线性代数及其应用

线性代数及其应用

（清华大学）

居余马　胡金德　编

序 言

本书的前身是我们在清华大学授课用的讲义，交付出版前，根据全国工科数学课程指导委员会制定的线性代数课程基本要求，对讲义的内容和编排作了修改、充实和调整.

我们自79年讲授线性代数课以来，先后使用过兄弟院校及我校栾汝书教授编写的教材和教学参考书，从中受益匪浅. 为了进一步探索工科类（包括非数学专业的理科专业及经济管理专业）线性代数教学的基本要求及某些特点，在肖树铁教授的倡导下，编者与俞正光、李国瑞、何坚勇、陈国祯、王飞燕、朱蓉隽等一起对国内外一些线性代数教材作了分析和研究，对于很多问题大家都有较一致的看法，这促使我们鼓起勇气，写了这本教材.

我们编写教材的基本指导思想是从两个实际出发：一个是从工科类教学要求和学时较少（一般是40—60课内学时）的情况出发，合理地确定课程的基本要求；一个是从学生的认识规律出发，妥善地安排教材体系，以利于学生理解和掌握课程的基本概念、理论和方法. 具体的想法和处理有以下几点：

1. 线性代数是一门基础数学课程，它的基本概念、理论和方法，具有较强的逻辑性、抽象性和广泛的实用性；它的主要研究对象是有限维线性空间的线性变换. 由于n维线性空间与n维向量空间是同构的，在给定了线性空间的一组基后，

数域F上n维线性空间的线性变换与数域F上的n阶矩阵一一对应. 因此，在学时较少的情况下，我们认为教学的基本要求是：熟练掌握n维向量的线性运算和内积运算，理解线性相关性的理论和搞清n维向量空间和欧氏空间的结构；熟练掌握矩阵的基本运算和线性方程组的解的理论和求解方法；掌握矩阵的特征值和特征向量及二次型的基本概念和理论. 在上述教学内容中，要着重培养基本的运算能力，适当地训练逻辑思维和推理能力，注意理论与实际相结合并初步培养一定的应用能力.

2. 关于矩阵. 除了要熟练掌握基本运算及熟悉一些特殊矩阵的定义和性质以外，我们认为还要加强矩阵初等变换和矩阵分块运算，它们不仅是矩阵运算的重要方法和技巧，而且在理论分析中也有重要意义.

3. 关于线性空间. 我们把重点放在n维向量空间，把一般的线性空间作为非基本要求而列入附录. 对于n维向量空间，我们一般以三维几何向量为背景提出n维向量空间中的概念、运算和理论，使初学者比较自然地理解n维向量空间中向量的线性运算和内积运算，线性相关性，基和坐标，子空间 Cauchy-Schwarz 不等式，Schmidt 正交化过程等一系列概念、理论和方法. 掌握了n维向量空间和欧氏空间的基本理论，搞清了它们的结构，再进一步提出有限维线性空间、欧氏空间和酉空间的概念和理论，就容易接受和理解. 通过这样两个台阶认识问题，可以减少初学者在学习中的困难.

4. 关于矩阵的秩和线性方程组的解的理论. 我们以线性方程组求解为线索，从高斯消元法入手，按层次、分阶段地深

化问题，逐步提出矩阵的初等变换，矩阵的秩，向量的线性相关性，矩阵的秩等于其列秩和行秩，从而搞清线性方程组有解的条件和解的结构. 这里概念密集，难点较多，但由于紧密联系线性方程组的求解问题，学生对这些概念和方法的提出感到比较自然，有些定理(如秩$(A)=A$的列(行)秩)的证明也比较简明.

5. 关于线性变换. 我们主要讲n维向量空间的线性变换. 矩阵的特征值和特征向量是从实际问题中引出概念，并且在研究了矩阵对角化问题以后，列举了矩阵的特征值和特征向量在一些实际问题中的应用.

6. 关于二次型. 我们把它放在最后一章，其目的是用已学过的知识，全面地讨论二次型化标准形的方法和正定二次型的判定.

7. 关于行列式。为把更多的时间用于线性代数的基本内容，我们用简单而有效的递归法定义n阶行列式，并相应地证明它的性质. 这比用逆序来定义大约可省2学时.

为使工科类线性代数具有一定的特色，对于教材的内容，我们力图处理好两个关系：一个是理论深度和知识面宽度的关系，一个是理论和应用的关系. 关于前者，我们认为基本理论要少而精，理论深度可以浅一些，但知识面要适当地宽一些. 关于后者，我们认为在掌握基本理论的基础上，要注意培养学生一定的应用能力. 为此，我们一方面尽量从实际问题或简单的例子提出重要的概念，或阐明一些概念和理论的实际背景；另一方面列举一些线性代数在其它数学分支中的应用和用矩阵方法解决几个实际问题的例子，初步培养学生建

立数学模型的能力. 正是基于这种考虑,我们把书名定为“线性代数及其应用”. 尽管由于学时的限制,教学中不可能安排较多的应用内容,但是我们认为作为努力的方向,应该把理论和应用更紧密地结合起来.

此外, 本教材在内容的深度、广度上作了不同层次的安排,以利于不同程度的学生各有所得,也便于教师在教学中因材施教。编排情况为:

(1) 正文分为基本部分、引伸和应用部分及附录. 基本部分共六章,引伸和应用部分用打 * 的办法安排在有关章节,不讲不影响前后连贯.

(2) 习题分为基本题, 打 * 题和补充题. 每节后安排基本题和打 * 题, 打 * 题主要是一些证明题和引伸内容的训练题;每章后安排补充题,它一般比打 * 题更难一些. 打 * 题和补充题一般不作基本要求. 书后附有部分习题的答案和提示.

使用本教材的教师,可根据学时情况、学生水平及专业要求, 从正文的三个部分和三个层次的习题中确定教学的基本要求. 一般来说,正文和习题的基本部分大致适用于 40 学时类型的要求. 我们在清华大学授课 48 小时 (约折合 57 学时),除了基本内容以外,还讲授部分附录和应用内容,有些打 * 题和补充题也列入教学要求.

本书编者居余马应聘为中央广播电视大学经济系讲授线性代数课, 本书可供电大经济系学生参考, 根据电大教学要求,可以参考本书第一、二、三、五章的有关内容.

本书出版之前,曾在清华大学无线电系、自动化系、电机系、经济管理学院用作教材. 同学们反映内容较为充实,体系

安排较好，内容叙述准确易懂，例题类型较多，习题比较丰富，便于自学.

我们请栾汝书教授对本书作了审查，他在百忙之中审阅了全部书稿，提出了不少宝贵的修改意见，对此我们表示衷心的感谢. 此外，我校电工基础教研组李志康同志为第三章 §8 写了初稿；李国瑞、何坚勇和王飞燕等同志对校内讲义初稿也提了不少宝贵意见；我校教材科白光义和杨积康同志为校内讲义和本书的出版给了很多支持和协助. 在此，对他(她)们一并表示感谢.

本书由居余马主编，初稿第一、二、六章由胡金德编写，第三、四、五章由居余马编写. 交付出版前，主编对全书的内容和编排作了修改、充实和调整，设了附录部分，补了应用部分，附了部分习题的答案与提示(答案由胡金德演算). 由于我们水平所限，不妥或谬误之处在所难免，恳请读者和使用本教材的教师批评指正.

编　者

1986 年 4 月于清华园

目　录

第一章 行列式

在线性代数的一些问题中，常要用到行列式. 在初等代数里，已经介绍过二、三阶行列式的定义、性质和计算. 现在我们进一步讨论 n 阶行列式的定义、性质和计算，并给出求解 n 个元、n 个一次方程的联立方程组的克莱姆法则，以及由此得到的判别方程个数和未知量个数相同的一次齐次方程组有非零解的必要条件.

§1 n 阶行列式的定义和性质

行列式是一种特定的算式，它是根据求解方程个数和未知量个数相同的一次方程组的需要而定义的. 例如，我们定义了二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

则方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$$

当系数行列式 $D\neq 0$ 时，其解就可表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

同样，定义了三阶行列式

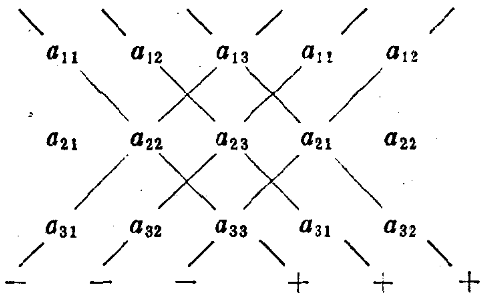
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

也可把系数行列式不等于零的三元一次联立方程组的解类似于二元一次联立方程组那样，用行列式来表示.

对 n 元一次联立方程组的解要得到类似的结果，显然要对 n 阶行列式给予合理的定义.

在初等代数里，对三阶行列式是用沙路法定义的，即



如果用这样的方法定义 n 阶行列式，将得到 $2n$ 项构成的一个和式，但是这样定义的 n 阶行列式，当 $n>3$ 时，它将与三阶行列式没有统一的运算性质，而且它也不能用于 n 元 n 个一次方程组的求解. 因此，我们不能采用沙路法定义一般的 n 阶行列式. 然而，我们从二、三阶行列式的展开式中，发现它们遵循着一个共同的规律，那就是三阶行列式可以按第一行展开，得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \tag{1}$$

其中 A_{11}，A_{12}、A_{13} 分别是 a_{11}、a_{12}、a_{13} 的代数余子式，且

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

而二阶行列式的展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

也可以视为按第一行展开，且 a_{22} 恰是 a_{11} 的代数余子式，$-a_{21}$ 恰是 a_{12} 的代数余子式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} \tag{2}$$

如果把(1)、(2)两式作为三阶、二阶行列式的定义，显然这种定义的方法是统一的，它们都是用低阶行列式定义高一阶的行列式．因此，人们很自然地会想到，用这种递归的方法来定义一般的 n 阶行列式．对于这样定义的 n 阶行列式，可以证明：n 阶行列式与二、三阶行列式有完全相同的性质；n 个元 n 个一次方程的联立方程组，当系数行列式不等于零时，方程组的解也可以用行列式表示．下面我们正式给出 n 阶行列式的定义．

I. n 阶行列式的定义

定义 由 n^2 个数组成的 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{简记作}|a_{ij}|_1^n) \qquad (3)$$

是一个算式，当 $n=2$ 时，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

当 $n>2$ 时

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j} \qquad (4)$$

其中 $$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$$

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21}\cdots a_{2j-1} & a_{2j+1}\cdots a_{2n} \\ a_{31}\cdots a_{3j-1} & a_{3j+1}\cdots a_{3n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nj-1} & a_{nj+1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

称 M_{1j} 为元素 a_{1j} 的余子式，A_{1j} 为元素 a_{1j} 的代数余子式。

由定义可以看出，行列式这个算式是由行列式的元素乘积构成的和式(称作展开式)，在二阶行列式的展开式中共有 2 项，三阶行列式的展开式中共有 $3!$ 项，n 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项；在 n 阶行列式展开式中每一项是不同行不同列的 n 个元素的乘积；在全部 $n!$ 项中，带正号的项和带负号的项各占一半；整个展开式是 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,\ 2\cdots,\ n)$ 的 n 次齐次多项式，当第一行元素为 $x_1,x_2,\cdots,\ x_n$ 时，n 阶行列式是 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 的一次齐次多项式。

例 1 证明：n 阶下三角行列式（当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$，即主对角线以上元素全为 0）

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \text{\Large 0} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证 对 n 作数学归纳法，$n=2$ 时，结论显然成立，假设结论对 $n-1$ 阶下三角行列式成立，则由定义得

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \text{\Large 0} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & & \text{\Large 0} \\ \vdots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

右端行列式是 $n-1$ 阶下三角行列式，根据归纳假设得

$$D_n=a_{11}(a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}).$$ （证毕）

同理

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & \text{\Large 0} & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & \text{\Large 0} & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例 2 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} & & & a_n \\ & \text{\Large 0} & a_{n-1} & \\ & & \iddots & \\ & a_2 & & * \\ a_1 & & & \end{vmatrix}$$

其中 $a_i\neq 0$，$(i=1,2,\cdots,n)$，“*”表示副对角线以下元素为任

意数,“0”表示副对角线以上元素全为零.

解 注意,对一般的 n, 这个行列式不等于 $-a_1a_2\cdots a_n$. 利用行列式定义,可得到

$$D_n=\begin{vmatrix} & 0 & & a_n \\ & & a_{n-1} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & a_2 & & * \\ a_1 & & & \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} & 0 & a_{n-1} \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ a_2 & & * \\ a_1 & & \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}a_nD_{n-1}$$

再利用上面 n 阶与 $n-1$ 阶行列式之间的关系(通常称递推关系),递推可得

$$\begin{aligned} D_n&=(-1)^{n-1}a_nD_{n-1}=(-1)^{n-1}a_n(-1)^{n-2}a_{n-1}D_{n-2}\\ &=\cdots\cdots\\ &=(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1}a_na_{n-1}\cdots a_2a_1\\ &=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_na_{n-1}\cdots a_2a_1 \end{aligned}$$

当 $n=4,5$ 时, $D_4=a_1a_2a_3a_4$, $D_5=a_1a_2a_3a_4a_5$

当 $n=6,7$ 时, $D_6=-a_1a_2\cdots a_6$, $D_7=-a_1a_2\cdots a_7$

II. n 阶行列式的性质

n 阶行列式与二、三阶行列式有完全相同的七条性质。

性质 1 行列式的行与列(按原顺序)互换,其值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{5}$$

这个性质可用数学归纳法证明，但证明很烦琐，(故略去)，有兴趣的读者可参阅本章附录.

有了这个性质，行列式对行成立的性质对列也成立. 以下我们仅对行讨论行列式的性质.

性质 2 行列式(3)对任一行按下式展开，其值相等，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \tag{6}$$

$(i=1,2,\cdots,n)$. 其中

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

M_{ij} 是 D 中去掉第 i 行第 j 列元素所成的 $n-1$ 阶行列式，它称为 a_{ij} 的余子式，A_{ij} 称为 a_{ij} 的代数余子式.

这个性质也用数学归纳法证明，有兴趣的读者可参阅本章附录.

性质 3(线性性质) 有以下两条:

$$\text{(i)} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{7}$$