目　录

第一部分　板体计算

第二部分　壳体计算

第一部分　板体计算

第一章　薄板计算

Ⅰ.　简化假设

薄板计算采用以下假设：

(1) 垂直于中平面的直线元素$\overline{mn}$变形后仍保持为直线，垂直于中曲面，且长度不变（直法线假设）（图 1.1.1），即

$$e_{zx} = e_{zy} = e_z = 0 \tag{1.1.1}$$

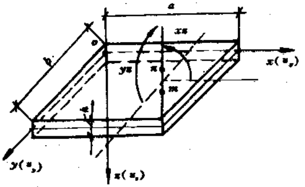

图　1.1.1

(2) 平行于 oz 轴的正应力与其它应力相比忽略不计，因此 $Z_z = 0$，而 $Z_x = X_z$ 与 $Z_y = Y_z$ 由平衡条件(1.1.10)决定。

(3) 板的中平面认为是不可拉伸的。

Ⅱ.　基本计算方程

1.　直角坐标

根据第一假设，得以下关系式：

$$\left.\begin{aligned} e_{xz} &= \partial u_x/\partial z + \partial u_z/\partial x,\ \partial u_x/\partial z = -\,\partial u_z/\partial x;\\ e_{yz} &= \partial u_y/\partial z + \partial u_z/\partial y,\ \partial u_y/\partial z = -\,\partial u_z/\partial y;\end{aligned}\right\} \tag{1.1.2}$$

$$e_z = \partial u_z/\partial z,\ u_z = u_z(x,y) \tag{1.1.3}$$

将第三假设考虑进去，对式(1.1.2)进行积分，则得

$$u_x = -z\partial u_z/\partial x,\ u_y = -z\partial u_z/\partial y \tag{1.1.4}$$

在平行于 xoy 面的各平面内，应变为

$$\left.\begin{aligned} e_x &= \partial u_x/\partial x = -z\partial^2 u_z/\partial x^2 \\ e_y &= \partial u_y/\partial y = -z\partial^2 u_z/\partial y^2 \\ e_{xy} &= \partial u_y/\partial x + \partial u_x/\partial y = -2z\partial^2 u_z/\partial x\partial y \end{aligned}\right\} \tag{1.1.5}$$

根据第二假设，对于平面应力状态，虎克定律方程为

$$\left.\begin{aligned} e_x &= \frac{1}{E}(X_x - \nu Y_y) \\ e_y &= \frac{1}{E}(Y_y - \nu X_x) \\ e_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}X_y \end{aligned}\right\} \tag{1.1.6}$$

由此可确定应力：

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(e_x + \nu e_y) = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right) \\ Y_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(e_y + \nu e_x) = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\right) \\ X_y &= \frac{E}{2(1+\nu)}e_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu}\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{1.1.7}$$

板面单位长度上的应力合力(图 1.1.2)为

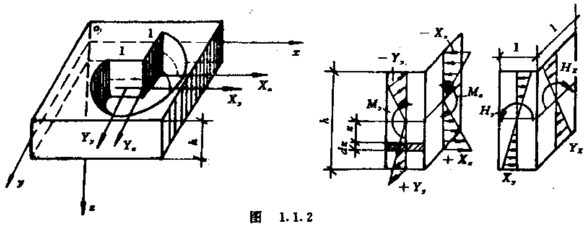

图 1.1.2

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} X_x z dz = -D\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right) \\ M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} Y_y z dz = -D\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\right) \\ H_x &= H_y = H = \int_{-h/2}^{h/2} X_Y z dz = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{1.1.8}$$

式中 $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ 为平板的抗弯刚度。

板元的平衡方程(图 1.1.3)为

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma M_y = 0 \qquad \partial M_x/\partial x + \partial H_y/\partial y - Q_x = 0\\
&\Sigma M_x = 0 \qquad \partial M_y/\partial y + \partial H_x/\partial x - Q_y = 0\\
&\Sigma Z = 0 \qquad \partial Q_x/\partial x + \partial Q_y/\partial y + q = 0
\end{aligned}\right\} \tag{1.1.9}$$

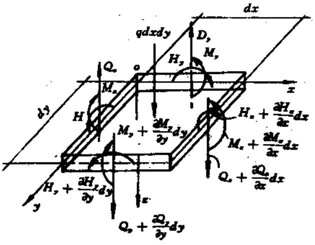

图 1.1.3

由式(1.1.9)的前两式得

$$\left.\begin{aligned}
Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} Z_x dz = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right)\\
Q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} Z_y dz = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} = -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{1.1.10}$$

将式(1.1.10)代入式(1.1.9)的第三式,得

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0 \tag{1.1.11}$$

或

$$\nabla^4 u_z = \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \tag{1.1.12}$$

若板为正交板,则方程(1.1.12)变为

$$D_1\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + 2D_3\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2\frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} = q \tag{1.1.12'}$$

式中

$$\begin{aligned}
D_1 &= E_1 h^3/[12(1-\nu_1\nu_2)]\\
D_2 &= E_2 h^3/[12(1-\nu_1\nu_2)]\\
D_3 &= D_1\nu_2 + 2D_{xy} = D_2\nu_1 + 2D_{xy}\\
D_{xy} &= Gh^3/12
\end{aligned}$$

如果板厚 $h = h(x,y)$,则式(1.1.12)变为

$$\begin{aligned}
D\nabla^4 u_z &+ 2\left[\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 u_z + \frac{\partial D}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 u_z\right] + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right]\\
&+ \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\right] + 2(1-\nu)\frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} = q
\end{aligned} \tag{1.1.12''}$$

(参阅文献[14])。

从式(1.1.12)求得的函数 $u_z = u_z(x,y)$ 应满足以下的边界条件:

(1) 对于固支边，当 $x = x_0$ 时

$$u_z = 0,\ \partial u_z/\partial x = 0$$

(2) 对于简支边，当 $x = x_0$ 时

$$u_z = 0, M_x = -D(\partial^2 u_z/\partial x^2 + \nu\partial^2 u_z/\partial y^2) = -D\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = 0$$

(3) 对于自由边，当 $x = x_0$ 时

$$\left.\begin{aligned}\overline{Q}_x &= Q_x + \frac{\partial H}{\partial y} = -D\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right] = 0\\ M_x &= -D\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right) = 0\end{aligned}\right\} \tag{1.1.13}$$

式中 $\overline{Q}_x$ 为折算剪力。折算剪力沿板边分布，在角点处化为集中力。

$$R = -2D(1-\nu)\left.\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$$

(其中 x_0 和 y_0 为角点坐标)。

2. 极坐标

直角坐标与极坐标间的关系式为

$$x = r\cos\beta,\ y = r\sin\beta,\ x^2 + y^2 = r^2,\ \beta = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$$

(图 1.1.4)，并将其代入板的弯曲方程(1.1.12)，则有

$$\nabla^4 u_z = \left(\frac{\partial^2\cdots}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\cdots}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\cdots}{\partial\beta^2}\right)^2 u_z = \frac{q(r,\beta)}{D} \tag{1.1.14}$$

应力合力按以下各式计算：

$$\left.\begin{aligned}M_r &= -D\left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\beta^2}\right)\right]\\ M_\beta &= -D\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\beta^2} + \nu\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}\right]\\ M_{r\beta} &= M_{\beta r} = H = -D(1-\nu)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial\beta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial u_z}{\partial\beta}\right)\\ Q_r &= -D\frac{\partial}{\partial r}(\nabla^2 u_z)\\ Q_\beta &= -\frac{D}{r}\frac{\partial}{\partial\beta}(\nabla^2 u_z)\end{aligned}\right\} \tag{1.1.15}$$

式中

$$\nabla^2\cdots = \frac{\partial^2\cdots}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\cdots}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\cdots}{\partial\beta^2} \tag{1.1.16}$$

方程(1.1.14) 的解可取为以下的形式：

$$u_z = R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_m\cos m\beta + \sum_{m=1}^{\infty}\overline{R}_m\sin m\beta + u_z(q) \tag{1.1.17}$$

式中 R_i 只是 r 的函数，$u_z(q)$ 为特解。

将通解(1.1.17) 代入齐次方程(1.1.14)，则得

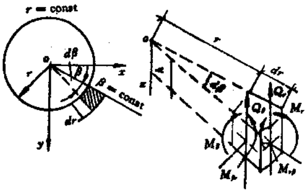

图 1.1.4

$$
\left.\begin{aligned}
R_0 &= A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r \\
R_1 &= A_1 + B_1 r^{-1} + C_1 r^3 + D_1 r \ln r \\
R_m &= A_m r^m + B_m r^{-m} + C_m r^{m+2} + D_m r^{-m+2}
\end{aligned}\right\} \tag{1.1.18}
$$

对于 $\bar{R}_m$ 可得到类似的表达式。

对于极对称问题，解与角 β 无关，取为如下形式：

$$
u_z = R_0 = A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r + u_z(q) \tag{1.1.19}
$$

应力合力按下式计算：

$$
\left.\begin{aligned}
M_r &= -D\left(\frac{d^2 u_z}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{du_z}{dr}\right) \\
M_\beta &= -D\left(\frac{1}{r}\frac{du_z}{dr} + \nu\frac{d^2 u_z}{dr^2}\right) \\
Q_r &= -D\frac{d}{dr}(\nabla^2 u_z) \\
&= -D\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2 u_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du_z}{dr}\right) \\
&= \frac{d}{dr}\frac{M_r + M_\beta}{1+\nu}
\end{aligned}\right\} \tag{1.1.20}
$$

由式(1.1.14)得

$$
\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_z}{dr}\right)\right]\right\} = \frac{q(r)}{D} \tag{1.1.21}
$$

由此得特解

$$
u_z(q) = \frac{1}{D}\int_0^r \frac{dr}{r}\int_0^r r\,dr\int\frac{dr}{r}\int q(r) r\,dr \tag{1.1.22}
$$

例如，当 $q(r) = \text{const}$ 时，$u_z(q) = qr^4/(64D)$

按以下公式计算应力：

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{d^2 u_z}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{du_z}{dr}\right) \\
\sigma_\beta &= -\frac{Ez}{1-\gamma^2}\left(\frac{1}{r}\frac{du_z}{dr} + \gamma\frac{d^2 u_z}{dr^2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{1.1.23}
$$

Ⅱ. 温克列尔弹性基础板的计算

当采用温克列尔弹性基础时，弹性基础的抗力与考察点处板的挠度成正比：

$$p = -ku_z \tag{1.1.24}$$

其中 k 为弹性基础特性，即弹性基础的柔度系数。

1. 直角坐标解答

根据方程(1.1.12)，弹性基础板的弯曲方程取为

$$\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} = \frac{q - ku_z}{D}$$

或

$$\left(\frac{\partial^2 \cdots}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \cdots}{\partial y^2}\right)^2 u_z + \frac{k}{D}u_z = \frac{q}{D} \tag{1.1.25}$$

如果板的两个对边($y=0, y=b$)(图1.1.1)为简支，则可将通解(1.1.25)取为如下形式：

$$u_z = \sum_{n=0}^{\infty} u_{zn}(x)\sin n_1 y \tag{1.1.26}$$

式中　$n_1 = n\pi/b$

将式(1.1.26)代入式(1.1.25)的齐次方程，得

$$\left(\frac{d^2\cdots}{dx^2} - n_1^2\cdots\right)^2 u_{zn} + \frac{k}{D}u_{zn} = 0$$

其展开式为

$$\frac{d^4 u_{zn}}{dx^4} - 2n_1^2\frac{d^2 u_{zn}}{dx^2} + (n_1^4 + \frac{k}{D})u_{zn} = 0 \tag{1.1.27}$$

令

$$u_{zn} = Ce^{\alpha x} \tag{1.1.28}$$

并代入式(1.1.27)，得

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{1,2} &= \pm\sqrt{n_1^2 + \lambda^2 i} = \pm\beta_n + i\gamma_n \\ \alpha_{3,4} &= \pm\sqrt{n_1^2 - \lambda^2 i} = \pm\beta_n - i\gamma_n \end{aligned}\right\} \tag{1.1.29}$$

式中 $\lambda^4 = k/D$; $2\beta_n^2 = \sqrt{n_1^4 + \lambda^4} + n_1^2$,　$2\gamma_n^2 = \sqrt{n_1^4 + \lambda^4} - n_1^2$.

方程(1.1.27)的通解(1.1.28)取为以下形式：

$$u_{zn}(x) = A_n \mathrm{ch}\beta_n x\cos\gamma_n x + B_n \mathrm{sh}\beta_n x\cos\gamma_n x + C_n \mathrm{ch}\beta_n x\sin\gamma_n x + D_n \mathrm{sh}\beta_n x\sin\gamma_n x \tag{1.1.30}$$

其中 A_n, B_n, C_n, D_n 由板的边界条件决定。

2. 极坐标解答

根据式(1.1.14)，弹性基础板的弯曲方程具有以下形式：

$$\left(\frac{\partial^2\cdots}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\cdots}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\cdots}{\partial\beta^2}\right)^2 u_z + \frac{k}{D}u_z = \frac{q(r,\beta)}{D}. \tag{1.1.31}$$

令

$$r = r_0 \alpha \tag{1.1.32}$$

其中 $r_0 = \sqrt[4]{D/k}$，将式(1.1.31) 化为

$$\left(\frac{\partial^2 \cdots}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \cdots}{\partial \alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 \cdots}{\partial \beta^2}\right)^2 u_z + u_z = \frac{q r_0^4}{D} = \frac{q}{k}.$$

将未知数及载荷展成级数：

$$\left.\begin{aligned} u_z(\alpha,\beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_{zn}(\alpha)\cos n\beta, \\ q_z(\alpha,\beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} q_n(\alpha)\cos n\beta \end{aligned}\right\} \tag{1.1.33}$$

(式中 $q_n(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} q(\alpha,\beta)\cos n\beta d\beta$ 为未知系数)，则得关于 u_{zn} 的常微分方程

$$\left(\frac{d^2 \cdots}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{d \cdots}{d\alpha} - \frac{n^2 \cdots}{\alpha^2}\right)^2 u_{zn} + u_{zn} = \frac{q_n(\alpha)}{k}. \tag{1.1.34}$$

为求得通解，我们令 $q_n = 0$，于是式(1.1.34) 分化成如下两个方程：

$$\frac{d^2 u_{zn}}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{du_{zn}}{d\alpha} \pm \left(i \mp \frac{n^2}{\alpha^2}\right) u_{zn} = 0 \tag{1.1.35}$$

方程(1.1.35) 的解用第一类贝塞耳函数 $J_n(\ )$ 及第二类贝塞耳函数 $N_n(\ )$ 来表示：

$$\begin{aligned} u_{zn}(\alpha) = {} & A_{1n}J_n(\sqrt{i}\,\alpha) + A_{2n}N_n(\sqrt{i}\,\alpha) + A_{3n}J_n(\sqrt{-i}\alpha) \\ & + A_{4n}N_n(\sqrt{-i\alpha}) \end{aligned} \tag{1.1.36}$$

对于极对称问题，式(1.1.34) 变为

$$\left(\frac{d^2 \cdots}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{d \cdots}{d\alpha}\right)^2 u_z + u_z = \frac{q(\alpha) r_0^4}{D} \tag{1.1.37}$$

当 $q(\alpha) = 0$ 时，进行类似上面的变换，得

$$u_z(\alpha) = A_1 J_0(\sqrt{i}\,\alpha) + A_2 N_0(\sqrt{i}\,\alpha) + A_3 J_0(\sqrt{-i}\alpha) + A_R N_0(\sqrt{-i}\alpha) \tag{1.1.38}$$

特解从式(1.1.37) 求得。

按公式(1.1.20) 并考虑式(1.1.32) 来求应力合力：

$$\left.\begin{aligned} M_r &= -\frac{D}{r_0^2}\left(\frac{d^2 u_z}{d\alpha^2} + \frac{\nu}{\alpha}\frac{du_z}{d\alpha}\right) \\ M_\beta &= -\frac{D}{r_0^2}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{du_z}{d\alpha} + \nu\frac{d^2 u_z}{d\alpha^2}\right) \\ Q_r &= -\frac{D}{r_0^3}\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{d^2 u_z}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{du_z}{d\alpha}\right) \end{aligned}\right\} \tag{1.1.39}$$

Ⅳ. 薄板的稳定性

在进行稳定性计算时，不只是横向载荷，而且中面内的作用力，对板的弯曲都会产生显著的影响，因此在推导微分方程式时要把两者都考虑进去。在纵向力作用下除了产生力矩及横向剪力(图 1.1.3) 外，在中面内还要产生平行与中面的内力(图 1.1.5)。这些作用在单位长度上的力用以下符号表示：$N_x, N_y, S_{xy} = S_{yx} = S$。

将以上各力分别向 x 轴及 y 轴上投影，则得以下两个方程：

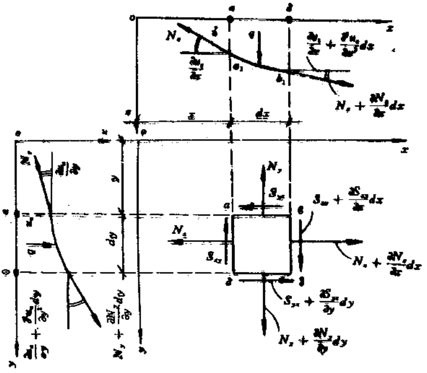

图 1.1.5

$$\left.\begin{aligned} \Sigma X = 0 \qquad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \\ \Sigma Y = 0 \qquad & \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial N_x}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.1.40}$$

考虑应变状态,N_x 向 z 轴上投影,得

$$-N_x dy\frac{\partial u_z}{\partial x} + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x}dx\right)\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}dx\right)dy = N_x\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}dxdy + \frac{\partial N_x}{\partial x}\frac{\partial u_z}{\partial x}dxdy \tag{1.1.41}$$

N_y 向 z 轴上投影,得

$$N_y\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}dxdy + \frac{\partial N_y}{\partial y}\frac{\partial u_z}{\partial y}dxdy \tag{1.1.42}$$

顺剪力 S 向 z 轴上投影,得

$$2S\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial y}dxdy + \left(\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial y}\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)dxdy \tag{1.1.43}$$

将投影方程(1.1.41)—(1.1.43)与载荷投影 $qdxdy$ 及横向剪力(1.1.10)相加,则得

$$\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} = \frac{1}{D}\left(q + N_x\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + N_y\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + 2S\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial y}\right) \tag{1.1.44}$$

按式(1.1.44)可以考察薄板的第二类稳定性。

对于薄膜(即 $D \to 0$),则式(1.1.44)变为

$$N_0\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right) = -q \tag{1.1.45}$$

当 $q = 0$ 时,由式(1.1.44)得

$$\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} = \frac{1}{D}\left(N_x\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + N_y\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + 2S\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial y}\right) \tag{1.1.46}$$

当挠度u_z与板厚h可以相比时，板失稳后的状态可借两个非线性的卡门方程进行研究，参看文献[16]：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{D}{h}\left[\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4}\right]=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial y}\\&\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=E\left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right]\end{aligned}\right\}\tag{1.1.47}$$

式中φ为应力函数。式(1.1.47)之第二式是变形连续性方程。

板中应力按下式计算：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right)\\\sigma_y&=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\right)\\\tau_{xy}&=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}-\frac{Ez}{1+\varphi}\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right\}\tag{1.1.48}$$

当取$z=0$时便得到板的中面应力。

借助式(1.1.47)可以考察板在横载q作用下的大挠度问题，为此需在其第一式的右项添上q/h这一补充项(见式(1.1.44))。

V. 薄板的振动

我们只限于在克希霍夫理论的范围内讨论板的横向振动问题。

如果把垂直惯性力考虑在内，则板的运动方程变为式(1.1.12)的形式：

$$\nabla^4 u_z+\frac{\gamma h}{gD}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\tau^2}=0\tag{1.1.49}$$

挠度u_z应满足边界条件(1.1.13)及以下的初始条件：

$$\text{当}\ \tau=0\ \text{时}\qquad u_z=u_0(x,y),\ \frac{\partial u_z}{\partial\tau}=v_0(xy)\tag{1.1.50}$$

其中u_0为考察点(x,y)的初始挠度；v_0为考察点的初始速度。

当考察横向自由振动时，解答以乘积形式给出：

$$u_z=(A\cos\omega\tau+B\sin\omega\tau)U(x,y)\tag{1.1.51}$$

其中$\omega=2\pi/T$为自由振动频率。

将式(1.1.51)代入式(1.1.49)，得关于U的方程

$$\nabla^4 U-\frac{\gamma h}{gD}\omega^2 U=0\tag{1.1.52}$$

该方程的解以重三角级数的形式给出：

$$U=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}U_{mn}$$

其中$m=1,2,3,\cdots;n=1,2,3,\cdots$

方程(1.1.52)的解应满足边界条件(1.1.13)。该边界条件给出一个关于未知任意常数A_{mn}的齐次方程组，其行列式应等于零，该行列式是一个频率方程

$$\Delta(\omega)=0\tag{1.1.53}$$

方程(1.1.53)的根组成考察板的频谱。最小频率称为基音频率，其余频率称为高阶频率即泛音频率。U_{mn} 是固有函数，它决定挠曲面的一个形状(即简谐波 mn)，每一个 U_{mn} 对应一个频率 ω_{mn}。

将给定的初始挠度 u_0 和初始速度，按固有函数 $U_{mn}(x,y)$ 展成级数：

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn} U_{mn} \\ v_0 &= \sum_{M=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \beta_{mn} U_{mn} \end{aligned}\right\} \tag{1.1.54}$$

按以下公式确定其中的系数 α_{mn} 和 β_{mn}：

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{mn} &= \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b u_0 U_{mn}(x,y)dxdy \\ \beta_{mn} &= \frac{4}{ab\omega_{mn}}\int_0^a\int_0^b v_0 U(x,y)dxdy \end{aligned}\right\} \tag{1.1.54'}$$

方程(1.1.49)的通解按式(1.1.51)取为如下形式：

$$u_z(x,y,z) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_{mn}\cos\omega_{mn}\tau + \beta_{mn}\sin\omega_{mn}\tau)U_{mn}(x,y) \tag{1.1.55}$$

(参阅文献[7])。

将无穷多个简谐波迭加便得到总挠度。简谐波是按照频率为 ω_{mn} 的简谐振动规律随时间而变化的。

对于薄膜(1.45)运动方程为

$$\nabla^2 u_z - \frac{\gamma h}{gN_0}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \tau^2} = 0 \tag{1.1.56}$$

所得之方程也可以用富里哀法求解(参考文献[13])。

对于方程(1.1.49)求解，欲得到式(1.1.55)形式的解答是一件很困难的事，只是对于两对边简支，其余两边为任意支持的矩形板(见习题1.1.10)以及周边固支的矩形板(参考文献[3])问题才能得完全的解答。

因为对于工程应用问题来说最有实际意义的是基音频率，所以通常采用近似算法，例如采用来列依法来确定频率。

对于这种情况，可以假设板作为一个单自由度系统以基音频率 ω 做自由振动，用广义坐标 $q(\tau)$ 来确定板的状态，用方程

$$u_z = q(a)U(x,y) \tag{1.1.57}$$

确定挠度。式中 $U(x,y)$ 是一个近似地表示挠曲面形状且满足边界条件的函数。

对于板

$$\left.\begin{aligned} K &= \frac{\gamma h}{2g}(q')^2\iint U^2 dxdy \\ \Pi &\doteq \frac{Dq^2}{2}\iint\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)^2\right]dxdy \\ &= \frac{Dq^2}{2}\iint \Pi_1(U)dxdy \end{aligned}\right\} \tag{1.1.58}$$

将式(1.1.58)代入后，第二类拉格朗日方程变为

$$d^2q/d\tau^2 + \omega^2 q = 0 \tag{1.1.59}$$

式中

$$\omega^2 = \frac{2Dg}{\gamma h}\frac{\iint \Pi_1(U)dxdy}{\iint U^2 dxdy}. \tag{1.1.60}$$

而挠度

$$u_z = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)U(x,y) \tag{1.1.61}$$

频率的计算精度取决U的表达式的选择。通常选择与板考察点的挠度成正比的U式。选择“一定挠度”的U,可以提高板的刚度,因为这等于对板增加了附加约束,从而导致频率值的提高。

习　题

1.1.1　试求承受分布载荷$q = q(x,y)$作用的简支矩形板$(a \times b)$的挠度。

将挠度u_z表为重三角级数的形式:

$$u_z(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{a}$$

该级数满足以下边界条件:

当$x = 0$及$x = a$时

$$u_z = 0,\ M_x = -D\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right) = 0$$

当$y = 0$及$y = b$时

$$u_z = 0,\ M_y = -D\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}\right) = 0$$

但由于沿$x = \text{const}$及$y = \text{const}$边$u_z = 0$,故对x及对y的导数皆等于零,边界条件可表为更简化的形式:

当$x = 0$及$x = a$时$u_z = 0$, $\partial^2 u_z/\partial x^2 = 0$,

当$y = 0$及$y = b$时$u_z = 0$, $\partial^2 u_z/\partial y^2 = 0$.

对式(a)求导,尔后代入式(1.1.12),得

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} = q(x,y) \tag{b}$$

其中$c_{mn} = D\pi^4(m^2/a^2 + n^2/b^2)^2 a_{mn}$.

式(b)两边乘以$\sin\frac{k\pi y}{b}dy$,从0至b进行积分,且考虑到

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^b \sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{k\pi y}{b}dy = 0,\ n \neq k\\ &\int_0^b \sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{k\pi y}{b}dy = b/2,\ n = k\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

则得

$$\frac{b}{2}\sum_{m=1}^{\infty} c_{mk}\sin\frac{m\pi x}{a} = \int_0^b q(x,y)\sin\frac{k\pi y}{b}dy \tag{d}$$

式(d)两边乘以$\sin\frac{i\pi x}{a}dx$,从0至a积分,且考虑式(c),则得

$$\frac{b}{2}\,\frac{a}{2}c_{ik} = \int_0^a\int_0^b q(x,y)\sin\frac{k\pi y}{b}\sin\frac{i\pi x}{a}dxdy. \tag{e}$$

用 m,n 代替 i,k，从式(e)得

$$a_{mn}=\frac{a}{D\pi^4\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2 ab}\int_0^a\int_0^b q(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy \tag{f}$$

当 $q=\text{const}$ 时

$$a_{mn}=\frac{16q}{D\pi^6 mn\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2},$$

$$m=1,3,5,\cdots$$

$$n=1,3,5,\cdots$$

板的挠度

$$u_z=\frac{16q}{D\pi^6}\sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}}{mn(m^2/a^2+n^2/b^2)^2}$$

当 $x=a/2,\ y=b/2$ 时，得

$$\max u_z=\frac{16q}{D\pi^6}\sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn(m^2/a^2+n^2/b^2)^2} \tag{g}$$

令 $b/a=\mu$，式(g)可记为

$$\max u_z=\alpha q a^4/(E_1h^3),$$

其中

$$E_1=\frac{E}{1-\nu^2},\ \alpha=\frac{12\cdot 16}{\pi^6}\sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn(m^2+n^2/\mu^2)^2}$$

求出挠度以后，便可按式(1.1.8)计算力矩及建立计算表。

1.1.2　矩形板($a\times b$)，四边简支，在点 $x=c,y=d$ 处作用有集中力 P。试求其挠度。

令 $P=qdxdy$，故分布载荷

$$q=P/(dxdy), \tag{a}$$

在上题的式(e)中，只是对于本题的 $x=c,y=d$ 这一点 $q\neq 0$，在这一点 $q=P/(dxdy)$，故系数

$$a_{mn}=\frac{4P}{D\pi^4\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2 ab}\sin\frac{m\pi c}{a}\sin\frac{n\pi d}{b},$$

而挠度

$$u_z=\frac{4P}{D\pi^4 ab}\sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi c}{a}\sin\frac{n\pi d}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\times\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

1.1.3　矩形板($a\times b$)，其 $y=0$ 及 $y=b$ 两边简支，其余两边为任意支持，承受任意分布载荷 $q(x,y)$ 作用，试求其挠度(图 1.1.6)。

当坐标 x 为某一固定值时，在 $0\leqslant y\leqslant b$ 区间内，挠度函数 $u_z^1(x,y)$ 可表为如下级数：

$$u_z(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\sin n\pi y/b, \tag{a}$$

式中 $X_n(x)$ 只是坐标 x 的函数。

将载荷 $q(x,y)$ 也展成级数：

$$q(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}q_n(x)\sin n\pi y/b \tag{b}$$

式中 $q_n(x)=\frac{2}{b}\int_0^b q(x,y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$。

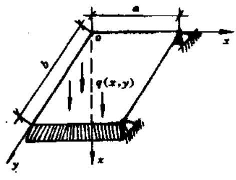

图 1.1.6

将式(a)及式(b)代入式(1.1.12)，且用 $\sin\frac{n\pi y}{b}$ 除，则对于展开式的每一项都得到一个四阶微分方程：

$$\frac{d^4X_n}{dx^4}-\frac{2n^2\pi^2}{b}\frac{d^2X_n}{dx^2}+\frac{n^4\pi^4}{b^4}X_n=\frac{q_n(x)}{D} \tag{c}$$

设 $X_n=\overline{X}_n+X_n^*$，这里 $\overline{X}$ 为通解，X_n^* 为方程(c)的特解。将 $\overline{X}_n$ 以 $\overline{X}_n=c_ne^{\lambda x}$ 的形式给出，我们按照常规办法求 $\overline{X}_n$。在这种情况下，我们得到一个求 λ 的特征方程

$$\lambda^4-\frac{2n^2\pi^2}{b^2}\lambda^2+\frac{n^4\pi^4}{b^4}=0$$

由此得 $\lambda_{1,2}=n\pi/b$，　$\lambda_{3,4}=-n\pi/b$。以指数函数表达的通解为

$$\overline{X}_n=(c_{n1}+c_{n2}x)e^{\frac{n\pi}{b}x}+(c_{n3}+c_{n4}x)e^{-\frac{n\pi}{b}x},$$

其中的任意常数 c_{ni} 由平行于 y 轴的两板边界条件确定。

最后得挠度表达式

$$u_z(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(c_{n1}+c_{n2}x)e^{\frac{n\pi}{b}x}+(c_{n3}+c_{n4}x)e^{-\frac{n\pi}{b}x}+X_n^*\right]\sin\frac{n\pi}{b}y.$$

当 $q(x,y)=q=\text{const}$ 时

$$q_n(x)=4q/(n\pi),X_n^*=4b^4q/(n^5\pi^5D)$$

其中 $n=1,3,5,\cdots$

如果矩形板没有两个对应的简支边，则挠不能表为级数(a)的形式，这时，求其精确解很繁琐的；通常采用近似方法求解，例如变分，有限差分法等。

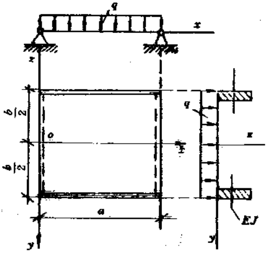

图 1.1.7

1.1.4　矩形板，$x=0$ 及 $x=a$ 两边简支，余两边 $y=\pm b/2$ 为弹性梁支持，梁在垂直面内的抗弯刚度为 EJ。板承受集度为 q 的均载荷作用(图 1.1.7)。试求其挠度。

假设梁不能抗扭，且考虑到对称于 x 轴，故能写出 $y=\pm b/2$ 两个边的边界条件：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2u_z}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2u_z}{\partial x^2}=0,\\&D\left[\frac{\partial^3u_z}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3u_z}{\partial x^2\partial y}\right]=EJ\frac{\partial^4u_z}{\partial x^4}\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

假设总挠度 $u_z=w_1+w_2$，其中 w_1 为长度为 a 的均匀承载的简支面的挠度，且用级数表示为

$$w_1 = \frac{4qa^4}{\pi^5 D}\sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{m^5}\sin\frac{m\pi x}{a}$$

而 w_2 用级数表示为

$$w_2 = \sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty} Y_m \sin\frac{m\pi x}{a}$$

其中

$$Y_m = \frac{qa^4}{D}\left(A_m \mathrm{ch}\frac{m\pi y}{a} + B_m\frac{m\pi y}{a}\mathrm{sh}\frac{m\pi y}{a}\right)$$

任意常数 A_m 和 B_m 由边界条件确定。如令 $\alpha_m = m\pi b/(2a)$，$\lambda = EJ/(aD)$，则边界是条件 (a) 变为如下形式：

$$A_m(1-\nu)\mathrm{ch}\alpha_m + B_m[2\mathrm{ch}\alpha_m + (1-\nu)\alpha_m\mathrm{sh}\alpha_m] = \frac{4\nu}{m^5\pi^5}$$

$$-A_m[(1-\nu)\mathrm{sh}\alpha_m + m\pi\lambda\mathrm{ch}\alpha_m] + B_m[(1+\nu)\mathrm{sh}\alpha_m - (1-\nu)\alpha_m\mathrm{ch}\alpha_m - m\pi\lambda\alpha_m\mathrm{sh}\alpha_m] = 4\lambda/(m^4\pi^4)$$

解之，得

$$A_m = \frac{4}{m^5\pi^5}\,\frac{\nu(1+\nu)\mathrm{ch}\alpha_m - \nu(1-\nu)\alpha_m\mathrm{ch}\alpha_m - m\pi\lambda(2\mathrm{ch}\alpha_m + \alpha_m\mathrm{ch}\alpha_m)}{(3+\nu)(1-\nu)\mathrm{ch}\alpha_m\mathrm{ch}\alpha_m - (1-\nu)2\alpha_m + 2m\pi\lambda\mathrm{ch}^2\alpha_m}$$

$$B_m = \frac{4}{m^5\pi^5}\,\frac{\nu(1-\nu)\mathrm{sh}\alpha_m + m\pi\lambda\mathrm{ch}\alpha_m}{(3+\nu)(1-\nu)\mathrm{sh}\alpha_m\mathrm{sh}\alpha_m - (1-\nu)^2\alpha_m + 2m\pi\lambda\mathrm{ch}^2\alpha_m}$$

板的挠曲面表达式为

$$u_z = w_1 + w_2 = \frac{qa^4}{D}\sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi^5 m^5} + A_m\mathrm{ch}\frac{m\pi y}{a} + B_m\frac{m\pi y}{a}\mathrm{sh}\frac{m\pi y}{a}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}$$

1.1.5　试考察半径为 a 的圆板，板周边固支，承受集度为 q 的均布载荷作用。

由于该问题的极对称性，我们将方程(1.1.14) 的解取为式(1.1.19) 的形式：

$$u_z = A_0 + B_0 r^2 + qr^4/(64D)$$

当 $r \to 0$ 时，解的 r 高次项舍掉。

对于有中心孔的圆板，要取式(1.1.19) 的整个表达式。

边界条件为：当 $r = a$ 时

$$u_z = \frac{du_z}{dr} = 0$$

或以展开式表示为：

$$A_0 + B_0 a^2 + qa^4/(64D) = 0$$

$$2B_0 a + qa^3/(16D) = 0$$

由此得　$A_0 = qa^4/(64D)$，$B_0 = -qa^2/(32D)$

最后得挠度表达式为

$$u_z = q(a^2 - r^2)^2/(64D)$$

按公式(1.1.20) 得弯矩为

$$M_r = \frac{q}{16}[(1+\nu)a^2 - (3+\nu)r^2]$$

$$M_\theta = \frac{q}{16}[(1+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2]$$

1.1.6　对图1.1.18所示圆环段形板进行计算。板的中心角为 $2\beta_0$，两直边简支，两曲边为任意支持，承任意载荷 $q(r,\varphi)$ 作用。