数学史教程

A History of Mathematics

李文林

A History of Mathematics

CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学史教程／李文林 编著. － 北京：高等教育出版社；
海德堡：施普林格出版社，1999.8（2002 重印）
ISBN 7－04－006961－X

Ⅰ.数…　Ⅱ.李…　Ⅲ.数学史－教材　Ⅳ.011

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 25532 号

数学史教程
李文林

出版发行	高等教育出版社　施普林格出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	邮政编码	100009
电　　话	010－64054588	传　　真	010－64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京民族印刷厂		
开　　本	880×1230　1/32	版　　次	2000 年 8 月第 1 版
印　　张	12.625	印　　次	2002 年 1 月第 4 次印刷
字　　数	360 000	定　　价	19.80 元

前　言

本书的基础是作者 1998 年秋季学期在北京大学讲授数学史选修课的讲义，部分内容也曾在西北大学数学系数学史研究生中进行过试讲．此次出版时，作者对讲义作了全面的整理和较大的扩充．

近年来，我国有越来越多的高等院校已经或正在准备开设数学史课程，本书的目的是为这门课程提供一个参考教材．

数学史学科的意义在本书序论（第 0 章）中有较充分的论述，这里不作重复．作为一本教材，本书力求以精简的篇幅勾画出数学科学发展的清晰轮廓．作者意识到数学史课程有着广泛的读者对象，因此试图寻找在内容、结构、篇幅以及叙述方式方面的某种平衡，以使本书在以大专院校数学专业师生为基本对象的同时，也能在不同程度上符合对数学史感兴趣的各类读者的需求．这样做难免会带来一些问题，特别是在材料取舍、论述详略深浅等方面的问题．另一方面，数学是一个如此广阔而又深刻的知识领域，既准确又生动地反映这门科学的创造活动与历史过程，本身是十分困难的任务．限于作者水平，本书在具体内容上也必定存在不少缺点与错误，作者诚恳欢迎各界读者在阅读、使用过程中发现问题并提出批评，以便进一步更正、修订．

在本书出版之际，作者首先要感谢北京大学数学科学学院特别是当时任院长的姜伯驹院士，如果不是他们邀请我开设数学史选修课，本书是不可能产生的．

作者在编写本书的过程中，曾就许多专业问题频繁地请教有关的专家，在这方面，我要衷心感谢陆汝钤、虞言林、何育赞、刘彦佩、陈兰荪、陈翰麟、梁国平、胥鸣伟、姚景齐、陈培德、徐光辉诸位教授，他们给予的中肯指点，使本书的编写获益匪浅．当然，本书的一切缺点和错误，概由作者本人负责．

徐泽林博士、程钊博士帮助整理了部分手稿(分别涉及第4、5章和第8、9、10章),程钊博士还校读了几乎全部清样;王辉博士也帮助校读了部分清样;平艳茹女士帮助打印了序论和第1、2章的样稿;姚芳博士曾专程到北大听了我的讲课并提出了宝贵意见,对于他(她)们的热忱帮助,我愿在此一并致谢.

我还要感谢我的妻子匡裕玫女士,她不仅帮助誊写了部分手稿,而且,就整体来说,没有她的支持,本书是不可能完成的.

最后,我还要感谢高等教育出版社和施普林格出版社的合作小组,他们为本书的顺利与及时出版付出了很大的辛劳.

中国科学院数学与系统科学研究院

李文林

2000年7月于北京中关村

责任编辑　赵天夫
　　　　　徐　可
封面设计　张　楠
责任排版　杨　明
版式设计　杨　明
责任印制　陈伟光

目　　录

0　数学史——人类文明史的重要篇章 ………………（1）
0.1　数学史的意义 ……………………………………（1）
0.2　什么是数学——历史的理解 ………………………（5）
0.3　关于数学史的分期 …………………………………（8）
1　数学的起源与早期发展 ……………………………（11）
1.1　数与形概念的产生……………………………………（11）
1.2　河谷文明与早期数学…………………………………（16）
1.2.1　埃及数学………………………………………………（16）
1.2.2　美索不达米亚数学……………………………………（23）
2　古代希腊数学 …………………………………………（32）
2.1　论证数学的发端………………………………………（32）
2.1.1　泰勒斯与毕达哥拉斯…………………………………（32）
2.1.2　雅典时期的希腊数学…………………………………（39）
2.2　黄金时代——亚历山大学派…………………………（45）
2.2.1　欧几里得与几何《原本》……………………………（46）
2.2.2　阿基米德的数学成就…………………………………（52）
2.2.3　阿波罗尼奥斯与圆锥曲线论…………………………（58）
2.3　亚历山大后期和希腊数学的衰落……………………（61）

3 中世纪的中国数学 …………………………………………… (67)
3.1 《周髀算经》与《九章算术》………………………………… (68)
3.1.1 古代背景………………………………………………… (68)
3.1.2 《周髀算经》…………………………………………… (69)
3.1.3 《九章算术》…………………………………………… (71)
3.2 从刘徽到祖冲之………………………………………… (78)
3.2.1 刘徽的数学成就…………………………………………… (78)
3.2.2 祖冲之与祖暅…………………………………………… (83)
3.2.3 《算经十书》…………………………………………… (88)
3.3 宋元数学………………………………………………… (90)
3.3.1 从“贾宪三角”到“正负开方”术…………………………… (91)
3.3.2 中国剩余定理…………………………………………… (95)
3.3.3 内插法与垛积术…………………………………………… (97)
3.3.4 “天元术”与“四元术” ……………………………… (101)
4 印度与阿拉伯的数学…………………………………… (105)
4.1 印度数学 ……………………………………………… (105)
4.1.1 古代《绳法经》 ………………………………………… (106)
4.1.2 “巴克沙利手稿”与零号 ……………………………… (107)
4.1.3 “悉檀多”时期的印度数学 …………………………… (108)
4.2 阿拉伯数学 …………………………………………… (113)
4.2.1 阿拉伯的代数 ………………………………………… (114)
4.2.2 阿拉伯的三角学与几何学 …………………………… (118)
5 近代数学的兴起 ……………………………………… (123)
5.1 中世纪的欧洲 ………………………………………… (123)
5.2 向近代数学的过渡 …………………………………… (126)

5.2.1　代数学 …………………………………………… (126)
5.2.2　三角学 …………………………………………… (130)
5.2.3　从透视学到射影几何 …………………………… (132)
5.2.4　计算技术与对数 ………………………………… (135)
5.3　解析几何的诞生 ……………………………………… (137)

6　微积分的创立 …………………………………………… (144)

6.1　半个世纪的酝酿 ……………………………………… (145)
6.2　牛顿的“流数术” …………………………………… (155)
6.2.1　流数术的初建 …………………………………… (155)
6.2.2　流数术的发展 …………………………………… (158)
6.2.3　《原理》与微积分 ………………………………… (161)
6.3　莱布尼茨的微积分 …………………………………… (165)
6.3.1　特征三角形 ……………………………………… (165)
6.3.2　分析微积分的建立 ……………………………… (168)
6.3.3　莱布尼茨微积分的发表 ………………………… (170)
6.3.4　其他数学贡献 …………………………………… (172)
6.4　牛顿与莱布尼茨 ……………………………………… (174)

7　分析时代 ………………………………………………… (176)

7.1　微积分的发展 ………………………………………… (176)
7.2　微积分的应用与新分支的形成 ……………………… (188)
7.3　18世纪的几何与代数 ………………………………… (196)

8　代数学的新生 …………………………………………… (207)

8.1　代数方程的可解性与群的发现 ……………………… (208)
8.2　从四元数到超复数 …………………………………… (213)
8.3　布尔代数 ……………………………………………… (218)

8.4　代数数论 ………………………………………………… (221)

9　几何学的变革 ………………………………………………… (226)

9.1　欧几里得平行公设 ………………………………………… (226)
9.2　非欧几何的诞生 ………………………………………… (229)
9.3　非欧几何的发展与确认 ………………………………… (233)
9.4　射影几何的繁荣 ………………………………………… (238)
9.5　几何学的统一 …………………………………………… (242)

10　分析的严格化……………………………………………… (247)

10.1　柯西与分析基础…………………………………………… (247)
10.2　分析的算术化…………………………………………… (250)
10.2.1　魏尔斯特拉斯………………………………………… (251)
10.2.2　实数理论……………………………………………… (253)
10.2.3　集合论的诞生………………………………………… (255)
10.3　分析的扩展……………………………………………… (258)
10.3.1　复分析的建立………………………………………… (258)
10.3.2　解析数论的形成……………………………………… (262)
10.3.3　数学物理与微分方程………………………………… (263)

11　20世纪数学概观(Ⅰ)纯粹数学的主要趋势…… (271)

11.1　新世纪的序幕…………………………………………… (271)
11.2　更高的抽象……………………………………………… (275)
11.2.1　勒贝格积分与实变函数论…………………………… (276)
11.2.2　泛函分析……………………………………………… (278)
11.2.3　抽象代数……………………………………………… (281)
11.2.4　拓扑学………………………………………………… (285)
11.2.5　公理化概率论………………………………………… (286)

11.3　数学的统一化…………………………………………（292）
11.4　对基础的深入探讨……………………………………（298）
11.4.1　集合论悖论…………………………………………（298）
11.4.2　三大学派……………………………………………（300）
11.4.3　数理逻辑的发展……………………………………（303）

12　20世纪数学概观(Ⅱ)空前发展的应用数学……（307）

12.1　应用数学的新时代……………………………………（307）
12.2　数学向其他科学的渗透………………………………（309）
12.2.1　数学物理……………………………………………（309）
12.2.2　生物数学……………………………………………（312）
12.2.3　数理经济学…………………………………………（315）
12.3　独立的应用学科………………………………………（317）
12.3.1　数理统计……………………………………………（317）
12.3.2　运筹学………………………………………………（320）
12.3.3　控制论………………………………………………（322）
12.4　计算机与现代数学……………………………………（325）
12.4.1　电子计算机的诞生…………………………………（325）
12.4.2　计算机影响下的数学………………………………（330）

13　20世纪数学概观(Ⅲ)现代数学成果十例………（339）

13.1　哥德尔不完全性定理(1931)…………………………（339）
13.2　高斯－博内公式的推广(1941—1944)………………（341）
13.3　米尔诺怪球(1956)……………………………………（343）
13.4　阿蒂亚－辛格指标定理(1963)………………………（344）
13.5　孤立子与非线性偏微分方程(1965)…………………（345）
13.6　四色问题(1976)………………………………………（347）
13.7　分形与混沌(1977)……………………………………（349）
13.8　有限单群分类(1980)…………………………………（353）

13.9 费马大定理的证明(1994)…………………………… (355)
13.10 若干著名未决猜想的进展 ……………………… (359)

14 数学与社会 ………………………………………… (363)

14.1 数学与社会进步………………………………… (363)
14.2 数学发展中心的迁移…………………………… (366)
14.3 数学的社会化…………………………………… (369)
14.3.1 数学教育的社会化……………………………… (369)
14.3.2 数学专门期刊的创办…………………………… (371)
14.3.3 数学社团的成立………………………………… (373)
14.3.4 数学奖励………………………………………… (376)

15 中国现代数学的开拓 …………………………… (381)

15.1 西方数学在中国的早期传播…………………… (381)
15.2 高等数学教育的兴办…………………………… (383)
15.3 现代数学研究的兴起…………………………… (385)

数学史——人类文明史的重要篇章

0

数学史研究数学概念、数学方法和数学思想的起源与发展，及其与社会政治、经济和一般文化的联系.

英国科学史家丹皮尔(W.C.Dampier)曾经说过:“再没有什么故事能比科学思想发展的故事更有魅力了”.数学是历史最悠久的人类知识领域之一.从远古屈指计数到现代高速电子计算机的发明;从量地测天到抽象严密的公理化体系，在五千余年的数学历史长河中，重大数学思想的诞生与发展，确实构成了科学史上最富有理性魅力的题材.

当然，仅仅具有魅力并不能成为开设一门课程的充分理由.数学史无论对于深刻认识作为科学的数学本身，还是全面了解整个人类文明的发展都具有重要意义.

0.1 数学史的意义

与其他知识部门相比，数学是一门历史性或者说累积性很强的科学.重大的数学理论总是在继承和发展原有理论的基础上建立起来的，它们不仅不会推翻原有的理论，而且总是包容原先的理论.例如，数的理论的演进就表现出明显的累积性;在几何学中，非欧几何可以看成是欧氏几何的拓广;溯源于初等代数的抽象代数并没有使前者被淘汰;同样现代分析中诸如函数、导数、积分等概念的推广均包含了古典定义作为其特例，…….可以说，在数学的进化过程中，几乎没有发生过彻底推

翻前人建筑的情况．如果我们对比天文学的“地心说”[①]、物理学的“以太说”[②]、化学的“燃素说”[③]的命运，就可以看清数学发展不同于其他学科的这种特点．因此有的数学史家认为“在大多数的学科里，一代人的建筑为下一代人所拆毁，一个人的创造被另一个人所破坏．唯独数学，每一代人都在古老的大厦上添加一层楼．”[④]这种说法虽然有些绝对，但却形象地说明了数学这幢大厦的累积特性．当我们为这幢大厦添砖加瓦时，有必要了解它的历史．

人们也常常把现代数学比喻成一株茂密的大树，它包含着并且正在继续生长出越来越多的分枝．按美国《数学评论》(Mathematical Reviews) 杂志的分类，当今数学包括了约 60 个二级学科，400 多个三级学科，更细的分科已难以统计．面对着如此庞大的知识系统，职业数学家越来越被限制于一、二个专门领域．庞加莱(H. Poincaré, 1854—1912) 曾经被称为“最后一位数学通才”，虽然比他稍晚的希尔伯特(D. Hilbert, 1862—1943) 也跨越过众多的领域，但这样的数学家毕竟越来越难得了，而正是希尔伯特曾在著名的巴黎演讲中指出：“数学科学是一个不可分割的整体，它的生命力正是在于各个部分之间的联系”，并提醒人们警惕数学“被分割成许多孤立的分支” 的危险[⑤]．有些学者认为，“跟这种危险作斗争的最稳妥的办法也许就是要对于数学的过去成就、传统和目标得到一些知识”[⑥]，这也是呼吁人们了解一点数学的历史．

数学史不仅仅是单纯的数学成就的编年记录．数学的发展决不是一帆风顺的，在更多的情况下是充满犹豫、徘徊，要经历艰难曲折，甚至

---

① 地心说：亦称“地球中心说” 认为地球居宇宙中心静止不动，月球、行星、太阳及其他恒星均围绕其运动．地心说最初由亚里士多德提出，公元 2 世纪经托勒玫发展后，在天文学中长期占统治地位，16 世纪被哥白尼的“日心说” 所推翻．

② 以太说：17 世纪为解释光的传播而提出的媒质论，假设了一种无所不在、没有质量和绝对静止的弹性媒质的存在．以太说在 19 世纪被物理学界普遍接受，但一切试图证实以太存在的实验均告失败，爱因斯坦相对论提出后，“以太” 作为一种陈旧的概念已被彻底抛弃．

③ 燃素说：18 世纪流行的一种燃烧理论，认为可燃物质中存在有“燃素”，燃烧时燃素以光、热的形式逸出．18 世纪末，燃素说被科学的氧化说所取代．

④ H. Hankel: Die Entwicklung de Mathematik in den letzten Jahrhunderten, Tubingen(1884), p. 25.

⑤ 希尔伯特：《数学问题》，“数学史译文集”，p. 81，上海科技出版社(1981)．

⑥ 克莱因：《古今数学思想》(第一册)，vi，上海科技出版社(1979)．

会面临危机.数学史也是数学家们克服困难和战胜危机的斗争记录.无理量的发现、微积分和非欧几何的创立,乃至费马大定理的证明,……,这样的例子在数学史上不胜枚举,它们可以帮助人们了解数学创造的真实过程,而这种过程在通常的教科书中是以定理到定理的形式被包装起来的.对这种创造过程的了解则可以使我们从前人的探索与奋斗中汲取教益,获得鼓舞和增强信心.

因此,可以说**不了解数学史就不可能全面了解数学科学**.在这方面,凡有真知灼见的数学家都有切身体会,例如莱布尼茨(G. Leibniz, 1646—1716)指出:"知道重大发明特别是那些决非偶然的、经过深思熟虑而得到的重大发明的真正起源是很有益的.这不仅在于历史可以给每一个发明者以应有的评价,从而鼓舞其他人去争取同样的荣誉,而且还在于通过一些光辉的范例可以促进发现的艺术,揭示发现的方法"①;庞加莱认为:"如果我们希望预知数学的将来,适当的途径是研究这门学科的历史和现状"②;外尔(H. Weyl, 1885—1955)也说过:"除了天文学以外,数学是所有学科中最古老的一门科学.如果不去追溯自古希腊以来各个时代所发现与发展起来的概念、方法和结果,我们就不能理解前50年数学的目标,也不能理解它的成就"③.

那么,是不是只有学习和研究数学的人才需要了解数学史呢?或者说了解数学史只是对学习和研究数学有好处呢?不是的.数学科学作为一种文化,不仅是整个人类文化的重要组成部分,而且始终是推进人类文明的重要力量.对于每一个希望了解整个人类文明史的人来说,数学史是必读的篇章.

数学史在整个人类文明史上的这种特殊地位,是由数学作为一种文化的特点决定的.

首先,数学以抽象的形式,追求高度精确、可靠的知识.

---

① G. Leibniz: Historia et origo Calculi differentialis(微积分的历史和起源,1714),英译文见 J. J. Child: The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz, Open Court, 1920.

② 转引自克莱因:《古今数学思想》(第一册),iv.上海科学技术出版社(1979)

③ H. Weyl: A Half Century of Mathematics, American Mathematical Monthly, Vol. 58, No. 8, p. 523.

抽象并非数学独有的特性，但数学的抽象却是最为典型的.数学的抽象在数与形等原始概念的形成中已经体现出来(参见第1章)，并且经过一系列阶段而达到了远远超过其他知识领域的程度.数学的抽象舍弃了事物的其他一切方面而仅保留某种关系或结构；同时，不仅数学的概念是抽象的，而且数学的方法也是抽象的.从古希腊时代起，数学就使用一种特有的逻辑推理规则，来达到确定无疑的结论.这种推理方式具有这样的严密性，对于每个懂得它的人来说都是无可争辩的，因而其结论也是无可争辩的.这种推理模式赋予数学以其他科学不能比拟的精确性，成为人类思维方法的一种典范，并日益渗透到其他知识领域，此乃数学影响于人类文化的突出方面之一.

与抽象性相联系的数学的另一个特点是在对宇宙世界和人类社会的探索中追求最大限度的一般性模式特别是一般性算法的倾向.这种倾向在数学的早期发展中亦已表现出来.埃及纸草书和巴比伦泥版文书中的数学文献，虽然都是具体问题的汇集，但其中采用的算法大都具有一般性.二分之一高乘底的面积公式，如果只对某个特殊的三角形适用，那在数学上是几乎没有意义的，它应适用于一切三角形.我们在本书有关章节中将会看到：对于普遍性法则的追求怎样引导了笛卡儿解析几何的发明；微积分的创立也可以看成是寻求有一般性的无穷小算法的结果，…….正是这种追求一般性模式的倾向，使数学具有了广泛的适用性.同一组偏微分方程，在流体力学中用来描写流体动态；在弹性力学中用来描写振动过程；在声学中用来描写声音传播等等，…….还没有哪一门科学在广泛应用上能与数学相比.数学越来越成为一种普遍的科学语言与工具，在推动其他科学和整个文化的进步方面起着不可替代的巨大作用.

最后，数学作为一种创造性活动，还具有艺术的特征，这就是对美的追求.英国数学家和哲学家罗素(B. Russell, 1872—1970)说过："数学不仅拥有真理，而且拥有至高无上的美——一种冷峻严肃的美，即就像是一尊雕塑.……这种美没有绘画或音乐那样华丽的装饰，它可以纯洁到崇高的程度，能够达到严格的只有最伟大的艺术才能显示的

完美境界"①.罗素说到的是一种形式高度抽象的美,即逻辑形式与结构的完美.此外数学创造过程中想象与直觉的运用也提供了数学美的源泉.这种以简洁与形式完美为目标的追求,是数学影响于人类文化的又一个重要因素.古代希腊形式完美的演绎数学与这个时代的理性化的哲学与理想化的雕刻交相辉映,这并不是偶然的.

由于数学作为一种文化的上述特征,它对整个人类文明产生了不容置疑的影响,无论是物质文明还是精神文明两方面都是这样,对此我们将在第14章"数学与社会"中加以介绍.

综上所述可以认为,数学是各个时代人类文明的标志之一.许多历史学家往往通过数学这面镜子来了解其他文化的特征.著名数学家和哲学家怀特黑德(A. Whitehead)在批评以往思想史家们忽视数学的地位时,曾打了一个比喻来说明数学是人类思想史的要素之一.他说:"假如有人说:编著一部思想史而不深刻研究每一个时代的数学概念,就等于是在《哈姆雷特》这一剧本中去掉了哈姆雷特这一角色,这种说法也许太过分了,我不愿说得这样过火.但这样做却肯定地等于是把奥菲莉这一角色去掉了.奥菲莉对整个剧情来说,是非常重要的"②.这是仅就思想史而言.实际上我们可以说:**不了解数学史,就不可能全面了解整个人类文明史**.

0.2 什么是数学——历史的理解

数学史的主题是数学的发展,我们谈论数学史,自然会首先关心"什么是数学"这个问题.

数学本身是一个历史的概念,数学的内涵随着时代的变化而变化,给数学下一个一劳永逸的定义是不可能的.我们在这里就从历史的角

① 罗素:《神秘主义与逻辑》(1918),这里转引自基斯·德夫林:《数学:新的黄金时代》,p.69,上海教育出版社(1997).

② A. N. Whitehead: Science and the Modern World, Cambridge University Press, (1932).中译本:商务印书馆(1989),这里"哈姆雷特"和"奥菲莉"分别是莎士比亚戏剧《哈姆雷特》中的男、女主角.

度来谈谈“什么是数学”这个问题.

公元前6世纪前,数学主要是关于“数”的研究.这一时期在古埃及、巴比伦、印度与中国等地区发展起来的数学,主要是计数、初等算术与算法,几何学则可以看作是应用算术.

从公元前6世纪开始,希腊数学的兴起,突出了对“形”的研究.数学于是成为关于数与形的研究.从那时起直到17世纪,数学的对象没有本质的变化.

希腊人主要对几何感兴趣,他们也研究数,但却与他们的埃及、巴比伦前辈相反,将数放在几何形式下去考察(只有少数例外如较晚的丢番图).尽管如此,公元前4世纪的希腊哲学家亚里士多德仍将数学定义为:

“数学是量的科学”①.

其中“量”的涵义是模糊的,显然不能单纯理解为“数量”.亚里士多德的定义影响绵长.直到16世纪,英国哲学家培根(F. Bacon, 1561—1626)将数学分为“纯粹数学”(pure mathematics)与“混合数学”(mixed mathematics).这里“混合数学”相当于应用数学,而培根所谓的“纯粹数学”则定义为:“处理完全与物质和自然哲学公理相脱离的量的科学”②.

在17世纪,像笛卡儿(R. Deacartes, 1596—1650)这样的数学家与哲学家对数学的看法有微妙的变化,笛卡儿认为:

“凡是以研究顺序(order)和度量(measure)为目的的科学都与数学有关”③.

恰恰是在笛卡儿的时代,数学发生了重大的转折.整个17、18世纪,数学家们关注的焦点是运动与变化.牛顿与莱布尼茨制定的微积分本质上是运动与变化的科学,它使科学家们能够从数学上研究行星运

① 参阅 F. Cajori: A History of Mathematics, p. 285, Macmillan(1919).

② F. Bacon: Advancement of Learning(1605), 此处引文转译自 R. Moritz(ed.): On Mathematics and Mathematicians, Dover(reprinted, 1958), p. 2.

③ R. Descartes: Regulae ad Directionem Ingenii, 英译本载 E. S. Haldane & G. R. T. Ross (eds.): The Philosophical Works of Descartes, Cambridge(1911).