

高考会考

数学

试题精析大全

杨象富 陈振宣 主编

- 点评
- 解
- 思路分析
- 考查要求

代数

卷

上海辞书出版社

GaokaoHuikao Shuxue ShitiJingxiDaquan



数据加载失败，请稍后重试！

数学

杨象富 陈振宣 主编

代数

卷

上海辞书出版社

高考会考数学试题精析大全·代数卷

上海辞书出版社出版

(上海陕西北路457号 邮政编码200040)

上海辞书出版社发行所发行

商务印书馆上海印刷股份有限公司印刷

开本 850×1168 1/32 印张 12.25 插页 1 字数 330 000

2000年1月第1版 2000年1月第1次印刷

印数 1—8 000

ISBN 7-5326-0611-2/O·21

定价: 17.80 元

前 言

我国自 1952 年起实施高校招生统一考试,已历经四十余年,除了十年动乱留下一片空白之外,先后积累了大量高考数学试题. 这些试题体现了国家的教学要求、选才标准和导向意志,大都经过千淘百滤,流沙澄金,其中不少是参加命题的专家、学者、教师的精心杰作,被公认为有意义的好题,久用而不衰,在中学数学教育中起过良好的导向作用. 四十多年积聚起来的好题妙题,可谓繁花似锦,精彩纷呈,这是我国数学教育界的一笔极为珍贵的财富. 这批试题还折射出我国数学教育改革的历程,其中有许多值得记取的经验与教训. 特别是自 1985 年以来多次的命题改革试验,在教育测量的科学理论指导下,对试题精益求精,推陈出新,在国家高考和各地会考中,几乎每年都涌现若干新颖好题,传诵一时. 为了使这批典型试题在今后的数学教育中发挥更大的作用,我们精心编写了这本《高考会考数学试题精析大全》.

本书首先将高考、会考的精萃试题按现行教学大纲的知识体系分章梳理,选出其中最具典型性的试题作为范例,与其有类似要求的试题作为练习题. 范例按“考查要求”、“思路分析”、“解”和“点评”四栏,精心剖析,详加阐述. 剖析和阐述均以我们对数学思维能力结构的下述理解为指导:

$$\boxed{\text{数学知识与数学语言}} \times \boxed{\text{数学思维方法}} \times \boxed{\text{情感智力}} \\ = \boxed{\text{数学思维能力}}$$

即着重抓好三个要素:(1)突出对数学知识与语言的理解和运用能力的培养,强化自然语言、符号语言、图象语言的互译和相互渗透的训练;(2)始终注意对数学思维方法的介绍与概括;(3)重视学习兴趣、意志、毅力等心理素质的启迪. 总之,以发展青年学子的思维能力为

本,力求有效提高数学素质.

对于范例的解答,在注意保留原解精采部分的基础上,我们给出了不少具有新意的妙解,并在点评中作了规律性的概括和自然的引申,培养读者在解题后进行回顾反思的习惯.这不仅是提高解题能力所必需的,也是开发人脑潜能的有效手段.数学解题能力空间是数学思维能力空间的真子集,我们期望通过解题训练达到开发脑功能的目的.具有数学思维习惯的头脑是数学头脑,数学头脑是进入信息社会的通行证.

编写本书的直接目的是帮助读者跳出“题海”,获得自如应试的能力.更深远的意图则是:希望读者通过阅读、思考和练习,开发自己的脑潜能,领悟思维方法,提高思维素质,为今后的学习、工作和生活打下扎实的基础,在即将到来的新世纪中,具有参加竞争和把握机会的较强能力,为国家民族作出更大的贡献.

虽已尽心竭力,但限于我们的水平,编写中仍会有不当和疏漏,热诚欢迎读者与专家指正.在此成书之际,我们对历年参加命题的专家、学者、教师致以深切的谢意!

参加本书编写的有杨象富、柴盛楣、贝跃敏、潘亚奎、胡庆彪、姚振方(第一至第六章),陈振宣、陈永莉、郑瑞岳(第七、八章),本书的主编是陈振宣(研究员,上海)和杨象富(特级教师,浙江).

编 者

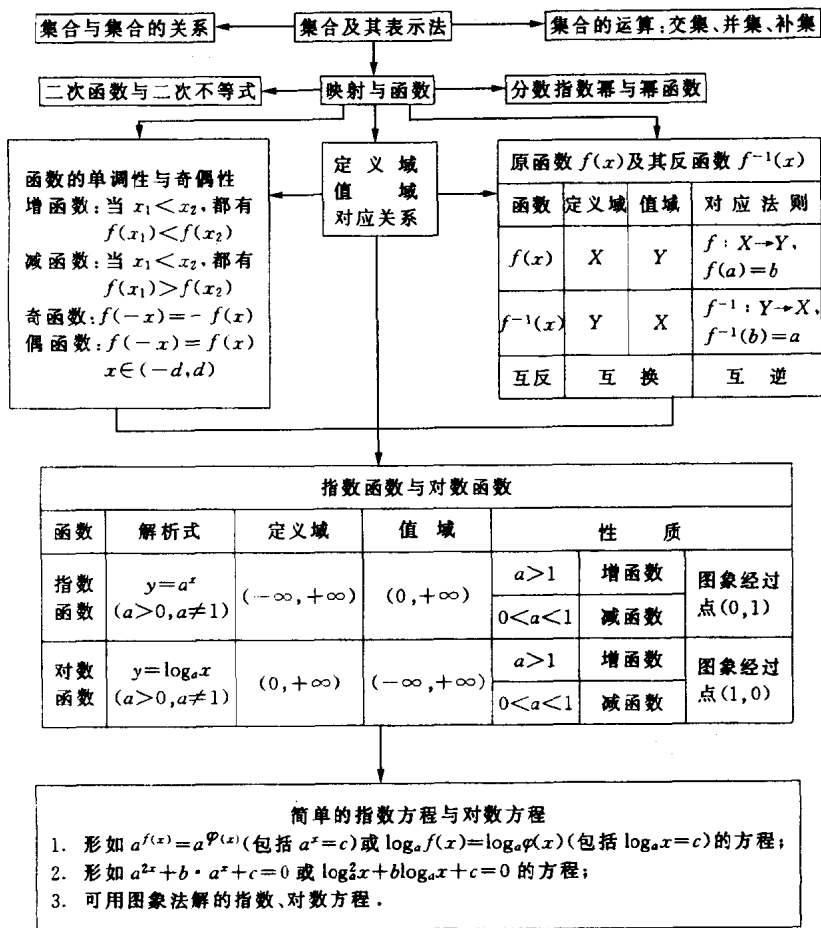
2000年1月

目 录

第一章	集合与函数	1
第二章	三角函数	39
第三章	加法定理与解斜三角形	60
第四章	反三角函数与简单三角方程	100
第五章	不等式	124
第六章	数列、极限、数学归纳法	152
一	数列	154
二	极限	173
三	数学归纳法	187
第七章	复数与向量	202
第八章	排列、组合、二项式定理	248
答案、提示或简解		278

第一章 集合与函数

知识逻辑结构框图



学习指导

1. 本章主要内容是在引入集合与映射的基础上,进一步阐明函数的概念,研究函数的单调性、奇偶性及其反函数,并具体讨论了幂函数、指数函数和对数函数的性质,以及简单的指数方程和对数方程的解法.

2. 本章内容多、份量重,学习时应紧紧抓住函数这个中心课题.函数知识是高中数学最重要的内容,又是学习高等数学的基础,因此在历年高考中,涉及本章的试题常占很大比重.

3. 一些重要的思想方法,如数形结合的思想、函数与方程的思想、等价转化的思想和分类讨论的策略,以及反证法、换元法、待定系数法等,在本章被突出、经常地使用着,必须重视领会和运用这些思想方法.以知识为纬,思想为经,经纬交织,才能真正学好本章.

4. 本章的一个突出特点是概念多,故应把握重点,结合典型实例和图象反复领会定义,善于抓住关键词句,细细体会,注意概念间的联系与差异,实现计算与概念的统一.

例1 设全集为 R ,

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x,$$

$$M = \{x | f(x) \neq 0\}, \quad N = \{x | g(x) \neq 0\},$$

那么集合 $\{x | f(x)g(x)=0\}$ 等于().

$$(A) \overline{M} \cap \overline{N} \quad (B) \overline{M} \cup \overline{N} \quad (C) M \cup \overline{N} \quad (D) \overline{M} \cup \overline{N}$$

(全国 1991)

考查要求 集合的交、并、补,文氏图,以及方程的解集.

思路分析 根据同解方程定理: 方程 $f(x)g(x)=0$ 与方程 $f(x)=0$ 或 $g(x)=0$ 同解,故将集合 $\{x | f(x)g(x)=0\}$ 表示为 $\{x | f(x)=0\} \cup \{x | g(x)=0\}$,再运用补集概念,即可获解.

解一 由题设, $\overline{M} = \{x | f(x)=0\}$, $\overline{N} = \{x | g(x)=0\}$, 故

$$\begin{aligned}\{x|f(x)g(x)=0\} &= \{x|f(x)=0\} \cup \{x|g(x)=0\} \\ &= \overline{M} \cup \overline{N},\end{aligned}$$

应选(D).

解二 由题设, $M \cap N = \{x|f(x) \neq 0 \text{ 且 } g(x) \neq 0\}$, 故

$$\begin{aligned}\overline{M \cap N} &= \{x|f(x)=0 \text{ 或 } g(x)=0\} \\ &= \{x|f(x)g(x)=0\}.\end{aligned}$$

根据德·摩根定律: $\overline{M \cap N} = \overline{M} \cup \overline{N}$, 得

$$\{x|f(x)g(x)=0\} = \overline{M} \cup \overline{N},$$

故应选(D).

点 评

1. 文氏图可以帮助我们直观地理解某些概念和关系, 也有利于记忆和思考问题. 画个框式文氏图, 可把本题表示得很直观. 如图1-1, 全集被分成 $M \cap N$, $M \cap \overline{N}$, $\overline{M} \cap N$ 和 $\overline{M} \cap \overline{N}$ 四个小块. 集合 $\{x|f(x)g(x)=0\}$ 应是阴影 $\overline{M} \cup \overline{N}$ 表示的三块, 正好是 $\overline{M} \cup \overline{N}$.

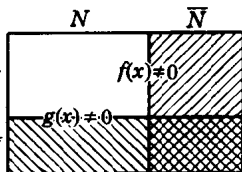


图 1-1

2. 如果通过简单三角方程的解集来理解, 就是

$$\overline{M} = \{x|\sin x=0\} = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\},$$

即角 x 的终边在纵轴上,

$$\overline{N} = \{x|\cos x=0\} = \{x|x=k\pi, k \in \mathbf{Z}\},$$

即角 x 的终边在横轴上. 而

$$\begin{aligned}\{x|f(x)g(x)=0\} &= \{x|\sin x \cos x = 0\} \\ &= \left\{x \mid x = \frac{\pi}{2} \cdot k, k \in \mathbf{Z}\right\},\end{aligned}$$

即角 x 的终边在纵轴或横轴上, 因此,

$$\{x|f(x)g(x)=0\} = \overline{M} \cup \overline{N}.$$

3. 如果把题中的 $f(x)$ 、 $g(x)$ 改为 $f(x)=x$, $g(x)=\frac{1}{x}$, 按原题其他条件就有:

$$\overline{M} = \{x | x=0\} = \{0\}, \overline{N} = \left\{x \left| \frac{1}{x}=0 \right.\right\} = \emptyset,$$

而 $\{x | f(x)g(x)=0\} = \left\{x \left| x \cdot \frac{1}{x}=0 \right.\right\} = \emptyset \neq \overline{M} \cup \overline{N}.$

可见, 原题指明 $f(x)=\sin x, g(x)=\cos x$, 并非多此一举.

练 习 一

1. 设集合 $X = \{0, 1, 2, 4, 5, 7\}, Y = \{1, 3, 6, 8, 9\}, Z = \{3, 7, 8\}$, 那么集合 $(X \cap Y) \cup Z$ 是().

- (A) $\{0, 1, 2, 6, 8\}$ (B) $\{3, 7, 8\}$
(C) $\{1, 3, 7, 8\}$ (D) $\{1, 3, 6, 7, 8\}$

(全国 1985)

2. 已知全集 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, A = \{3, 4, 5\}, B = \{1, 3, 6\}$, 那么集合 $\{2, 7, 8\}$ 是().

- (A) $A \cup B$ (B) $A \cap B$ (C) $\overline{A} \cup \overline{B}$ (D) $\overline{A} \cap \overline{B}$

(全国 1986)

3. 如果 $I = \{a, b, c, d, e\}, M = \{a, c, d\}, N = \{b, d, e\}$. 其中 I 是全集, 那么 $\overline{M} \cap \overline{N}$ 等于().

- (A) $\emptyset$ (B) $\{d\}$ (C) $\{a, c\}$ (D) $\{b, e\}$

(全国 1989)

4. 数集 $X = \{(2n+1)\pi, n \text{ 是整数}\}$ 与数集 $Y = \{(4k \pm 1)\pi, k \text{ 是整数}\}$ 之间的关系是().

- (A) $X \subset Y$ (B) $X \supset Y$ (C) $X = Y$ (D) $X \neq Y$

(全国 1984)

5. 集合 $M = \left\{x \left| x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z} \right.\right\},$

$N = \left\{x \left| x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right.\right\},$ 则().

- (A) $M = N$ (B) $M \supset N$

(C) $M \subset N$

(D) $M \cap N = \emptyset$

(六省市 1993)

例 2 设 I 为全集, 集合 $M, N \subset I$. 若 $M \cap N = N$, 则().

(A) $\overline{M} \supseteq \overline{N}$ (B) $M \subseteq \overline{N}$ (C) $\overline{M} \subseteq \overline{N}$ (D) $M \supseteq \overline{N}$

(全国 1995)

考查要求 全集、补集、交集、子集、包含的概念, 以及逻辑推理能力.

思路分析 从已知条件 $M \cap N = N$, 可知 $N \subseteq M$; 运用补集概念, 结合文氏图, 即可作出正确判断.

解 $\because M \cap N = N,$

$\therefore N \subseteq M,$

从而 $\overline{N} \supseteq \overline{M}$. 应选(C).

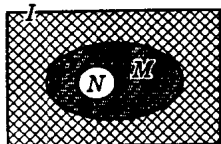


图 1-2

点评 结合文氏图 1-2, 立即可得 $\overline{M} \subseteq \overline{N}$. 重视符号语言和图象语言之间的相互转化, 是解决集合问题的基本思维训练.

练 习 二

1. 设 S, T 是两个非空集合, 且 $S \not\subseteq T, T \not\subseteq S$, 记 $X = S \cap T$, 那么 $S \cup X$ 是().

(A) S (B) T (C) $\emptyset$ (D) X

(全国 1987)

2. 集合 $\{1, 2, 3\}$ 的子集总共有().

(A) 5 个 (B) 6 个 (C) 7 个 (D) 8 个

(全国 1988)

3. 设 I 是全集, 集合 P, Q 满足 $P \subset Q$, 则下面的结论中错误的是().

(A) $P \cup Q = Q$

(B) $\overline{P} \cup Q = I$

$$(C) P \cap \bar{Q} = \emptyset$$

$$(D) \bar{P} \cap \bar{Q} = \bar{P}$$

(上海 1994)

例 3 关于 x 的不等式

$$\left| x - \frac{(a+1)^2}{2} \right| \leq \frac{(a-1)^2}{2}$$

与 $x^2 - 3(a+1)x + 2(3a+1) \leq 0 \quad (a \in \mathbf{R})$

的解集分别是 A 和 B , 求使 $A \subseteq B$ 的 a 的取值范围. (上海 1990)

考查要求 二次不等式的解法, 绝对值和子集的含义, 以及分析讨论和等价转换的能力.

思路分析 根据绝对值的意义, 第一个不等式等价于

$$\begin{aligned} -\frac{(a-1)^2}{2} &\leq x - \frac{(a+1)^2}{2} \leq \frac{(a-1)^2}{2} \\ \Leftrightarrow -\frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a+1)^2}{2} &\leq x \leq \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a+1)^2}{2} \\ \Leftrightarrow 2a &\leq x \leq a^2 + 1. \end{aligned}$$

第二个不等式即 $(x-2)[x-(3a+1)] \leq 0$, 为确定解集, 需对 2 与 $(3a+1)$ 的大小进行讨论. 为避免讨论, 可构造函数 $f(x) = x^2 - 3(a+1)x + 2(3a+1)$, 再通过图象求解.

解一 由题意,

$$A = \{x \mid 2a \leq x \leq a^2 + 1\},$$

$$B = \{x \mid (x-2)[x-(3a+1)] \leq 0\}.$$

当 $3a+1 \geq 2$ 即 $a \geq \frac{1}{3}$ 时, $B = \{x \mid 2 \leq x \leq 3a+1\}$;

当 $3a+1 < 2$ 即 $a < \frac{1}{3}$ 时, $B = \{x \mid 3a+1 \leq x \leq 2\}$.

由于 $A \subseteq B$, 所以

$$\begin{cases} 2 \leq 2a, \\ a^2 + 1 \leq 3a + 1; \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} 3a + 1 \leq 2a, \\ a^2 + 1 \leq 2. \end{cases}$$

解得

$$1 \leq a \leq 3 \quad \text{或} \quad a = -1.$$

故 a 的取值范围是 $\{a \mid a = -1 \text{ 或 } 1 \leq a \leq 3\}$.

解二 设 $f(x) = x^2 - 3(a+1)x + 2(3a+1)$.

$\because A \subseteq B$, 如图 1-3 所示, $f(x)$ 在 $[2a, a^2+1]$ 上的图象不能落在 x 轴的上方, 即需满足

$$\begin{cases} f(2a) \leq 0 & \dots \textcircled{1}, \\ f(a^2+1) \leq 0 & \dots \textcircled{2}. \end{cases}$$

不等式①即 $-2a^2 + 2 \leq 0, a^2 - 1 \geq 0$, 解得

$$a \geq 1 \text{ 或 } a \leq -1.$$

不等式②即

$$[(a^2 + 1) - 2][(a^2 + 1) - (3a + 1)] \leq 0,$$

$$(a^2 - 1)(a^2 - 3a) \leq 0,$$

亦即

$$(a + 1)a(a - 1)(a - 3) \leq 0.$$

因此, 要解含有①、②的不等式组, 只要解

$$\begin{cases} a \geq 1, \\ (a+1)a(a-1)(a-3) \leq 0; \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} a \leq -1, \\ (a+1)a(a-1)(a-3) \leq 0. \end{cases}$$

注意到当 $a \geq 1$ 时, $(a+1)a(a-1) \geq 0$; 当 $a \leq -1$ 时, $a(a-1)(a-3) < 0$, 只要解

$$\begin{cases} a \geq 1, \\ a - 3 \leq 0; \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} a \leq -1, \\ a + 1 \geq 0. \end{cases}$$

解得 $1 \leq a \leq 3, a = -1$. 故 a 的取值范围是

$$\{a \mid a = -1 \text{ 或 } 1 \leq a \leq 3\}.$$

点 评 解一与解二各有特色. 解一通过讨论, 各个击破; 解二通过数形结合, 避开讨论.

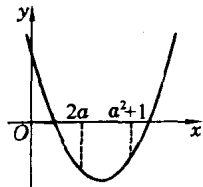


图 1-3

练 习 三

1. 不等式 $6^{x^2+x-2} < 1$ 的解集是_____。(全国 1991)

2. 不等式 $\lg(x^2 + 2x + 2) < 1$ 的解集是_____。(全国 1991)

3. 不等式 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-8} > 3^{-2x}$ 的解集是 _____. (全国 1995)

4. 设 $a \neq b$, 解关于 x 的不等式

$$a^2x + b^2(1-x) \geq [ax + b(1-x)]^2. \quad (\text{全国 1998})$$

例 4 已知 $\log_{18} 9 = a (a \neq 2)$, $18^b = 5$, 求 $\log_{36} 45$. (全国 1978)

考查要求 对数运算、换底公式和方程(组)思想, 以及分析问题的能力.

思路分析 由于已知对数和所求对数的底数不同, 为便于进行对数运算, 应先换底. 新的底数以选取相关的质数或现有的底数为宜.

解一 $\because 18 = 2 \times 3^2, 9 = 3^2, 36 = 2^2 \times 3^2, 45 = 5 \times 3^2$, 质数 3 出现得最多, 不妨以 3 为公共底数.

$$\text{由 } a = \log_{18} 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 18} = \frac{2}{2 + \log_3 2}, \text{ 可得 } 2a + a \log_3 2 = 2,$$

$$\therefore \log_3 2 = \frac{2-2a}{a}.$$

$$\text{由 } 18^b = 5, \text{ 有 } b = \log_{18} 5 = \frac{\log_3 5}{\log_3 18} = \frac{\log_3 5}{2 + \log_3 2}, \text{ 可得}$$

$$\log_3 5 = b(2 + \log_3 2) = b \left(2 + \frac{2-2a}{a} \right) = b \cdot \frac{2}{a} = \frac{2b}{a}.$$

$$\therefore \log_{36} 45 = \frac{\log_3 45}{\log_3 36} = \frac{2 + \log_3 5}{2 + 2\log_3 2} = \frac{2 + \frac{2b}{a}}{2 \left(1 + \frac{2-2a}{a} \right)} = \frac{1 + \frac{b}{a}}{\frac{2-a}{a}} = \frac{a+b}{2-a}.$$

解二 取 18 为公共底数.

已知 $\log_{18} 9 = a$, 由 $18^b = 5$, 可得 $\log_{18} 5 = b$, 于是

$$\begin{aligned} \log_{36} 45 &= \frac{\log_{18} 45}{\log_{18} 36} = \frac{\log_{18} 5 + \log_{18} 9}{1 + \log_{18} 2} \\ &= \frac{b + a}{1 + \log_{18} 2} \quad \cdots \textcircled{1}. \end{aligned}$$

从①式可知,关键是求出 $\log_{18} 2$. 由于

$$\log_{18} 2 = \log_{18} \frac{18}{9} = 1 - \log_{18} 9 = 1 - a,$$

以 $\log_{18} 2 = 1 - a$ 代入①, 即得

$$\log_{36} 45 = \frac{a+b}{1+(1-a)} = \frac{a+b}{2-a}.$$

点 评 取 2、9 或 10 为公共底数, 同样可求得 $\log_{36} 45$, 请读者一试. 这里的关键是找到 $\log_{18} 9$ 、 $\log_{18} 5$ 与 $\log_{36} 45$ 之间的联系, 从已知条件解出 $\log_{18} 2$ 即可获解. 这是方程思想的一种应用.

练 习 四

1. $\frac{\log_8 9}{\log_2 3}$ 的值是().

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) 2

(全国 1992)

2. 设 $\log_3 4 \cdot \log_4 8 \cdot \log_8 m = \log_4 16$, 那么 m 等于().

- (A) $\frac{9}{2}$ (B) 9 (C) 18 (D) 27

(全国 1987)

3. (1) 计算 $\lg^2 5 + \lg 2 \cdot \lg 50$.

(全国 1956)

(2) $\lg 20 + \log_{100} 25 =$ _____.

(上海 1998)

(3) 求 $\log_{10} \frac{300}{7} + \log_{10} \frac{700}{3} + \log_{10} 1$ 的值. (全国 1953)

4. 证明对数换底公式: $\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$ (a, b, N 皆正数, $a \neq 1$, $b \neq 1$). (全国 1980)

5. 设 a, b, c 都是正数, 且 $3^a = 4^b = 6^c$, 那么().

- (A) $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (B) $\frac{2}{c} = \frac{2}{a} + \frac{1}{b}$

$$(C) \frac{1}{c} = \frac{2}{a} + \frac{2}{b}$$

$$(D) \frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{2}{b}$$

(全国 1993)

例 5 已知函数 $f(x) = \lg(x^2 - 3x + 2)$ 的定义域为 F , 函数 $g(x) = \lg(x-1) + \lg(x-2)$ 的定义域为 G , 那么().

- (A) $F \cap G = \emptyset$ (B) $F = G$ (C) $F \subset G$ (D) $G \subset F$

(上海 1985)

考查要求 对数函数的定义域.

思路分析 注意到对数函数的恒等变换

$$\lg f(x)g(x) = \lg f(x) + \lg g(x)$$

中, 左式的定义域为 $f(x)g(x) > 0$ 的解集, 而右式的定义域为 $f(x) > 0$ 与 $g(x) > 0$ 解集的交集, 据此不难获解.

解 由 $x^2 - 3x + 2 > 0$, 解得 $x < 1$ 或 $x > 2$,

$$\therefore F = \{x | x < 1 \text{ 或 } x > 2\}.$$

由 $\begin{cases} x-1 > 0, \\ x-2 > 0, \end{cases}$ 解得 $x > 2$, $\therefore G = \{x | x > 2\}$.

可见 $G \subset F$, 应选(D).

点 评 如果将 $f(x)$ 作如下变形:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lg(x^2 - 3x + 2) = \lg(x-1)(x-2) \\ &= \lg(x-1) + \lg(x-2), \end{aligned}$$

误认为 $f(x) = g(x)$. 忽视 x 的允许范围变化, 可能误选(B). 对数函数的恒等变换中应注意变量允许值的变化, 否则容易产生失误.

练 习 五

1. 求函数 $y = \log_2(1 + 2x - 3x^2)$ 的定义域. (全国 1987)
2. 求函数 $y = \sqrt{x+5} \log_2(36 - x^2)$ 的定义域. (全国 1983)
3. 求函数 $y = \sqrt{\lg(2+x)}$ 的定义域. (全国 1978)