高等学校试用教材

高等数学

（化、生、地类专业）

第二册

上海师范大学数学系
中山大学数学力学系合编
上海师范学院数学系

人民教育出版社

高等学校试用教材

高 等 数 学

（化、生、地类专业）

第 二 册

上海师范大学数学系
中山大学数学力学系合编
上海师范学院数学系

人民教育出版社

《高等数学》（化、生、地类专业）由上海师范大学数学系、中山大学数学力学系、上海师范学院数学系根据全国高等学校理科数学教材编写大纲讨论会上制定的《高等数学》（化、生、地类专业）编写大纲编写的．全书分三册出版．本书是第二册，共五章．包括无穷级数，向量代数与空间解析几何，多元函数微积分，富里哀级数与偏微分方程初步．第六、七、八章由林克伦同志执笔，第九、十两章由关伟德同志执笔．本书可供综合大学和师范学院化、生、地类有关专业用作试用教材。

高　等　数　学

（化、生、地类专业）

第二册

上海师范大学数学系
中山大学数学力学系合编
上海师范学院数学系

*

人民教育出版社出版
新华书店上海发行所发行
上海商务印刷厂印装

*

1978年4月第1版　1978年10月第1次印刷
书号 13012·093　　定价 0.63 元

目　　录

第六章 无穷级数

无穷级数是与数列极限有密切联系的一个概念. 它不仅在数学分析理论本身是一个重要的研究工具，而且在自然科学与工程技术中也有着广泛的应用. 本章主要讨论一类最简单最重要的级数，那就是幂级数. 为此，在前面先简单地介绍一些数项级数的知识.

§6.1 数项级数

1. 级数及其收敛与发散的概念

我们先看一个无穷级数的例子. 如果要求出圆的面积，可先作圆的内接正六边形(图 6-1). 设这正六边形的面积为 A_1，它是圆面积的一个近似值. 再以这正六边形的每一边为底边，在弓形内作顶点在圆上的等腰三角形. 设这六个等腰三角形的面积之和为 A_2，那么这个圆的内接正十二边形的面积 $S_2=A_1+A_2$，它也是圆面积的一个近似值，其近似程度比前面的好. 同样，再以这正十二边形的每一边为底边，在弓形内作顶点在圆上的等腰三角形. 设这十二个等腰三角形的面积之和为 A_3，那么这个圆的内接正二十四边形的面积 $S_3=A_1+A_2+A_3$，它也是圆面积的一个近似值，其近似程度比前面的都更好. 依此类推. 这个圆的面积近似地等于 $S_n=A_1+A_2+\cdots+A_n$，n 越大，则近似的程度越好. 人们自然地认为圆的面积是:

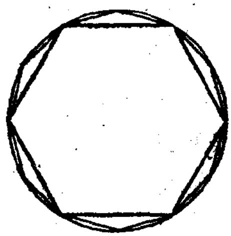

图 6-1

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots.$$

定义 1 设给定了序列 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$，则如下的式子

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots(\text{或简写为}\sum_{n=1}^{\infty}u_n) \tag{1}$$

就叫做*无穷级数*，或简称*级数*．其中第 n 项 u_n 叫做级数的*一般项*．其中 $u_n(n=1, 2, \cdots)$ 都是数，或者都是函数．

如果 $u_n(n=1, 2, \cdots)$ 都是数，那么 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 就叫做*数项级数*．下列级数都是数项级数:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots,$$

$$1+2+3+\cdots+n+\cdots,$$

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n+1}+\cdots.$$

如果 $u_n=u_n(x)\ (n=1, 2, \cdots)$ 都是 x 的函数，那么 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 就叫做*函数项级数*．下列级数都是函数项级数:

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,$$

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin nx+\cdots,$$

本节只讨论数项级数．

定义 2 设给定了级数(1)，作级数的前 n 项的和

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,$$

可得到另一个数列

$$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots.$$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$(有限值)，那么就称级数(1)是*收敛的*，并称 S 为级数(1)的*和*，写作

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=S.$$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在，那么就称级数(1)是*发散的*．(注意：发散级数没有和．)

例 1 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$的收敛性.

解 因为$S_n-\frac{1}{2}S_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}$,

从而
$$S_n=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}.$$

而
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1,$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛，其和为1. 即
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1.$$

例 2 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}1^n=1+1+\cdots+1+\cdots$的收敛性.

解 因为$S_n=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{共 } n \text{ 项}}=n$,

而$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}n=+\infty$ (即$\lim_{n\to\infty}S_n$不存在)，所以级数$1+1+\cdots+1+\cdots$发散.

例 3 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n=-1+1-1+\cdots+(-1)^n+\cdots$的收敛性.

解 因为$S_n=-1+1-1+\cdots+(-1)^n$.

当n为奇数时,$S_n=-1$; 当n为偶数时，$S_n=0$. 所以$\lim_{n\to\infty}S_n$不存在,从而$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$发散.

上面三个例子都是等比级数的特例. 下面我们来讨论一般的等比级数(等比级数又叫做几何级数):

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots,\ (a\neq 0),$$

其中 r 叫做等比级数的公比。

如果 $|r|\neq 1$，那么

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a-ar^n}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r},$$

当 $|r|<1$ 时，由于 $\frac{ar^n}{1-r}\to 0$，所以 $S_n\to\frac{a}{1-r}$，这时等比级数收敛，其和为 $\frac{a}{1-r}$；当 $|r|>1$ 时，由于 $\frac{ar^n}{1-r}\to\infty$，所以 $S_n\to\infty$，这时等比级数发散；当 $r=1$ 时，$S_n=na\to\infty$，级数发散；当 $r=-1$ 时，级数成为 $a-a+a-a+\cdots$，当 n 为奇数时 $S_n=a$，当 n 为偶数时 $S_n=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在，从而级数发散。

综上所述可得结论：公比为 r 的等比级数，当 $|r|<1$ 时，级数收敛，其和为 $\frac{a}{1-r}$；当 $|r|\geqslant 1$ 时，级数发散。

一般说来，直接讨论 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 是否存在是很困难的．以后我们将介绍一些简单的方法来判断某些级数是否收敛．同样，对于收敛级数，要求其和 S 的准确值也还是困难的，但是我们可以用 S_n 作为 S 的近似值．S 与 S_n 的差值

$$r_n=S-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$$

叫做(收敛)级数的 n 项后的余项．用 S_n 近似代替 S 所产生的误差就是这个余项的绝对值 $|r_n|$．只要 n 足够大，这个误差就可以任意小．

注意：发散级数是没有和的，当然其前 n 项之和 S_n 也就不能近似地表达什么，因此也没有 n 项后的余项的概念．

由此可见，收敛级数与发散级数在实用上有根本性的区别．因此，研究级数的收敛性是级数理论中的首要问题．下面我们还将专门讨论级数的收敛性问题．

2. 级数收敛的必要条件

为了研究级数的收敛性，我们先看看收敛级数有什么性质。

定理 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，那么 $\lim_{n\to\infty} u_n=0$.

证 由于 $S_n=S_{n-1}+u_n$，从而 $u_n=S_n-S_{n-1}$. 又因为级数收敛，所以当 $n\to\infty$ 时，S_n、S_{n-1} 的极限存在且相等. 因此有

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty} S_n-\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=0.$$

例如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$ 是收敛级数，果然有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0.$$

这定理也可以这样来叙述：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件是 $\lim_{n\to\infty} u_n=0$.

但是要注意：$\lim_{n\to\infty} u_n=0$ 并不是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分条件. 有许多级数，虽然一般项趋于 0，但它仍然是发散的. 例如调和级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots,$$

虽然它的一般项 $\frac{1}{n}\to 0$，但它是发散级数. 证明如下：

因为 $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$

$$=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{2\text{项}}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{4\text{项}}$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}\right)}_{8\text{项}}+\cdots$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)}_{2^{k-1}\text{项}}$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}_{\text{不足 }2^k\text{ 项}}$$

$$>1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}_{2\text{ 项}}+\underbrace{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)}_{4\text{ 项}}$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)}_{8\text{ 项}}+\cdots$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)}_{2^{k-1}\text{ 项}}$$

$$=1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{k\text{ 项}}=1+\frac{k}{2},$$

当 n 无限地增大时，不等式右边的数 $1+\frac{k}{2}$ 也无限地增大，从而 S_n 也无限地增大，即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=+\infty$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散级数.

由此可见，由 $u_n\to 0$ 并不能判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. 那么这定理有什么用处呢？这定理的重要用处在于它给出了判断级数发散的准则. 因为由这定理可知：如果 u_n 不趋于 0，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

例 4 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\cdots+\frac{n}{2n+1}+\cdots$ 的收敛性.

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}\neq 0$,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2n+1}$ 发散.

例 5 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n=-1+1-1+\cdots+(-1)^n+\cdots$ 的收敛性.

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散.

3. 级数的基本性质

以后讨论级数的收敛性时，要用到级数的几个基本性质. 现介绍如下:

性质 1 在级数前面去掉有限项或加上有限项得一新级数，新级数收敛或发散的性质与原级数相同.

证 设原级数为

$$u_1+u_2+\cdots+u_m+u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots.$$

去掉前 m 项后的新级数为

$$u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots,$$

并设 S_n 为原级数前 n 项的和，S'_n 为新级数前 n 项的和. 显然有

$$S_{n+m}=(u_1+u_2+\cdots+u_m)+S'_n$$

即

$$S'_n=S_{n+m}-(u_1+u_2+\cdots+u_m).$$

由此可见,如果 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{n+m}$ 存在,极限为 S,那么 $\lim\limits_{n\to\infty}S'_n$ 也存在. 且等于 $S-\sum\limits_{n=1}^{m}u_n$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{n+m}$ 不存在,那么 $\lim\limits_{n\to\infty}S'_n$ 也不存在. 这就是说新级数收敛或发散的性质与原级数相同. 加上有限项后新级数收敛性不变的证明是完全相仿的.

性质 2 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 也收敛；且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$.

证 记 $\sigma_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$,

$$\tau_n=v_1+v_2+\cdots+v_n,$$

$$S_n=(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\cdots+(u_n+v_n),$$

$$T_n=(u_1-v_1)+(u_2-v_2)+\cdots+(u_n-v_n).$$

显然 $$S_n=\sigma_n+\tau_n,\quad T_n=\sigma_n-\tau_n.$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n$ 都存在。

从而 $$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sigma_n+\tau_n)=\lim_{n\to\infty}\sigma_n+\lim_{n\to\infty}\tau_n$$

与 $$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}(\sigma_n-\tau_n)=\lim_{n\to\infty}\sigma_n-\lim_{n\to\infty}\tau_n.$$

这就是说级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 都收敛，其和为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$。

性质 3 以非零常数 k 乘级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的每项得新级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$，新级数收敛或发散的性质与原级数相同。

证 设 S_n 为原级数前 n 项的和，S'_n 为新级数前 n 项的和. 显然

$$S'_n=ku_1+ku_2+\cdots+ku_n=kS_n.$$

所以，如果 S_n 有极限 S，那么 S'_n 也有极限，且等于 kS；如果 S_n 没有极限，那么 S'_n 也没有极限.

4. 正项级数的收敛判别法

正项级数就是每项非负的级数（即各项 $u_n\geqslant 0$）. 它是级数中比较简单的. 这一段我们只讨论正项级数，以后研究其它级数的收敛性时，也常要用到正项级数的收敛性.

正项级数的特点是它的前 n 项之和 S_n 是一个单调增加数列：$S_1\leqslant S_2\leqslant\cdots\leqslant S_n\leqslant\cdots$. 要判定正项级数是否收敛，只要看它的 S_n 是否有上界就行了. 如果 S_n 有上界，那么由极限存在准则（单调有界数列必有极限），可知 S_n 有极限，从而级数收敛；如果 S_n 无上界，那么 S_n 无极限，从而级数发散。

我们要研究正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛性，但直接计算 S_n 一般来说是不容易的，通常是把它与另一收敛情况已知的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 作比较，通过比较来决定 S_n 是否有上界，从而判定 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是否收敛．比较判别法则如下：

定理 1 设已知两个正项级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

与

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots. \tag{2}$$

如果级数(2)收敛，并且 $u_n \leqslant v_n (n=1, 2, \cdots)$，那么级数(1)也收敛．

如果级数(2)发散，并且 $u_n \geqslant v_n (n=1, 2, \cdots)$，那么级数(1)也发散．

证 先证明第一部分．已知级数(2)收敛，设其和为 σ，因为(2)是正项级数，所以对任何 n 均有

$$v_1+v_2+\cdots+v_n \leqslant \sigma.$$

又因为 $u_n \leqslant v_n (n=1, 2, \cdots)$，所以有

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n \leqslant v_1+v_2+\cdots+v_n \leqslant \sigma.$$

即正项级数(1)的前 n 项之和 S_n 是有上界的，从而级数(1)收敛．

现证明第二部分．用反证法．假设级数(1)收敛，那么由定理的第一部分可得级数(2)收敛，这与已知条件矛盾，所以级数(1)必发散．

作为比较判别法的举例，我们来讨论 p 级数：

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots \quad (p \text{ 是常数}).$$

当 $p=1$ 时，就是前面已经讨论过的调和级数，已知它是发散的。

当 $p<1$ 时，$\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}$. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的，所以由比较判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 也是发散的.

当 $p>1$ 时，因为对正项级数加括号不影响它的收敛性，所以可把 p 级数加括号写成如下的形式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\underbrace{\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)}_{2\text{项}}+\underbrace{\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)}_{4\text{项}}$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{8^p}+\frac{1}{9^p}+\cdots+\frac{1}{15^p}\right)}_{8\text{项}}+\cdots,$$

再把它与下面的级数作比较

$$1+\underbrace{\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)}_{2\text{项}}+\underbrace{\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right)}_{4\text{项}}$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{8^p}\right)}_{8\text{项}}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{4^{p-1}}+\frac{1}{8^{p-1}}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3+\cdots.$$

显然，从第二项起，前者各项都小于后者对应的各项，而后者是等比级数，其公比 $r=\frac{1}{2^{p-1}}<1$ ($\because$ $p>1$)，它是收敛的，所以由比较判别法可知前者也是收敛的.

综上所述可得结论：p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，当 $p\leqslant1$ 时，级数发散；当 $p>1$ 时，级数收敛.

例如，级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 是发散的；级数 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$ 是收敛的.

在比较判别法的基础上，下面再介绍一个在实用上非常方便的比值判别法，又称达朗贝尔(d'Alembert)判别法。

定理 2 设已知正项级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，那么 $\rho<1$ 时，级数收敛；$\rho>1\left(\text{或}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty\right)$ 时，级数发散；$\rho=1$ 时，级数可能收敛也可能发散.

证 当 $\rho<1$ 时，取 $r=\frac{\rho+1}{2}$，它是 ρ 与 1 的平均值，在 ρ 与 1 之间，比 ρ 大，比 1 小. 因为 $n\to\infty$ 时 $\frac{u_{n+1}}{u_n}\to\rho$. 又因为 $\rho<r$，所以当 n 充分大以后，$\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 就小于 r (图 6-2). 也就是说，从某个 m 开始后所有的 n 都满足不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<r.$$

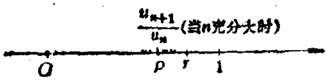

图 6-2

因此有

$$u_{m+1}<ru_m,$$

$$u_{m+2}<ru_{m+1}<r^2u_m,$$

$$u_{m+3}<ru_{m+2}<r^3u_m,$$

$$\cdots,$$

把下面两个级数作比较

$$u_{m+1}+u_{m+2}+u_{m+3}+\cdots \tag{3}$$

$$ru_m+r^2u_m+r^3u_m+\cdots \tag{4}$$

已知(3)的各项小于(4)的对应各项，而(4)是公比 $r<1$ 的等比级数，是收敛的，由比较判别法可知(3)也是收敛的．级数(3)与已知级数比较两者只相差前面有限项之和 $\sum_{n=1}^{m}u_n$，从而它们是同时收敛或同时发散的，既然(3)收敛，所以已知级数也收敛．

当 $\rho>1$ 时，因为 $n\to\infty$ 时，$\frac{u_{n+1}}{u_n}\to\rho$．又因为 $\rho>1$，所以当 n 充分大以后，$\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 就大于 1（图 6-3）．也就是说，从某个 m 开始后所有的 n 都满足不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>1.$$

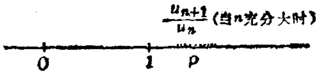

图 6-3

即
$$u_{n+1}>u_n.$$
由此可见，从第 m 项开始以后 u_n 是单调增加的，当 n 无限增大时，u_n 不可能趋于 0，它不满足级数收敛的必要条件，所以级数(1)发散．（同样可以证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$ 的情况．）

当 $\rho=1$ 时，级数(1)可能收敛也可能发散．例如，p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，当 $n\to\infty$ 时，无论正数 p 取什么值都有 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^p\to1$，但我们知道 $p\leqslant1$ 时级数发散，而 $p>1$ 时级数收敛．因此当 $\rho=1$ 时，不能判定级数是收敛或发散．

例 6 讨论下面级数的收敛性

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\cdots+\frac{n^2}{2^n}+\cdots.$$