高等教育自学辅导丛书

高等数学

第二册

北京大学 董镇喜 张景春 编

化学工业出版社

高等教育自学辅导丛书

高 等 数 学

第 二 册

一元函数积分学与级数

北京大学 董镇喜 张景春 编

化 学 工 业 出 版 社

内 容 提 要

本书是根据教育部推荐的《高等数学教学大纲》和北京市高等教育自学考试委员会公布的考试要求编写的。全书共分三册。第二册包括不定积分的概念与计算，几类可积成初等函数的不定积分，定积分，定积分的应用，常数项级数，函数项级数与幂级数，富里哀级数等内容。为了使读者能够通过自学掌握本书内容，编写力求做到通俗易懂、深入浅出，概念清楚简洁，推理讲明思路；书中通过较多例题和一定数量习题加深理解概念，掌握解题方法和技巧；一般习题给出答案，较难习题进行选解；书末有小结，每阶段有自我检查试题。全书由北京大学沈燮昌教授审定。

本书可供参加大学自学考试人员，理工科大学、师范院校、电视大学、业余大学的师生以及有关科技人员学习参考。

高等教育自学辅导丛书

高 等 数 学

第 二 册

一元函数积分学与级数

北京大学 董镇喜 张景春 编

*

化学工业出版社出版

（北京和平里七区十六号楼）

化学工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

*

开本850×1168 1/32 印张18 字数477千字 印数1—59,000

1982年5月北京第1版 1982年5月北京第1次印刷

统一书号7063·3391 定价2.20元

出 版 说 明

建国以来，在党的领导下，我国业余教育事业取得了很大成绩。为了进一步促进业余教育事业的发展，加速培养和选拔四化建设所需要的合格人材，教育部作出了关于建立高等教育自学考试制度的决定，凡属中华人民共和国公民经考核达到高等学校毕业生同等水平的，均承认其学历。为了配合这一工作的开展，为自学人员提供学习辅导材料，我社组织编写出版一套《高等教育自学辅导丛书》。这套丛书包括《语文》、《哲学》、《政治经济学》、《高等数学》、《物理》、《化学》、《生物》等册。

本《丛书》是根据北京市高等教育自学考试委员会公布的考试科目、教科书和考试要求以及教育部推荐的教学大纲编写的。书中力求从自学特点出发，对指定教材的内容作进一步阐述，重点突出，文字通俗，便于自学。

《丛书》除供自学人员学习外，也可供理工科大学、电视大学、业余大学师生选用。

化学工业出版社

一九八一年九月

前　言

建设现代化的社会主义强国，需要培养众多的又红又专的人才。当前，我国只有很少一部分人直接由高等学校培养，绝大多数人只能走自学成材（包括在职学习）的道路。为了给自学者提供学习的条件，我们为化学工业出版社出版的《高等教育自学辅导丛书》编写了《高等数学》。全书共分三册：第一册包括解析几何与一元函数微分学；第二册包括一元函数积分学与级数；第三册包括多元函数微积分与常微分方程。

本书是根据北京市高等教育自学考试委员会关于高等数学考试要求，并参照所规定的学习书目（樊映川著高等数学讲义(上、下册)），和教育部推荐的高等数学教学大纲编写的。作为一本自学读物，本书力求做到深入浅出，通俗易懂，重点突出。为了便于自学，我们采用讲课的形式来编写。不少地方写得较细，以便将基本内容叙述清楚、讲深讲透。书中有较多的例题，在习题选解中又对一些典型题目进行分析解答，以便使读者能进一步理解书中的一些概念，掌握更多的解题方法与技巧。每节都有较多的习题，每章的最后都有小结，书后附有全部习题答案及部分习题的提示和解题步骤。书中还有阶段自我检查试题，在学完一阶段内容之后应按书中列出的自我检查试题，在规定时间内认真独立完成，然后对照书末的详细解答评定自己的成绩，总结经验，找出学习中不足之处，以便更好地掌握全书内容。

读者在自学中，应当在初步理解课本内容的基础上，务必要采取自己动手推导演算各个章节的定理、例题、习题的方式来加深理解；切不可一遇到困难就放过不做，或者去查看本书中的现成答案；这是自己独立学好本门课程的关键。

书中有少部分内容我们认为是必要的，但又超出目前教学大

纲的范围，对此均采用小号字排印。

全书由沈燮昌教授主审。

由于编写时间仓促，编者水平又有限，全书难免有错误或不妥之处，希望读者不吝指正。

编　者

1981.10

目　录

第八章　不定积分的概念与计算

微积分学有三类基本问题，第一类问题的典型例子是已知作直线运动的质点的路程对时间 t 的函数

$$S=S(t)$$

要求质点在时刻 t 的瞬时速度 $v(t)$。这一类问题是微分学的基本问题，在微分学中，我们引进导数这个基本概念解决了这个问题，具体说来，要求函数$S(t)$在 t 时刻的瞬时速度 $v(t)$，只要对 t 求导数，即

$$v(t)=S'(t)=\frac{dS}{dt}.$$

第二类问题的典型例子是已知作直线运动的质点在 t 时刻的速度 $v=v(t)$，要求质点的路程函数 $S=S(t)$，这一类问题的已知条件和所要求的结论正好与第一类问题相反，因此我们常说第二类问题是第一类问题的反问题；这一类问题在力学、物理学、化学、生物学等学科以及各种实际问题中大量出现。第三类问题的典型例子是要求曲边梯形（梯形有一边不是直线而是曲线）的面积，这一类问题与前二类问题一样不能用初等数学的方法去解决。第二类问题与第三类问题构成了积分学的基本问题，通常又分别称它们为积分学的第一基本问题和第二基本问题。在积分学中，我们引进了不定积分、定积分这二个重要概念分别解决了这二类问题。以后我们将指出，这二类问题虽然形式上不一样，实际上存在着密切地联系。

本书的前四章讲积分学（第八、九章讲不定积分，第十、十一章讲定积分）。本章讲不定积分的概念与计算。

§1 原函数与不定积分的概念

1.1 原函数

若已知路程函数为

$$S(t)=t^2$$

那么它时刻 t 的速度是

$$v(t)=S'(t)=2t$$

反过来，如果我们已知时刻 t 的速度为

$$v(t)=S'(t)=2t$$

而要求它原来的函数$S(t)=?$，我们容易知道$S(t)=t^2$，t^2 就是速度函数$2t$的原来的函数（简称原函数）。

定义 设 $f(x)$在区间 (a, b) 上有定义，如果在 (a, b) 上存在函数$F(x)$，使得在 (a, b) 上

$$F'(x)=f(x)$$

或
$$dF(x)=f(x)dx,$$

则称$F(x)$为 $f(x)$在 (a, b) 上的一个原函数。

例1 $f(x)=\sin x$,

由于
$$(-\cos x)'=\sin x,$$

所以$\sin x$的一个原函数为$-\cos x$。

例2 $f(x)=e^{2x}$,

由于
$$\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'=e^{2x},$$

所以 e^{2x} 的一个原函数为 $\frac{1}{2}e^{2x}$。

例3 $f(x)=x^n \quad (n\neq-1)$

由于
$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=x^n$$

所以x^n的一个原函数为$\frac{x^{n+1}}{n+1}$

思 考 与 练 习

1．试求下列函数的一个原函数

（1）x^3，（2）$x^{1/2}$，

（3）$a^x (a>0)$，（4）$\frac{1}{\cos^2 x}$，

（5）$e^x + x$，（6）$\frac{1}{x}$．

2．$\frac{1}{2}e^{2x}$，$\frac{1}{2}e^{2x}+1$，$\frac{1}{2}e^{2x}+5$是不是e^{2x}的原函数？

1.2 不定积分

必须指出，一个函数的原函数有许多个，例如在例1～3中对于任意常数C，$-\cos x + C$，$e^x + C$，$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$分别也是它们的原函数。一般地，若$f(x)$有一个原函数$F(x)$，即

$$F'(x)=f(x)$$

显然函数族$F(x)+C$（C为任意常数）也是$f(x)$的原函数。这是因为

$$(F(x)+C)'=F'(x)=f(x).$$

我们自然要问，若一个函数$f(x)$的原函数是$F(x)$，那么它全部的原函数是否都包括在函数族$F(x)+C$中？

定理 设$f(x)$在(a, b)上存在一个原函数$F(x)$，则$F(x)+C$是$f(x)$的全部的原函数，其中C为任意常数。

证明 假设$G(x)$是$f(x)$的另一个原函数，即$G'(x)=f(x)$，又$F'(x)=f(x)$，所以

$$(G(x)-F(x))'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0,\ x\in(a,b),$$

根据一元微分学的中值定理，由函数的导数为零，可以推出这个函数必恒等于常数，因此

$$G(x)-F(x)\equiv C. \qquad x\in(a,\ b)$$

即

$$G(x)\equiv F(x)+C. \qquad x\in(a,\ b)$$

这就证明了 $f(x)$ 的全部原函数一定是 $F(x)+C$ 的形式。

证毕。

定义 函数 $f(x)$ 的全体原函数称为函数 $f(x)$ 的不定积分，记作

$$\int f(x)\,dx$$

其中符号 $\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，x 称为积分变量，$f(x)dx$ 称为被积表达式。

由上面定理知道，如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x)+C$ 就是 $f(x)$ 的全体原函数，其中 C 是任意常数，因而有

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

其中任意常数 C 通常称为积分常数。

由前面例1～3，有

$$\int \sin x dx=-\cos x+C,$$

$$\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C,$$

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\neq-1),$$

如果两个函数 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 有一个相同的原函数 $F(x)$，那么

$$\int f_1(x)dx=\int f_2(x)dx=F(x)+C.$$

注意，积分号 $\int$ 是一种运算符号，它表示要求出被积函数的全体的原函数。

从不定积分概念知道，“求不定积分”与“求微商”是两种互逆运算，这是因为，一个函数先求不定积分后求微商仍为函数自己

$$\left[\int f(x)\ dx\right]'=f(x)$$

这两种运算可以互相抵消。反过来，一个函数先求微商后求不定

积分，由

$$\int F'(x)dx = F(x) + C,$$

所得到的函数与原来函数只差一个任意常数。

思 考 与 练 习

1．函数的原函数与不定积分的关系是什么？

2．求不定积分

（1）$\int 5x^3 dx$，　　（2）$\int \cos x\, dx$，

（3）$\int \sqrt{x}\, dx$，　　（4）$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$，

（5）$\int x^{-3} dx$。

3．下列结果是否正确？为什么？

（1）$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$，

（2）$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + 1$，

（3）$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C^2$（$C$为任意常数），

（4）$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$（$C$为任意常数）。

1.3　不定积分的几何意义

函数$f(x)$的一个原函数$F(x)$的图形叫做函数$f(x)$的积分曲线。它的方程是$y=F(x)$，由于$F'(x)=f(x)$，积分曲线在x处的切线的斜率就等于$f(x)$。$f(x)$的不定积分是$F(x)+C$，C为任意常数，对于每一个确定的C，积分曲线$F(x)+C$可由积分曲线$y=F(x)$，沿着y轴平移常数C得到，因此，$f(x)$的不定积分在几何上是积分曲线沿着y轴作移动所得到的积分曲线族，见图8-1。而积分曲线族中每一曲线在任一点x处的切线的斜率都等于

$f(x)$，换句话说，积分曲线族中每一曲线在任一点 x 处的切线是平行的。

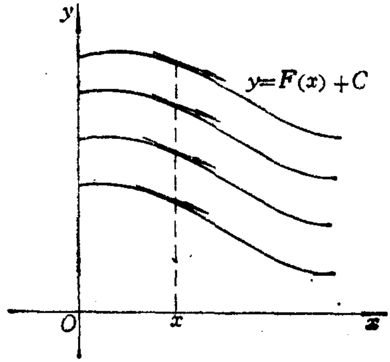

图 8-1

例4 求通过点（$\sqrt{3}$，$5\sqrt{3}$）而它的切线斜率为$5x^2$的曲线。

解 因为$\int 5x^2dx=\frac{5}{3}x^3+C$，因此切线斜率为$5x^2$的积分曲线族方程是$y=\frac{5}{3}x^3+C$，其中过点（$\sqrt{3}$，$5\sqrt{3}$）的积分曲线，应有

$$5\sqrt{3}=\frac{5}{3}(\sqrt{3})^3+C=5\sqrt{3}+C,$$

$$C=0$$

故所求的曲线为$y=\frac{5}{3}x^3$。

例5 在平面上有一运动着的质点，如果它在 x 轴方向和 y 轴方向的速度分量分别为 $v_x=5\sin t$，$v_y=2\cos t$，又 $x|_{t=0}=5$，$y|_{t=0}=0$，求：

（1）时间为 t 时质点所在的位置；

（2）运动的轨迹方程。

解 设质点在 t 时刻的位置为（$x(t)$，$y(t)$），由题设

$$x'(t)=v_x=5\sin t,$$

因而

$$x(t)=\int 5\sin t dt=-5\cos t+C,$$

用$x(0)=5$代入上式有

$$C=10$$

同样

$$y'(t)=v_y=2\cos t$$

$$y(t)=\int 2\cos t dt=2\sin t+C,$$

用$y(0)=0$代入有$C=0$，因此t时刻质点的位置为$(-5\cos t+10,\ 2\sin t)$，质点运动的轨迹方程为

$$\begin{cases} x=-5\cos t+10 \\ y=2\sin t \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \dfrac{10-x}{5}=\cos t \\ \dfrac{y}{2}=\sin t, \end{cases}$$

$$\left(\frac{10-x}{5}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1,$$

$$\frac{(10-x)^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1。$$

习　题

1．一曲线过$(1,3)$，且在每一点切线斜率等于$3x$，求此曲线方程。

2．一曲线过原点，且在每一点的切线的斜率等于$2x$，试求这曲线的方程。

3．验证函数$y=\ln(ax)$，$y=\ln(bx)$，$y=\ln x+2$是同一函数的原函数。

4. 验证函数 $\frac{1}{2}e^{2x}$，$e^x\mathrm{sh}x$ 和 $e^x\mathrm{ch}x$ 都是 $\frac{e^x}{\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x}$ 的原函数。

5. 计算不定积分

（1）$\int x^2\sqrt{x}\,dx$，（2）$\int \sin x dx$，

（3）$\int \frac{1}{1+x^2}dx$，（4）$\int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}dx$，

（5）$\int \frac{x^2}{\sqrt{x}}dx$，（6）$\int e^x dx$，

（7）$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$.

§2 不定积分的计算

前已讲过不定积分的概念，从本节起讲不定积分的计算。

2.1 基本积分表

既然不定积分是求微商的逆运算，于是我们容易从过去学过的基本初等函数的微商表得到相应的几个常见函数的积分公式，这就是基本积分表。

基本积分表

微商公式	不定积分公式
1. $(C)'=0$	1. $\int 0dx=C$
2. $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$	2. $\int x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq-1)$
3. $(\ln\lvert x\rvert)'=\frac{1}{x}$	3. $\int \frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$
4. $(\sin x)'=\cos x$	4. $\int \cos x dx=\sin x+C$
5. $(\cos x)'=-\sin x$	5. $\int \sin x dx=-\cos x+C$