遇这一段时间内平均速度相同. 因行军速度与车速一定，故一定乘车时间相同，行军时间相同，因而乘车路程也为 $1-y$，加上后来行军路程，总行军路程也是 y，故实现了最优方案. 类似地，前 $(j-1)$ 批乘车的人都行军 y、乘车 $(1-y)$ 路程.

最后一批乘车的人在乘车时，车向前共走了 $(j-1)(1-y)$，第一次车辆后退的距离为

$$k\left[1-y-\frac{1}{k}(1-y)\right]/(k+1)=(k-1)(1-y)/(k+1),$$

与最后一批人相遇时共后退 $(j-1)(k-1)(1-y)/(k+1)$，

则实际前进了$(j-1)(1-y)-\frac{(j-1)(1-y)(k-1)}{k+1}=$

$$(j-1)(1-y)(1-\frac{k-1}{k+1})=$$

$$(j-1)(1-y)\frac{2}{k+1},$$

将 y 用(1.6)式代入，得车辆在与最后一批人相遇时，离甲地距离为

$$(j-1)(1-\frac{2(j-1)}{k-1+2j})\frac{2}{k+1}=$$

$$(j-1)\frac{k-1+2j-2j+2}{k-1+2j}\frac{2}{k+1}=$$

$$(j-1)(\frac{k+1}{k-1+2j})\frac{2}{k+1}=\frac{2(j-1)}{k-1+2j}=y,$$

所以最后一批人乘车距离也是 $1-y$，故 n 个人与车一起同时到达乙地，方案确是最优的.

二、$n=lb$，但 $n=mbj$，其中 l 为自然数，j 是个分数

虽然 j 不是整数，但在上段数学模型中建立的方程组及其解仍是最优方案的充分条件，因而只要有方案平均速度达到(1.3)式，每人行军路程为 y(只是 j 不是整数而是分数罢了)，一定还是最优方案. 故关键在于能否找到实施方案.

由题设 $l>m$. 若 $2m>l$，$m/(l-m)=i$，i 是自然数.(作此假设仍是为了简化问题，以利找到实施方案)

如前车队集体行动方案显然已无法实现，这时可将$(l-m)$辆车分为一组，每组联合行动. 由于车相对较多，可以采用二阶段行走方法.

1)实施方案

(1)i 组车同时满载出发，另一组人行军前进；

(2)车队行驶至$\frac{1-y}{i}$处，第一组车上的人下车行军向前，其余

车辆继续前进，第一组车辆返回；

(3)当第一组车辆与正在行军的一组人相遇时，让他们乘车直至到达乙地；

(4)车队行驶至$\frac{2}{i}(1-y)$处，第二组的人下车行军前进，第二组车辆返回去接第一组人上车，直至到达乙地；

(5)车队行至$\frac{3}{i}(1-y)$处，第三组人下车行军前进，第三组车辆返回接第二组人上车……直至到达乙地；

(6)类似地，$(1-y)$处第i组人下车行军前进至乙地，第i组车辆返回接第$(i-1)$组人上车，直至到达乙地.

下边论证这一方案是否可行，是否最优.

显然每次返回的车辆在返回前始终向前，故处于领先位置，而要乘车的、正在行军的战斗人员因行军较慢，一定在其后边，故返回去接行军的战斗人员是可行的.

第i组人乘车路程$(1-y)$，行军路程是y，平均速度达到最大值(1.3)式，(因y是根据(1.3)式建立的方程组的唯一解). 开始行军的一组战斗人员在与返回车辆相遇时行军路程推导如下：

车行驶$\frac{1}{i}(1-y)$，

人行军$\frac{1}{k}\frac{1}{i}(1-y)$，

车、人相距$(1-\frac{1}{k})(1-y)/i$，

相遇前人继续行军前进$(1-\frac{1}{k})(1-y)/[i(k+1)]$，

总共行军路程为$\frac{1}{i}(1-y)(\frac{1}{k}+\frac{1-1/k}{k+1})=$

$$\frac{1}{i}(1-y)\frac{2k}{k(k+1)}=\frac{2}{i(k+1)}(1-y), \tag{1.7}$$

注意到这时$j=1+\frac{1}{i}$，代入(1.6)式，得

$$y=(2/i)\div(k-1+2+\frac{2}{i})=2/[(k+1)i+2],$$

$1-y=(k+1)i/[(k+1)i+2]$，再代入(1.7)式，得

总共行军路程$=2/[(k+1)i+2]=y$，乘车路程也是$1-y$.

其他各组总行军路程也是y，乘车也是$1-y$. 这可以将第二组人下车作为时钟起点，第二组人变成行军组，第三组车相当于第一组车，路程也取$\frac{2}{i}(1-y)$相当于甲地，仍是一组人行军，另一组车再行驶$\frac{1}{i}(1-y)$后返回接他们. 同上推导，仍有第二组人总共行军路程为y，所以该方案是最优方案.

设$m<l<2m$，$m=a(l-m)+d$，$l-m=dh$，其中a,d,h为自然数，所以$m=(ah+1)d$，$n=lb=(ah+1+h)db$.

这时将战斗人员分为$[(a+1)h+1]$组，车分为$(ah+1)$组制定调运方案.

虽然n是b的倍数有变化，但最优行军路程y公式并未发生变化，这时$j=\frac{ah+1+h}{ah+1}$，代入(1.5)、(1.6)式

$$x=(k+1)\frac{ah+1+h}{ah+1}\div[k-1+2\,\frac{ah+1+h}{ah+1}]=$$

$$(k+1)(ah+h+1)/[(k+1)(ah+1)+2h]=$$

$$1+\frac{(k-1)h}{(k+1)(ah+1)+2h},$$

$$x-1=(k-1)h/[(k+1)(ah+1)+2h], \tag{1.8}$$

$$y=2\,\frac{h}{ah+1}/[k-1+2\,\frac{ah+1+h}{ah+1}]=$$

$$2h/[(k+1)(ah+1)+2h],$$

$$1-y=(k+1)(ah+1)/[(k+1)(ah+1)+2h]. \tag{1.9}$$

2)新情况的实施方案

(1)$(ah+1)$组车同时满载出发，另外h组人行军前进；

(2)车行至$\frac{1-y}{ah+1}$处，第一组人下车，改由行军前进，其余车辆继续前进，第一组车辆返回；

(3)当第一组车与后面行军人相遇时，让其中一组人上车前进，其余组继续行军前进；

(4)第二组车行至$\frac{2}{ah+1}(1-y)$处，第二组人下车改由行军前进，第二组车返回接行军组第二组人，其余车辆继续前进；

(5)依此类推，车辆接完步行 h 组后，再去接乘车第一组，直至乘车 ah 组中最后一组第二次乘车，与乘车组中第$(ah+1)$组行军同时到达乙地.

由于总有人在行军，且车总在被接的人前面，方案一定可行.

至于最优性，请见图 1-1，阴影部分代表乘车，空白表示行军，这是实施方案示意图(本应为阶梯图，因组数不确定，表达不方便，画成直线). 由图可见，这样每组乘车的路程和相同(乘车组先下车的先上车，行军组也是先上车的先下车)，当然行军路程和也相同，因此只要证明，乘车组与行军组乘车路程均为公式(1.6)所指出的$(1-y)$即可.

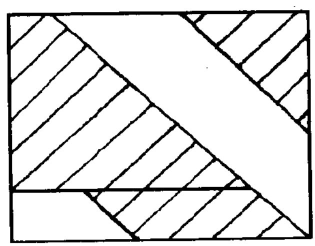


图 1-1　实施方案示意图

$(n=lb,l$ 为自然数)

行军第 h 组上车后直达乙地，首先计算上车前他们行军多远?因接他们的车是乘车组第 h 组的车，这组车行进至$\frac{h}{ah+1}(1-y)$返回，这时行军第 h 组与其相距$(1-\frac{1}{k})\frac{h}{ah+1}(1-y)$，待乘车组第 h 组车与行军第 h 组相遇时，行军第 h 组又行军$\frac{1}{k+1}(1-\frac{1}{k})\frac{h}{ah+1}(1-y)$，前后一共行军$\frac{2}{k+1}\times$

$\frac{h}{ah+1}(1-y)$，将(1.9)式代入，可知行军第 h 组共行军 y 路程.

再看乘车第一组，自 $\frac{1-y}{ah+1}$ 处下车，至第 $(h+1)$ 组车开始返回，其间行军路程 $\frac{h}{ah+1}\frac{1-y}{k}$，第 $(h+1)$ 组车此时与乘车第一组人相距 $\frac{h}{ah+1}(1-\frac{1}{k})(1-y)$，待车与人相遇时乘车第一组又行军 $\frac{1}{k+1}(1-\frac{1}{k})\frac{h}{ah+1}(1-y)$，同上可知行军总路程为 y. 当然乘车路程 $(1-y)$. 其余各组均类似可证行军路程为 y，故为最优调运方案.

至此若 $m<l<2m$，m 与 l 最大公约数为 1，也可以参照图 1-1 来实施调度. 以每辆车为一个单位，开始满载前进. 每前进 $\frac{1-y}{m}$，则一辆车上的人下车行军前进，车返回先接行军组的人，再按下车先后接正在后面行军的一车人……如此直至乘车第 $(m-1)$ 组第二次乘车，乘车第 m 组下车后不再乘车而行军前进，同时到达乙地，即为最优方案.

若 $l>2m$($l=2m$ 属于已讨论过的情况).

(1.5)、(1.6)式成立仍是最优方案的充分条件，关键在于是否可实施.

$l>2m$ 情况可化成 $m<l_1<2m$. 这时有 m 辆车，可先运 mb 个战斗人员至 $(1-y)$ 处，让他们继续行军至乙地，然后返回再接 mb 个战斗人员赶上在前面的行军队伍，并立即再返回直至在后面未乘过车的行军人数小于 $2mb$，而大于 mb. 当返回车与他们相遇时，情况就与已讨论的情况完全相同，可用前面方案对这最后一批少于 $2mb$ 个战斗人员进行调度. 显然这一方案是可行的. 至于第一批 mb 个人乘车路程为 $1-y$，行军路程肯定为 y. 至于后来赶上去一同行军的几批人因为可以赶上去，而行军速度又一定，故可以肯