数学地质丛书

多元统计分析

周光亚　等编

2
33

地质出版社

数学地质丛书

多元统计分析

周光亚　赵　文　陆承新
王锦功　赵振全　编

地质出版社

数学地质丛书

多元统计分析

周光亚　赵　文　陆承新
王锦功　赵振全　编

*

地质部书刊编辑室编辑

责 任 编 辑：高 书 平

地 质 出 版 社 出 版

（北京西四）

地质出版社印刷厂印刷

（北京海淀区学院路29号）

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本：850×1168 1/32 印张：6 字数：155,000

1982年2月北京第一版·1982年2月北京第一次印刷

印数：1—3,780册·定价：0.95元

统一书号：15038·新761

前　言

多元统计分析也简称为多元分析，它是研究客观事物中多种因素间相互依赖的统计规律性的一个数学分支。因为世界上任何事物实际上都是多种因素控制着其形成和发展，而且各种因素间都是普遍联系着的，所以多元统计分析有着广泛的实际基础，在工业、农业、气象、生物、医药、经济等许多领域中都有其应用。

在地质学领域中，虽然大量应用数学工具的时间并不很久，但近些年来有较快的发展并已形成了一门边缘性学科——数学地质。由于地质问题所具有的多因素特征，多元统计分析成为了数学地质最重要的组成部分。各种多元统计方法几乎已应用于地质学的所有分支，并都取得了一定的效果。

许多一元统计中的结果和方法可以推广到多元情形。然而，多元统计分析中也还包括不少处理多元情形下特有矛盾的结果和方法，例如旨在于简化数据结构并突出主要矛盾的主成分分析等方法。

多元统计分析就其一般理论部分来说，包括统计量的分布、参数估计和假设检验等；就其方法部分来说，包括聚类分析、主成分分析、因子分析、典型相关分析、多维标度法、回归分析、多重联列表和判别分析等。本书主要介绍前一部分的内容，希望能为学习多元统计各种方法提供一般性的理论准备。至于所述方法，在本丛书中大部分各有专册进行介绍。

在多元统计的一般理论，绝大部分是针对正态总体而得到的。由于实际问题中大多数情形可以看成或近似地看成为正态总体，还有的能通过变换化成正态总体，所得到的一般理论还是有广泛的适用性的。

本书在写法上考虑尽量对基本内容都给出严格而详细的论证，叙述上力求简练以缩短篇幅。对于只想了解和使用有关结果的读者，可以不看某些较难的定理证明。

为了阅读本书，除了一般地质院校的高等数学知识之外，再有例如本丛书中的《概率统计》和《线性代数》知识即可。

由于我们水平有限，书中一定存在不少缺点和错误，希望读者批评指正。

编者

1980.8

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

Series on Mathematical Geology

MULTIVARIATE STATISTICAL ANALYSIS

Zhou Guangya Zhao Wen

Lu Chengxin

Wang Jingong Zhao Zhenquan

GEOLOGICAL PUBLISHING HOUSE

BEIJING 1981

目　录

第一章　多元分布的概念

多元统计分析中研究的是多个随机变量即多维随机向量的统计规律。作为多元统计分析的基础，这一章将介绍多维随机向量的分布及与其有关的一些概念。

§1. 多维随机向量及其分布

1. 多（p）维随机向量及其分布函数

p个随机变量X_1，X_2，…，X_p构成的p维列向量

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_p\end{pmatrix}=(X_1,X_2,\cdots,X_p)'$$

称为p维随机向量。和随机变量（也可以看成一维随机向量）类似，p维随机向量的统计性质完全由它的概率分布或分布函数所反映，为此我们首先引进：

定义1　称p元函数

$$F(x_1,\cdots,x_p)=P(X_1<x_1,X_2<x_2,\cdots,X_p<x_p)$$

为随机向量$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_p)'$的分布函数，也称为其分量$X_1,\cdots,X_p$的联合分布函数。

给定了随机向量$\boldsymbol{X}$的分布函数，我们就可以计算出$\boldsymbol{X}$落在p维空间R^p中任一柱形集

$$I_{[a,b)}=\{(x_1,\cdots,x_p)\mid a_1\leqslant x_1<b_1,\cdots,a_p\leqslant x_p<b_p\}$$

中的概率，其中$\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_p)'$，$\boldsymbol{b}=(b_1,\cdots,b_p)'$，且$a_i\leqslant b_i$，$i=1,2,\cdots,p$。为此，令

$$\underset{-}{\triangle_{b-a}}F(a_1,\cdots,a_p)=F(b_1,\cdots,b_p)-\sum_{1\leqslant i_1\leqslant n}F_{i_1}+\cdots$$

$$+(-1)^K\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_K\leqslant n}F_{i_1i_2\cdots i_K}+\cdots+(-1)^pF(a_1,\cdots,a_p)$$

$$(1.1)$$

其中$F_{i_1i_2\cdots i_K}$是在$F(x_1,\cdots,x_p)$中取$x_{i_1}=a_{i_1},\cdots,x_{i_K}=a_{i_K}$，其余$x_j=b_j$时的值，于是由概率的一般加法公式及数学归纳法即可证明

$$P(X\in I_{(a,b)})=P(a_1\leqslant X_1<b_1,\cdots,a_p\leqslant X_p<b_p)$$
$$=\triangle_{b-a}F(a_1,\cdots,a_p) \qquad (1.2)$$

（可以参看王梓坤（1976）§1.3），由此进一步还可以计算出随机向量$\boldsymbol{X}$落在互不相交的柱形集的有限或可数并中的概率。

对于p元分布函数有类似于一元分布函数的下述定理

定理1 设$F(x_1,\cdots,x_p)$是p维随机向量$\boldsymbol{X}$的分布函数，则$F(x_1,\cdots,x_p)$具有如下性质

（1）对每一变量x_i是递增的，左连续的，$i=1,2,\cdots,p$。

（2）$F(x_1,\cdots,x_{i-1},-\infty,x_{i+1},\cdots,x_p)$

$$=\lim_{x_i\to-\infty}F(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_p)=0 \quad i=1,2,\cdots,p。$$

$$F(+\infty,+\infty,\cdots,+\infty)=\lim_{x_i\to+\infty}F(x_1,\cdots,x_p)=1$$

$$i=1,2,\cdots,p$$

（3）只要$a_i\leqslant b_i$，$i=1,2,\cdots,p$，必有

$$\triangle_{b-a}F(a_1,\cdots,a_p)\geqslant 0$$

反之，若一p元函数$F(x_1,\cdots,x_p)$满足上述三条性质，它必为某p维随机向量的分布函数。

定理1的前半部分指出了p元分布函数的性质，这在以后各章的讨论中是经常用到的，它的证明完全可以仿照一元分布函数相应性质的证明，定理的后半部分给出了一p元函数是某p维随机向量的分布函数的充分条件，这是实际判断p元分布函数的有力工具。这部分的证明可以参考Loéve（1966中译本）第三章

§ 10。

对于p维随机向量的研究，我们仍然集中于讨论所谓离散型和连续型两类。

定义2 p维随机向量$\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_p)'$称为是离散型的，如果它的每个分量都是离散型的（一维随机变量），$\boldsymbol{X}$称为是连续型的，如果存在非负的p元函数$f(x_1,\cdots,x_p)$，使得它的分布函数$F(x_1,\cdots,x_p)$可以表为

$$F(x_1,\cdots,x_p)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_p}f(y_1,\cdots,y_p)dy_1\cdots dy_p$$

而$f(x_1,\cdots,x_p)$称为$\boldsymbol{X}$的概率密度（函数）或分布密度，也称为其分量$X_1,\cdots,X_p$的联合概率密度或联合分布密度。

对于离散随机向量$\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_p)'$，常常用它的分布列来代替它的分布函数。设$X_i$可能取的值为$a_{K_i}^{(i)}$，$K_i=1,2,\cdots$(可以有限，也可以无穷)，$i=1,\cdots,p$。所谓$\boldsymbol{X}$的分布列即$\boldsymbol{X}$取它可以取的各个值的概率

$$P(X_1=a_{K_1}^{(1)},X_2=a_{K_2}^{(2)},\cdots,X_p=a_{K_p}^{(p)})$$

$$K_i=1,2,\cdots;i=1,2,\cdots,p \tag{1.3}$$

对于连续型随机向量，通常是以它的分布密度代替它的分布函数进行研究。p维随机向量$\boldsymbol{X}$的分布密度$f(x_1,\cdots,x_p)$有类似于一维随机变量的分布密度的性质：

（1）$f(x_1,\cdots,x_p)\geqslant 0$

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,\cdots,x_p)dx_1\cdots dx_p=1$

（3）对于p维欧氏空间R^p中任一Borel集[1] B，有

$$P(\boldsymbol{X}\in B)=\iint_B\cdots\int f(x_1,\cdots,x_p)dx_1\cdots dx_p \tag{1.4}$$

[1] R^p中的Borel集也称为$\mathscr{B}_p$-可测集，对此概念可参看 Halmos（1958）测度论§37。因实际中遇到的集合都是Borel集，故不妨将这里的B了解为一般的集合即可。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

（4）在$f(x_1,\cdots,x_p)$的连续点处，有

$$f(x_1,\cdots,x_p)=\frac{\partial^p F(x_1,\cdots,x_p)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_p} \tag{1.5}$$

其中$F(x_1,\cdots,x_p)$是$\boldsymbol{X}$的分布函数。

反之，如果给定一p维非负函数$f(x_1,\cdots,x_p)$满足上述性质（2），那么由

$$F(x_1,\cdots,x_p)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_p}f(y_1,\cdots,y_p)dy_1\cdots dy_p$$

定义的p元函数$F(x_1,\cdots,x_p)$一定是某p维随机向量的分布函数，从而$f(x_1,\cdots,x_p)$就是该随机向量的分布密度，因此要验证一p元函数是否为一分布密度，只要验证它是否满足上述性质（1）和（2）。

2．边际分布和条件分布

从一p维随机向量$\boldsymbol{X}$中任意抽出K个分量（$1\leqslant K\leqslant p$）X_{i_1}，$X_{i_2},\cdots,X_{i_K}$，便可以得到$\boldsymbol{X}$的一个K维随机子向量，这K维随机子向量的分布函数称为$\boldsymbol{X}$分布的（K元）边际分布（函数）。

由定义可以看出，p维随机向量可以有一元、二元…，直到p元的边际分布。如果已知$\boldsymbol{X}$的分布函数，就能求出它的任一边际分布，我们以求$\boldsymbol{X}$的某一K元（$1\leqslant K\leqslant p$）边际分布为例来说明如何由随机向量的分布函数求出它的任一边际分布。设$\boldsymbol{X}$的分布函数为$F(x_1,\cdots,x_p)$，为符号简便，来求K维随机子向量$\boldsymbol{X}^{(1)}=(X_1,\cdots,X_K)'$的边际分布函数$F^{(1)}(x_1,\cdots,x_K)$。若$K=p$，显然$F^{(1)}(x_1,\cdots,x_K)=F(x_1,\cdots,x_p)$，当$K<p$时，由随机向量的分布函数定义以及概率的连续性可知

$$\begin{aligned}
&F^{(1)}(x_1,\cdots,x_K)=P(X_1<x_1,\cdots,X_K<x_K)\\
&=P(X_1<x_1,\cdots,X_K<x_K,X_{K+1}<+\infty,\cdots,X_p<+\infty)\\
&=\lim_{x\to+\infty}P(X_1<x_1,\cdots,X_K<x_K,X_{K+1}<x,\cdots,X_p<x)\\
&=\lim_{x\to+\infty}F(x_1,\cdots,x_K,x,\cdots,x)
\end{aligned}$$

$$=F(x_1,\cdots,x_K,+\infty,\cdots,+\infty) \tag{1.6}$$

可见$\boldsymbol{X}$中一些分量组成的随机子向量的边际分布，正是在$\boldsymbol{X}$的分布函数$F(x_1,\cdots,x_p)$中，令其余分量所对应的变量趋于$+\infty$所得到的极限函数，特别地，$\boldsymbol{X}$的任一分量X_i的（一元）边际分布即为$F(+\infty,\cdots,+\infty,x_i,+\infty,\cdots,+\infty)$，$i=1,2,\cdots,p$。

对于离散型随机向量$\boldsymbol{X}$，若它的分布列为$P(X_1=a_{j_1}^{(1)},\cdots,X_p=a_{j_p}^{(p)})$，$j_i=1,2,\cdots;i=1,2,\cdots,p$，则$\boldsymbol{X}^{(1)}=(X_1,\cdots,X_K)$的边际分布列为

$$P(X_1=a_{j_1}^{(1)},\cdots,X_K=a_{j_K}^{(K)})$$

$$=\sum_{1\leqslant j_{K+1}}\sum_{1\leqslant j_{K+2}}\cdots\sum_{1\leqslant j_p}P(X_1=a_{j_1}^{(1)},\cdots,X_p=a_{j_p}^{(p)})$$

$$j_i=1,2,\cdots;\ i=1,2,\cdots,K \tag{1.7}$$

如果$\boldsymbol{X}$是连续型的，其分布密度为$f(x_1,\cdots,x_p)$，分布函数为$F(x_1,\cdots,x_p)$，则$\boldsymbol{X}^{(1)}=(X_1,\cdots,X_K)'$的边际分布为

$$F(x_1,\cdots,x_K,+\infty,\cdots,+\infty)$$

$$=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_K}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(y_1,\cdots,y_p)dy_1\cdots dy_p$$

于是得到$\boldsymbol{X}^{(1)}$的边际分布密度为

$$f^{(1)}(x_1,\cdots,x_K)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,\cdots,x_p)dx_{K+1}\cdots dx_p \tag{1.8}$$

在概率论中我们讨论过事件的条件概率，如果事件B的概率$P(B)>0$，则在B发生的条件下事件A发生的条件概率为

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

在讨论多维随机向量时，也会遇到研究其中一些分量取某些值的条件下其它分量的统计规律，这就是所谓条件分布。

设p维随机向量$\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_p)'$剖分成两个子随机向量$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}^{(1)\prime},\ \boldsymbol{X}^{(2)\prime})'$，其中$\boldsymbol{X}^{(1)}=(X_1,\cdots,X_K)'$，$\boldsymbol{X}^{(2)}=(X_{K+1},\cdots,$

$X_p)'$，我们要考虑在 $X_{K+1}=x_{K+1},\cdots,X_p=x_p$ 的条件下 $\boldsymbol{X}^{(1)}$的分布，即 $P(X_1<x_1,\cdots,X_K<x_K|X_{K+1}=x_{K+1},\cdots,X_p=x_p)$。若$\boldsymbol{X}$是离散型的，且$P(X_{K+1}=x_{K+1},\cdots,X_p=x_p)>0$，则有

$$P(X_1=a_{j_1}^{(1)},\cdots,X_K=a_{j_K}^{(K)}|X_{K+1}=x_{K+1},\cdots,X_p=x_p)$$

$$=\frac{P(X_1=a_{j_1}^{(1)},\cdots,X_K=a_{j_K}^{(K)},X_{K+1}=x_{K+1},\cdots,X_p=x_p)}{P(X_{K+1}=x_{K+1},\cdots,X_p=x_p)} \tag{1.9}$$

并称它为在$X_{K+1}=x_{K+1},\cdots,X_p=x_p$的条件下 $\boldsymbol{X}^{(1)}$的条件分布列，以此代替条件分布的讨论。如果$\boldsymbol{X}$ 是连续型的，其分布密度为$f(x_1,\cdots,x_p)$，这时我们就不能象离散型那样讨论条件分布$P(X^1<x_1,\cdots,X_K<x_K|X_{K+1}=x_{K+1},\cdots,X_p=x_p)$，因为对任何$x_{K+1},\cdots,x_p$，$P(X_{K+1}=x_{K+1},\cdots,X_p=x_p)=0$。为了解决这一困难，我们取$\Delta x_{K+1}>0,\cdots,\Delta x_p>0$，考虑

$$P(X_1<x_1,\cdots,X_K<x_K|x_{K+1}\leqslant X_{K+1}<x_{K+1}+\Delta x_{K+1},\cdots,x_p\leqslant X_p<x_p+\Delta x_p)$$

$$=\frac{P(X_1<x_1,\cdots,X_K<x_K,x_{K+1}\leqslant X_{K+1}<x_{K+1}+\Delta x_{K+1},\cdots,x_p\leqslant X_p<x_p+\Delta x_p)}{P(x_{K+1}\leqslant X_{K+1}<x_{K+1}+\Delta x_{K+1},\cdots,x_p\leqslant X_p<x_p+\Delta x_p)}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_K}\int_{x_{K+1}}^{x_{K+1}+\Delta x_{K+1}}\cdots\int_{x_p}^{x_p+\Delta x_p}f(y_1,\cdots,y_p)dy_1\cdots dy_p}{\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{x_{K+1}}^{x_{K+1}+\Delta x_{K+1}}\cdots\int_{x_p}^{x_p+\Delta x_p}f(y_1,\cdots,y_p)dy_1\cdots dy_p}$$

注意到分布密度函数满足积分换序的条件，在上式中将积分交换次序，再利用积分中值定理，并令$\Delta x_{K+1}\to0,\cdots,\Delta x_p\to0$，取极限便得到

$$P(X_1<x_1,\cdots,X_K<x_K|X_{K+1}=x_{K+1},\cdots,X_p=x_p)$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_K} f(y_1,\cdots,y_K,x_{K+1},\cdots,x_p)dy_1\cdots dy_K}{\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(y_1,\cdots,y_K,x_{K+1},\cdots,x_p)dy_1\cdots dy_K}$$

$$=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_K}\frac{f(y_1,\cdots,y_K,x_{K+1}\cdots,x_p)}{f^{(2)}(x_{K+1},\cdots,x_p)}dy_1\cdots dy_K$$

其中$f^{(2)}(x_{K+1},\cdots,x_p)$为$\boldsymbol{X}^{(2)}=(X_{K+1},\cdots,X_p)'$的边际分布密度。于是我们定义在$X_{K+1}=x_{K+1},\cdots,X_p=x_p$的条件下$\boldsymbol{X}^{(1)}=(X_1,\cdots,X_K)'$的条件分布密度为

$$f(x_1,\cdots,x_K|x_{K+1},\cdots,x_p)=\frac{f(x_1,\cdots,x_K,x_{K+1},\cdots,x_p)}{f^{(2)}(x_{K+1},\cdots,x_p)} \tag{1.10}$$

而条件分布函数为

$$P(X_1<x_1,\cdots,X_K<x_K|X_{K+1}=x_{K+1},\cdots,X_p=x_p)$$
$$=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_K} f(y_1,\cdots,y_K|x_{K+1},\cdots,x_p)\,dy_1\cdots dy_K \tag{1.11}$$

3. 统计独立性

设p维随机向量$\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_p)$的分布函数为$F(x_1,\cdots,x_p)$，分量$X_i$的边际分布为$F_i(x_i)$，$i=1,2,\cdots,p$，又$\boldsymbol{X}$剖分成两个随机子向量，为简便计，设$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}^{(1)\prime},\boldsymbol{X}^{(2)\prime})'$，$\boldsymbol{X}^{(1)\prime}=(X_1,\cdots,X_K)$，$\boldsymbol{X}^{(2)\prime}=(X_{K+1},\cdots,X_p)$，$\boldsymbol{X}^{(1)}$，$\boldsymbol{X}^{(2)}$的边际分布分别为$F^{(1)}(x_1,\cdots,x_K)$和$F^{(2)}(x_{K+1},\cdots,x_p)$。

定义3 称$\boldsymbol{X}$的各分量$X_1,\cdots,X_p$是相互独立的，如果

$$F(x_1,\cdots,x_p)=F_1(x_1)\cdots F_p(x_p) \tag{1.12}$$

称$\boldsymbol{X}$的两个子随机向量$\boldsymbol{X}^{(1)}$和$\boldsymbol{X}^{(2)}$是相互独立的，如果

$$F(x_1,\cdots,x_p)=F^{(1)}(x_1,\cdots,x_K)\cdot F^{(2)}(x_{K+1},\cdots,x_p) \tag{1.13}$$

称$\boldsymbol{X}$的各分量$X_1,\cdots,X_p$是两两独立的，如果任取$\boldsymbol{X}$中两分量X_i，X_j，它们是相互独立的。

显然，若X的各分量相互独立，它的任意一些分量也必相互独立，特别是X的各分量必两两独立，反之却未必成立。可以证明$\boldsymbol{X}$的各分量的相互独立有以下两个充分必要条件：

（1）$\boldsymbol{X}$的各分量相互独立的充要条件是对任意一维欧氏空间中p个Borel集$B_1,\cdots,B_p$，有

$$P(X_1\in B_1,\cdots,X_p\in B_p)=P(X_1\in B_1)\cdots P(X_p\in B_p) \tag{1.14}$$

（2）$\boldsymbol{X}$的各分量相互独立的充要条件是对任意p个$\mathscr{B}_1$-可测函数[1] $g_1(x),\cdots,g_p(x)$，$g_1(X_1),\cdots,g_p(X_p)$相互独立。

上述两个充要条件常用来判断一些随机变量或它们的函数是否相互独立，它们的证明由于涉及到测度论的内容，故不在此给出，可以参看王梓坤（1976）§2.7。

若将$\boldsymbol{X}$剖分为m个子随机向量$\boldsymbol{X}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{X}^{(m)}$，其中$\boldsymbol{X}^{(i)}$为$q$维随机向量，$\sum\limits_{i=1}^{m}q_i=p$，则定义$\boldsymbol{X}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{X}^{(m)}$是相互独立的，如果

$$F(\boldsymbol{x})=F(x_1,\cdots,x_p)=F_1(\boldsymbol{x}^{(1)})F_2(\boldsymbol{x}^{(2)})\cdots F_m(\boldsymbol{x}^{(m)}) \tag{1.15}$$

其中$F(\boldsymbol{x})$，$F_i(\boldsymbol{x}^{(i)})$分别为$\boldsymbol{X}$和$\boldsymbol{X}^{(i)}$的分布函数，$i=1,2,\cdots,m$。

仿上，关于$\boldsymbol{X}$的各子随机向量相互独立也有如下两个充要条件：

（1）将$\boldsymbol{X}$剖分为m个子向量$\boldsymbol{X}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{X}^{(m)}$，其中$\boldsymbol{X}^{(i)}$为$q_i$维，$\sum\limits_{i=1}^{m}q_i=p$，则$\boldsymbol{X}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{X}^{(m)}$相互独立的充要条件是对任意的$q_i$维欧氏空间中的Borel集$B_i$，$i=1,2,\cdots,m$，有

[1] $\mathscr{B}_1$-可测函数是非常广的一类一元函数，一切连续函数及连继函数列的极限均属$\mathscr{B}_1$-可测函数，因此实际问题中常遇到的函数一般也都是$\mathscr{B}_1$-可测函数。同样也有类似的所谓p元$\mathscr{B}_p$-可测函数。

$$P(\boldsymbol{X}^{(1)}\in B_1,\cdots,\boldsymbol{X}^{(m)}\in B_m)=P(\boldsymbol{X}^{(1)}\in B_1)\cdots P(\boldsymbol{X}^{(m)}\in B_m) \tag{1.16}$$

（2）如（1）中将$\boldsymbol{X}$剖分，$\boldsymbol{X}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{X}^{(m)}$相互独立的充要条件是对任意的$q_i$元$\mathscr{B}_{q_i}$-可测函数$g_i(\boldsymbol{x}^{(i)})$，$(i=1,2,\cdots,m)$，$g_1(\boldsymbol{X}^{(1)}),\cdots,g_m(\boldsymbol{X}^{(m)})$相互独立。

为了判断离散型和连续型随机向量的分量的相互独立性，我们有以下两个定理

定理2 若$\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_p)'$是离散型随机向量，其分布列为$P(X_1=a_{j_1}^{(1)},\cdots,X_p=a_{j_p}^{(p)})$，$j_i=1,2,\cdots;i=1,2,\cdots,p$，则$\boldsymbol{X}$的各分量相互独立的充要条件是

$$P(X_1=a_{j_1}^{(1)},\cdots,X_p=a_{j_p}^{(p)})=P(X_1=a_{j_1}^{(1)})\cdots P(X_p=a_{j_p}^{(p)}) \tag{1.17}$$

证明

必要性　在上述$\boldsymbol{X}$的分量相互独立的充要条件（1）中取$B_i=\{a_{j_i}^{(i)}\}$——由$a_{j_i}^{(i)}$一个点组成的集合，这是一个Borel集，于是由$\boldsymbol{X}$的各分量相互独立得

$$P(X_1=a_{j_1}^{(1)},\cdots,X_p=a_{j_p}^{(p)})=P(X_1\in B_1,\cdots,X_p\in B_p)$$
$$=P(X_1\in B_1)\cdots P(X_p\in B_p)=P(X_1=a_{j_1}^{(1)})\cdots P(X_p=a_{j_p}^{(p)})$$

充分性　若（1.17）式成立，将其两边对一切满足$a_{j_1}^{(1)}<x_1,\cdots,a_{j_p}^{(p)}<x_p$的$j_1,\cdots,j_p$求和，即得

$$F(x_1,\cdots,x_p)=F_1(x_1)\cdots F_p(x_p)$$

其中$F(x_1,\cdots,x_p)$为$\boldsymbol{X}$的分布函数，$F_i(x_i)$为X_i的（边际）分布函数#

定理3 设$\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_p)'$是连续型的随机向量，具有连续的分布密度$f(x_1,\cdots,x_p)$，则$\boldsymbol{X}$各分量相互独立的充要条件是

$$f(x_1,\cdots,x_p)=f_1(x_1)\cdots f_p(x_p) \tag{1.18}$$

其中$f_i(x_i)$为X_i的连续的分布密度。

证明　以$F(x_1,\cdots,x_p)$及$F_i(x_i)$，$i=1,2,\cdots,p$分别表示$\boldsymbol{X}$及X_i的分布函数。

必要性　由$\boldsymbol{X}$为连续型，且各分量是相互独立的，有

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com