奥林匹克竞赛

千题巧解

主编 陈家昌 才裕平

AOLINPIKE JINGSAI QIANTIQIAOJIE

長春出版社

修订版

初中数学

二年级

AOLINPIKE

奥林匹克竞赛千题巧解

初中数学二年级

主　　编　陈家昌　才裕平
本册主编　才裕平　高长山

長春出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克竞赛千题巧解.初中二年级数学/陈家昌,才裕平主编.—长春:长春出版社,1999.7(1999.9重印)(2000.1重印)(2001.1重印)(2001.5重印)

ISBN 7-80604-366-7

Ⅰ.奥...　Ⅱ.①陈...②才...　Ⅲ.数学课-初中-解题　Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第45292号

责任编辑:毕素香　　封面设计:王　帆

长春出版社出版

(长春市建设街43号)

(邮编130061　电话8569938)

长春市第四印刷厂印刷

新华书店经销

850×1168毫米　32开本　10.25印张　227千字

1999年7月第1版　2001年5月第5次印刷

印数:20001—23000册　定价:9.80元

《奥林匹克竞赛千题巧解》
数学编委会

主　编　陈家昌　才裕平

副主编　金　戈

编　委　（按姓氏笔画排列）

才裕平　王　强　代正之　刘学东
全锡贵　吕献隆　吴作奇　陈家昌
金　戈　郑国栋　姜　慧　赵会深
高长山　高立东　童金峰　谢春旭

作　者　（按姓氏笔画排列）

于淑兰　于淑珍　王　成　尹　丽
王云正　石瑞丽　刘　冬　刘　明
刘淑元　庄殿金　吕赛丽　宋　英
宋文才　李　峰　李　敏　李月萍
李素彩　邵国发　苏英杰　陈帮义
吴颂荔　张　颖　余福春　郑国芝
赵彦菲　赵　原　徐　艳　高玉玖
贾昭华　曹　仁　黄　冶　龚云霞

前　言

奥林匹克运动起源于古希腊(公元前776年),这是力量、灵活与美的竞赛。数学是思维的体操、科学的皇后,解数学难题的竞赛,同样被称为数学奥林匹克。

多年的数学竞赛实践证明,广泛深入地开展中学数学课外活动,科学合理地举办各级数学竞赛是促进数学教育的发展,提高青少年数学素质的一个有力措施。

本书是根据九年义务教育教学大纲编写的,我们力图使书的内容源于现行课本,着眼于数学智力的开发,寓知识于趣味之中。

本书所选题目,由浅入深,循序渐进,知识内涵点多面广,互相渗透,纵横交错。修订版每间后增加了测试题,书后增加了五套综合测试题和参考答案,以便学生训练,提高解题能力和技巧。

限于篇幅,本书不可能对与之有关的问题面面俱到,对于某些没有涉及的问题,希望读者研究时加以丰富和补充。

希望本书能成为青少年数学爱好者的良师益友。

本书主编是才裕平、高长山,副主编为高立东、刘学东、李景秋、姜慧。参加编著的还有李敏、陈帮义、王云正、黄冶、庄殿金、刘明、刘淑元等。由于我们的理论水平有限,一定会有很多欠缺之处,希望读者批评指正。

目　　录

第一章　因式分解

[知识要点]

1. 概念:因式分解、公因式、完全平方式

2. 方法:(1)提公因式法:$ma+mb-mc=m(a+b-c)$

(2)公式法:平方差公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

完全平方公式$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

立方和与立方差公式 $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

(3)十字相乘法:

对于不能用完全平方公式分解的二次三项式,我们用十字相乘法.

十字相乘法一般分为两种情况:

①二次项系数为 1 的二次三项式的分解

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

②二次项系数不为 1 的二次三项式的分解　对于二次三项式 ax^2+bx+c(a,b,c 都是整数,且 $a\neq 0$),若存在四个整数 a_1,a_2,c_1,c_2,使二次项系数能分解成 $a=a_1a_2$,常数项能分解成 $c=c_1c_2$,且一次项系数可写成 $b=a_1c_2+a_2c_1$,则二次三项式可分解为

$$ax^2+bx+c=(a_1x+c_2)(a_2x+c_1)$$

一般表示为
$$\begin{array}{ccc} a_1 & & c_1 \\ & \times & \\ a_2 & & c_2 \end{array}$$

按斜线交叉相乘的积的和　即是 $a_1c_2+a_2c_1$,若 a_1c_2

$+a_2c_1=b$,说明原二次三项式可分解.

注意:能用完全平方公式分解的二次三项式也一定能用十字相乘法分解.还要知道并不是所有的二次三项式都可以分解.

(4)分组分解法:

分组分解法是前三种方法的综合运用,根据多项式的具体特点,可分为两类

①分组后能提取公因式

②分组后能运用公式法或十字相乘法

注意:用分组分解法时,分组前,必须思路清楚,预见到下一步分解的可能性.

(5)几种特殊的分解方法:

有些多项式往往不能直接分解,此时可考虑如下几种方法:①拆项或添项,②换元法,③待定系数法,④求根法,⑤对称多项式的分解法,⑥双十字相乘法,这些方法的应用将在后面例题中专题研究.

[例题]

1.分解因式:$4a^3-\frac{1}{16}$.

解　原式$=\frac{1}{16}(64a^3-1)=\frac{1}{16}(4a-1)(16a^2+4a+1)$

说明:一般情况下,分解因式时并不要求提取分数公因式,例如分解

$$\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2=(\frac{1}{2}x)^2-(\frac{1}{3}y)^2=(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y)(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y)$$

就完成了,但是为了用公式继续分解,有时也需要提取分数公因式.

2.把下列各式分解因式

(1)$(a+b)^3+c^3$;

(2)$x^{3n}-x^{6n}$(n 是自然数).

解　(1)原式$=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab-ac-bc)$

(2)原式$=x^{3n}(1-x^{3n})=x^{3n}(1-x^n)(1+x^n+x^{2n})$

说明:$x^{3n}-x^{6n}$易错解为:

$x^{3n}-x^{6n}=x^{3n}(1-x^2)=x^{3n}(1-x)(1+x)$

这是由于运算错误造成的,应分清

$x^{6n}=(x^{3n})^2$ 和 $x^{6n}=x^{3n}.x^{3n}$.

3.分解因式

(1)$x^2-80x+1456$ (2)x^4-54x^2-2187;

(1)解　原式$=x^2-80x+1600-1600+1426$

$=(x-40)^2-144=(x-40+12)(x-40-12)$

$=(x-28)(x-52)$

(2)解　原式$=x^4-54x^2+729-729-2187$

$=(x^2-27)^2-2916$

$=(x^2-27+54)(x^2-27-54)$

$=(x^2+27)(x^2-81)$

$=(x-9)(x+9)(x^2+27)$

说明:由于十字相乘法带有试验性质,在常数项的绝对值较大时,试验次数较多,这非常不方便,从而使分解方法改用配方法较为合理.

4.把下列各式分解因式:

(1)$(x^2+3x-3)(x^2+3x+1)-5$;

(2)$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$.

解　(1)原式$=(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-8$

$=(x^2+3x+2)(x^2+3x-4)$

$$=(x+1)(x+2)(x-1)(x+4)$$

或　原式$=(x^2+3x-1-2)(x^2+3x-1+2)-5$

$$=(x^2+3x-1)^2-4-5$$

$$=(x^2+3x-1-3)(x^2+3x-1+3)$$

$$=(x+1)(x+2)(x-1)(x+4)$$

(2)原式$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1$

$$=(x^2+5x+5-1)(x^2+5x+5+1)+1$$

$$=(x^2+5x+5)^2-1+1$$

$$=(x^2+5x+5)^2$$

5. 已知 $a+b=1$,求 a^3+b^3+3ab 的值.

解　a^3+b^3+3ab

$$=(a+b)(a^2-ab+b^2)+3ab$$

$$=a^2-ab+b^2+3ab$$

$$=(a+b)^2=1$$

说明:适当应用因式分解,可使某些问题的解法简便.

6. 因式分解 $x^3+9x^2+26x+24$.

解:原式$=(x^3+2x^2)+(7x^2+14x)+(12x+24)$

$$=x^2(x+2)+7x(x+2)+12(x+2)$$

$$=(x+2)(x^2+7x+12)$$

$$=(x+2)(x+3)(x+4)$$

7. 因式分解　$a^4+a^2b^2+b^4$.

解　$a^4+a^2b^2+b^4$

$$=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2$$

$$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$$

$$=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$$

8. 因式分解$(x+y)^4+x^4+y^4$.

解　$(x+y)^4+x^4+y^4$

$=(x+y)^4-x^2y^2+x^4+x^2y^2+y^4$

$=(x^2+2xy+y^2+xy)(x^2+2xy+y^2-xy)$

$\quad+(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$=(x^2+3xy+y^2)(x^2+xy+y^2)+(x^2+xy$

$\quad+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$=(x^2+xy+y^2)(x^2+3xy+y^2+x^2-xy+y^2)$

$=2(x^2+xy+y^2)^2$

9.因式分解$(1+y)^2-2x^2(1-y^2)+x^4(1-y)^2$.

解　原式$=(1+y)^2+2(1+y)x^2(1-y)+x^4(1-y)^2$

$\quad-2(1+y)x^2(1-y)-2x^2(1+y^2)$

$=[(1+y)+x^2(1-y)]^2-2(1+y)x^2(1-y)$

$\quad-2x^2(1+y^2)$

$=[(1+y)+x^2(1-y)]^2-(2x)^2$

$=[(1+y)+x^2(1-y)+2x]\cdot[(1+y)+x^2(1-y)-2x]$

$=(x^2-x^2y+2x+y+1)(x^2-x^2y-2x+y+1)$

$=[(x+1)^2-y(x^2-1)][(x-1)^2-y(x^2-1)]$

$=(x+1)(x+1-y-xy)(x-1)(x-1-xy-y)$

10.因式分解$(1+y)^2-2x^2(1+y)^2+x^4(1-y)^2$.

解　对首、末两项配方,得

原式$=(1+y)^2+2(1+y)x^2(1-y)+x^4(1-y)^2$

$\quad-2(1+y)x^2(1-y)-2x^2(1+y^2)$

$=[(1+y)+x^2(1-y)]^2-(2x)^2$

$=[(1+y)+x^2(1-y)+2x]\cdot[(1+y)+x^2(1-y)-2x]$

$=(x^2+2x+1+y-x^2y)(x^2-2x+1+y-x^2y)$

$=[(x+1)^2-y(x^2-1)]\cdot[(x-1)^2-y(x^2-1)]$

$=(x+1)(x+1-xy+y)(x-1)(x-1-xy-y)$

11.因式分解$27a^3(2b+c)-8b^3(c+3a)-c^3(3a-2b)$.

解：原式 $=27a^3(2b+c)-8b^3\cdot[(2b+c)+(3a-2b)]$
$-c^3(3a-2b)$
$=(2b+c)[(3a)^3-(2b)^3)]-(3a-2b)[(2b)^3+c^3]$
$=(2b+c)(3a-2b)\cdot(9a^2+6ab+4b^2-4b^2+2bc-c^2)$
$=(2b+c)(3a-2b)(3a+c)(3a-c)$

12. 把 $x^8+98x^4y^4+y^8$ 分解为两个整系数多项式之积.

解：$x^8+98x^4y^4+y^8$
$=(x^4+y^4)^2+64x^2y^2+16x^2y^2(x^4+y^4)$
$-16x^2y^2(x^4+y^4-2x^2y^2)$
$=(x^4+8x^2y^2+y^4)^2-16x^2y^2(x^2-y^2)^2$
$=(x^4-4x^3y+8x^3y^2+4xy^3+y^4)\cdot(x^4+4x^3y+8x^2y^2$
$-4xy^3+y^4)$

13. 因式分解 $x^4+y^4+z^4+1+8xyz-2(y^2z^2+z^2x^2$
$+x^2y^2+x^2+y^2+z^2)$.

解：原式 $=[(x^2)^2+(-y^2)^2+(-z^2)^2+1^2+2(-x^2y^2$
$+y^2z^2-z^2x^2)+2(x^2-y^2-z^2)]-4(x^2-2xyz+y^2z^2)$
$=(x^2-y^2-z^2+1)^2-[2(x-yz)]^2$
$=[(x^2-y^2-z^2+1)+2(x-yz)][(x^2-y^2-z^2+1)$
$-2(x-yz)]$
$=[(x^2+2x+1)-(y^2+2yz+z^2)][(x^2-2x+1)$
$-(y^2-2yz+z^2)]$
$=[(x+1)^2-(y+z)^2][(x-1)^2-(y-z)^2]$
$=(x+1+y+z)(x+1-y-z)(x-1+y-z)\cdot(x-1$
$-y+z)$
$=(x+y+z+1)(x-y-z-1)(x+y-z-1)\cdot(x$
$-y+z+1)$

14. 因式分解 $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)+24$.

解　原式$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$

$=(x^2+x)^2-14(x^2+x)+48$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$

$=(x-2)(x+3)(x^2+x-8)$

15. 因式分解$(x^2-5x+4)(x^2-x-2)-72$.

解　原式$=(x-4)(x-1)(x-2)(x+1)-72$

$=(x-4)(x+1)(x-1)(x-2)-72$

$=(x^2-3x-4)(x^2-3x+2)-72$

$=(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)-80$

$=(x^2-3x-10)(x^2-3x+8)$

$=(x-5)(x+2)(x^2-3x+8)$

16. 证明四个连续自然数的积与 1 之和必是一个完全平方式.

证　设这四个连续自然数为 n、$n+1$、$n+2$、$n+3$. 则

$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$

令 $x=n^2+3n$. 则

原式$=x(x+2)+1=(x+1)^2=(n^2+3n+1)^2$

17. 因式分解 $3x^2+5xy-2y^2+x+9y-4$.

解　由于 $3x^2+5xy-2y^2=(3x-y)(x+2y)$

故可设 $3x^2+5xy-2y^2+x+9y-4$

$=(3x-y+a)(x+2y+b)$

$=3x^2+5xy-2y^2+(a+3b)x+(2a-b)y+ab$

比较两边系数得$\begin{cases} a+3b=1 & (1) \\ 2a-b=9 & (2) \\ ab=-4 & (3) \end{cases}$

由(1)(2)联立得. $a=4$. $b=-1$. 代入(3)式适合.

$\therefore$原式$=(3x-y+4)(x+2y-1)$

18.满足算式 $p^2+q^2=7pq$ 的正实数 p、q 能使关于 x、y 的多项式 $xy+px+qy+1$ 分解成两个一次因式的积.求 p、q 的值.

解　从 $p>0,q>0$ 及 $p^2+q^2=7pq$ 得 $p+q=3\sqrt{pq}$. 又多项式只能分解成两个一次因式的积,所以可令 $xy+px+qy+1=(ax+b)(cy+d)$,于是

$xy+px+qy+1=acxy+adx+bcy+bd$

比较对应项的系数,得

$ac=1,bd=1,ad=p,bc=q$

所以 $pq=abcd=1$　因此 $p+q=3$

于是 $p=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$,　　$q=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

或　$p=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$,　　$q=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

19.已知多项式 x^3+bx^2+cx+d 的系数都是整数,若 $bd+cd$ 是奇数,证明这个多项式不能分解为两个整系数多项式的乘积.

证　设 x^3+bx^2+cx+d

$=(x+p)(x^2+qx+r)$

$=x^3+(p+q)x^2+(pq+r)x+pr$(其中 p、q、r 均为整数)

比较两边系数得　$pr=d$

又 $bd+cd=d(b+c)$是奇数,故 $b+c$ 与 d 均为奇数

那么 pr 也是奇数,即 p 与 r 是奇数

把 $x=1$ 代入(因为它是恒等式)得

$1+b+c+d=(1+p)(1+q+r)$　　(1)

$\because b+c,d$ 为奇数

$\therefore 1+b+c+d$ 也为奇数，

而 p 为奇数，$\therefore 1+p$ 为偶数

$\therefore (1+p)(1+q+r)$ 为偶数，这说明等式(1)的左端为奇数，右端为偶数，与之矛盾.

所以，所述多项式不能分解成两个整系数多项式的乘积.

20. 已知 $x^5-5qx+4r$ 能被 $(x-c)^2$ 整除，求证 $q^5=r^4$.

证　设 $x^5-5qx+4r=(x^2-2cx+c^2)(x^3+ax^2+bx+4r/c^2)$. 展开右端，比较两边同次幂的系数，得

$$\begin{cases} a-2c=0 & (1)\\ c^2+b-2ac=0 & (2)\\ ac^2-2ac+4r/c^2=0 & (3)\\ 8r/c-bc^2=5q & (4)\end{cases}$$

由(1)，(2)　得 $a=2c$，$b=3c^2$，代入(3)(4)，解得

$r=c^5$，$q=c^4$，　$\therefore r^4=q^5$

21. 求证 x^2-xy+y^2+x+y 不能分解成两个一次因式的乘积.

证　由于原式中不含常数项，故若原式能分解的话，就只能分解为形如 $(ax+by)(cx+dy+\mathrm{e})$ 的积. 设 $x^2-xy+y^2+x+y=(ax+by)(cx+dy+\mathrm{e})$，

且 $\mathrm{e}\neq 0$，将右边展开，并比较系数，得

$$\begin{cases} ac=1 & (1)\\ ad+bc=-1 & (2)\\ bd=1 & (3)\\ a\mathrm{e}=1 & (4)\\ b\mathrm{e}=1 & (5)\end{cases}$$

由(4)、(5)得 $a=b$，代入(3)，由(1)、(3)得 $c=d$，将以上

结果代入(2)得 $bd+bd=-1$,即 $bd=-\frac{1}{2}$,而这与(3)矛盾,即(1)~(5)联立无解,题设得证.

22.因式分解:$x^3-19x-30$.

解　30的因数为 $\pm1,\pm2,\pm3,\pm5,\pm6,\pm10,\pm15,\pm30$,以 $f(x)$ 记多项式,

$\because f(1)=-48\quad f(-1)=-12.$

$f(2)=-60, f(-2)=0\quad f(3)=-60\quad f(-3)=0$

$f(5)=0$.(这里已有 $f(-2),f(-3),f(5)$ 等于零了,三次多项式只有三个一次因式,所以不必再计算了)

$\therefore x^3-19x-30=k(x+2)(x+3)(x-5)$

$\because x^3$ 的系数为 1,$\therefore k=1$

故 $x^3-19x-30=(x+2)(x+3)(x-5)$

23.在实数范围内分解因式 $x^3+x^2-10x+6$.

解　记原式为 $f(x)$

$\because f(3)=0$

$\therefore x-3$ 是原式的因式,作综合除法

$$\begin{array}{r|l}
 & 1+1-10-6 \\
3 & \quad\ +3+12+6 \\
\hline
 & 1+4+2 \quad | \ \underline{0}
\end{array}$$

得,原式 $=(x-3)(x^2+4x+2)$

$=(x-3)(x+2+\sqrt{2})(x+2-\sqrt{2})$

24.因式分解 $x^4+2x^3-9x^2-2x+8$.

解　由于原式中各项系数和为零且各奇数项系数之和等于各偶数项系数之和,故 ±1 都是原式的根,故原式有因式 $x-1$ 及 $x+1$,作长除法(或作两次综合除法),即原式除以 x^2-1,可求得原式有二次因式 x^2+2x-8,所以,

原式$=(x-1)(x+1)(x^2+2x-8)$

$=(x-1)(x+1)(x-2)(x+4)$

25.因式分解　$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

解　原式$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b-c)(b+c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)[a^2-(b+c)a+bc]$

$=(a-b)(a-c)(b-c)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

26.因式分解 $a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$.

解　原式 $a^4(b^2-c^2)-(b^4-c^4)a^2+b^2c^2(b^2-c^2)$

$=(b^2-c^2)(a^4-a^2b^2-a^2c^2+b^2c^2)$

$=(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)$

$=-(a+b)(b+c)(c+a)(a-b)(b-c)(c-a)$

27.因式分解 $x^4+(x+y)^4+y^4$.

解　$\because x^4+y^4$

$=(x+y)^4-4x^3y-6x^2y^2-4xy^3$

$=(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2$

$\therefore$原式$=(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2+(x+y)^4$

$=2(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2$

$=2[(x+y)^4-2xy(x+y)^2+(xy)^2]$

$=2[(x+y)^2-xy]^2$

$=2(x^2+y^2+xy)^2$

28.因式分解$(a+b-2ab)(a+b-2)+(1-ab)^2$.

解　令 $x=a+b.y=ab$ 则

原式$=(x-2y)(x-2)+(1-y)^2$

$=x^2-2xy-2x+4y+1-2y+y^2$

$=(x-y)^2-2(x-y)+1$